

含多裂纹结构的断裂可靠性分析

孟广伟, 赵云亮, 李 锋, 沙丽荣

(吉林大学 机械科学与工程学院, 长春 130022)

摘要:基于随机有限元法和可靠性设计理论,建立了一种含多裂纹结构的断裂可靠性分析模型。首先,根据最小二乘法建立应力强度因子的表达式,然后将影响结构断裂的不确定因素视为随机变量,通过一阶二次矩法和随机有限元法求出每条裂纹的可靠度指标,最后将含多裂纹结构看作一个由所有裂纹组成的串联系统,求出各裂纹之间的相关系数,并得出多裂纹结构失效概率的Ditlevsen界限值。数值算例表明,本方法具有较强的适用性。

关键词:固体力学;断裂;可靠性;多裂纹;一阶二次矩法;随机有限元法

中图分类号:O346.1 **文献标识码:**A **文章编号:**1671-5497(2008)03-0614-05

Reliability analysis of structures with multi-crack

Meng Guang-wei, Zhao Yun-liang, Li Feng, Sha Li-rong

(College of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130022, China)

Abstract: Based on stochastic finite element method and reliability theory, a reliability analysis model for structures with multi-crack was presented. Firstly, the expression of stress intensity factors was proposed using the least squares method. Secondly, uncertainties in material parameters, crack length and loading which affect fracture of structures were described as random variables, the reliability index for each crack was obtained by first order reliability method and stochastic finite element method. Finally, the structure with multi-cracks was taken as a series system composed of all cracks, and the correlation coefficients between failure models were evaluated. The failure probability of the structure was computed by Ditlevsen bounds method. A numerical example was performed for a finite plate with multiple holes and cracks. The result shows that the suggested method is feasible and applicable.

Key words: solid-state mechanics; fracture; reliability; multi-crack; first order reliability method; stochastic finite element method

老龄结构由于在长时间疲劳、腐蚀、磨损的作用下,往往出现多处裂纹,导致结构剩余强度降低,临界裂纹尺寸减小、裂纹扩展寿命缩短,容易

导致灾难性事故。对于多裂纹结构,每条裂纹尖端应力场一般都要受到多个边界的影响,这使得仅有少量的规则排列的无限大板的多裂纹问题具

收稿日期:2007-03-04.

基金项目:高等学校博士学科点专项科研基金项目(20060183063);吉林省科学技术厅基金项目(20060538);吉林大学“985工程”资助项目.

作者简介:孟广伟(1959-),男,教授,博士生导师.研究方向:疲劳与断裂,计算固体力学. E-mail:mgw@jlu.edu.cn

通讯联系人:李锋(1977-),男,博士.研究方向:疲劳断裂可靠性. E-mail:fengli@jlu.edu.cn

有解析解,因此工程中常用组合法求解强度因子^[1],该方法虽然在一定程度上拓宽了研究对象的范围,但它的求解仅局限于已有应力强度因子解和特定的结构加载方式。由于有限元法可以模拟任意裂纹、任意边界和任意载荷的结构构件,并能准确反映裂纹与裂纹之间的相互影响,因此在多裂纹应力强度因子的求解方面得到了广泛的应用^[2-4],但目前仍主要集中在确定性的研究,即将作用在结构上的工作应力和所用的材料性能均视为确定的数值。由于受材料参数、裂纹尺寸、方向、载荷等因素的影响,多裂纹结构的失效断裂表现出较大的分散性,因此需要从概率论和数理统计的角度出发,建立含多裂纹结构的断裂可靠性分析模型。

作者将材料参数、裂纹尺寸、载荷等影响结构可靠性的因素视为随机变量,建立了一种基于随机有限元法的含多裂纹结构的断裂可靠性模型。数值算例结果表明,本方法具有较强的适用性。

1 应力强度因子

由线弹性断裂力学知,在裂纹尖端有

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} \frac{E}{2(1+\mu)(1+\kappa)} \frac{|u|}{\sqrt{r}} \quad (1)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} \frac{E}{2(1+\mu)(1+\kappa)} \frac{|v|}{\sqrt{r}} \quad (2)$$

式中: K_I 、 K_{II} 分别为 I 型和 II 型应力强度因子; μ 为材料的泊松比; E 为弹性模量; u 、 v 分别为裂纹上的点在 x 方向和 y 方向上的位移;

$$\kappa = \begin{cases} (3-\mu)/(1+\mu) & \text{平面应力} \\ 3-4\mu & \text{平面应变} \end{cases}$$

$$\text{令 } \frac{|v|}{\sqrt{r}} = A + Br \quad (3)$$

$$\text{则有 } K_I = \sqrt{2\pi} \frac{EA}{2(1+\mu)(1+\kappa)} \quad (4)$$

由于在裂纹尖端处应力具有 $r^{-1/2}$ 的奇异性,本文采用如图 1 所示的 1/4 节点奇异单元。

用图 1 中奇异元中的 2、3、4、5 节点的 $\left(r_i, \frac{|u_i|}{\sqrt{r_i}} \right)$ ($i=2,3,4,5$) 对式(3)进行最小二乘拟合,有

$$A = \frac{8(v_2 - v_3) - (v_4 - v_5)}{3\sqrt{L}} \quad (5)$$

式中: L 为奇异元的长度; v_i 为节点 i 在 y 方向上的位移。

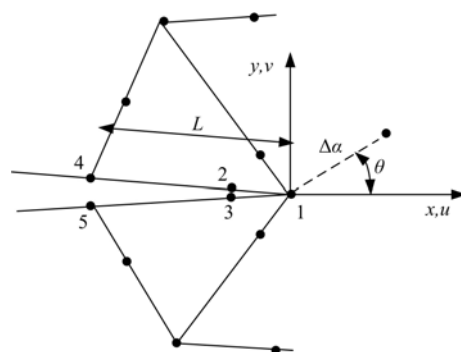


图 1 裂隙两侧 1/4 节点奇异元

Fig. 1 Triangular quarter-point elements around crack tip

将式(5)代入式(4),有

$$K_I = \mathbf{M} [v_2, v_3, v_4, v_5]^T \quad (6)$$

式中:

$$\mathbf{M} = \frac{E}{6(1+\mu)(1+\kappa)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [8, -8, -1, 1] \quad (7)$$

同理,有

$$K_{II} = \mathbf{M} [u_2, u_3, u_4, u_5]^T \quad (8)$$

式中: u_i 为节点 i 在 x 方向上的位移。

根据最大周向应力^[5],等效 I 型应力强度因子 K_{eq} 值为

$$K_{eq} = \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix}^T \mathbf{A} = \mathbf{U}' \mathbf{M}^T \mathbf{A} \quad (9)$$

式中:

$$\mathbf{U}' = \begin{bmatrix} v_2, v_3, v_4, v_5 \\ u_2, u_3, u_4, u_5 \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ -3 \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

θ 为裂纹扩展角,它满足下式

$$\mathbf{U}' \mathbf{M}^T \mathbf{B} = 0 \quad (11)$$

$$\text{式中: } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ 3 \cos \theta - 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Swift^[6]认为,当两个裂纹尖端塑性区域发生接触时,原来的两条裂纹合并成一条裂纹,如图 2 所示,该韧带连通准则为

$$R_p(a) + R_p(b) = 0 \quad (13)$$

式中: $R_p(a)$ 、 $R_p(b)$ 分别为裂纹 a 、 b 的尖端塑性区域尺寸; D 为两裂纹尖端距离。

R_p 可由下式计算

$$R_p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{eq}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (14)$$

式中: σ_s 为屈服强度。

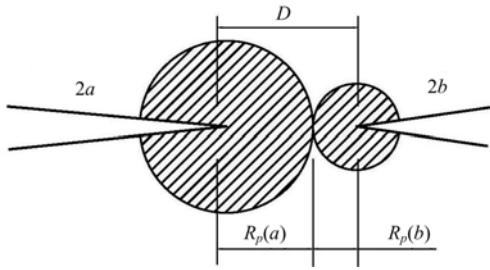


图 2 Swift 韧带连通准则

Fig. 2 Swift ligament linkup criterion

当有上述情况发生时,在建立裂纹模型时将两条裂纹合并成一条长裂纹。

2 多裂纹结构断裂可靠性模型

含多裂纹的结构由于裂纹之间的相互影响,使其断裂失效过程比较复杂。本文仅考虑其中的某一条裂纹的应力强度因子超过平面应变断裂韧度 K_{IC} 而引起结构失效的情况。因此,对于裂纹 i ,取功能函数为

$$Z_i = K_{IC} - K_{a_i} \quad (15)$$

式中: K_{a_i} 为裂纹 i 的等效 I 型应力强度因子。

当 $Z_i > 0$ 时,结构处于安全状态, $Z_i \leq 0$ 时,结构处于失效状态。

假设整个结构含有 n 条裂纹,由于任意一条裂纹失稳都会引起结构失效,因此,含多裂纹结构可看作一个由这 n 条裂纹组成的串联系统,则结构的失效概率为

$$R_f = R_f(Z_1 \leq 0 \cup Z_2 \leq 0 \cup \dots \cup Z_n \leq 0) = \int_{Z_1 \leq 0} \int_{Z_2 \leq 0} \dots \int_{Z_n \leq 0} f(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) dZ_1 dZ_2 \dots dZ_n \quad (16)$$

式中: $f(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ 为 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 的联合概率密度函数。

当 $n = 2$, 亦即结构只含两条裂纹时,由式(16)可得

$$R_f = 1 - \Phi_2(\beta_1, \beta_2, \rho_{12}) \quad (17)$$

式中: $\Phi_2(\cdot)$ 为二维标准正态累积分布函数; β_1 和 β_2 分别为与功能函数 Z_1 和 Z_2 相对应的可靠度指标; ρ_{12} 为 Z_1 和 Z_2 的相关系数。

当 $n \geq 3$ 时,由于式(16)含有多重积分形式,再加上联合概率密度函数 $f(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ 通常难以求得,而且随着裂纹数的增加,使得使用式(16)计算结构可靠度基本上无法实现,因此需要采用近似的计算方法。

由 Ditlevsen 界限法^[7]可知,含多裂纹结构失

效概率界限为

$$R_{f1} + \max \left\{ \sum_{i=2}^n \left[R_{fi} - \sum_{j=1}^{i-1} R_f(Z_i \leq 0 \cap Z_j \leq 0) \right], 0 \right\} \leq R_f \leq \sum_{i=1}^n R_{fi} - \sum_{i=2, j < i}^n \max R_f(Z_i \leq 0 \cap Z_j \leq 0) \quad (18)$$

当所有随机变量都是正态分布且相关系数 $\rho_{ij} \geq 0$ 时,有

$$\max[q_i, q_j] \leq R_f(Z_i \leq 0 \cap Z_j \leq 0) \leq q_i + q_j \quad (19)$$

$$q_i = \Phi(-\beta_i) \Phi \left(-\frac{\beta_i - \rho_{ij} \beta_j}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}} \right) \quad (20)$$

$$q_j = \Phi(-\beta_j) \Phi \left(-\frac{\beta_j - \rho_{ij} \beta_i}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}} \right) \quad (21)$$

式中: β 可通过一次二阶矩法求出; $\Phi(\cdot)$ 为标准正态累积分布函数; ρ_{ij} 为 Z_i 和 Z_j 之间的相关系数。

设各随机变量之间相互独立,并记为 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 有

$$\rho_{ij} = \frac{\text{Cov}(Z_i, Z_j)}{\sigma_{Z_i} \sigma_{Z_j}} = \frac{\text{Var}(K_{IC}) + \text{Cov}(K_{a_i}, K_{a_j})}{\sqrt{(\text{Var}(K_{IC}) + \text{Var}(K_{a_i}))(\text{Var}(K_{IC}) + \text{Var}(K_{a_j}))}} \quad (22)$$

$$\text{Var}(K_{a_i}) = \text{Var}(\mathbf{U}') \mathbf{M}^T \mathbf{A} + \mathbf{U}' \mathbf{M}^T \text{Var}(\mathbf{A}) \quad (23)$$

$$\text{Var}(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right]^2 \text{Var}(x_j) \quad (24)$$

$$\text{Cov}(K_{a_i}, K_{a_j}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial K_{a_i}}{\partial x_j} \frac{\partial K_{a_j}}{\partial x_j} \text{Var}(x_j) \quad (25)$$

$$\frac{\partial K_{a_i}}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial x_j} \mathbf{M}^T \mathbf{A} + \mathbf{U}' \mathbf{M}^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \quad (26)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_j} = - \left[\mathbf{U}' \mathbf{M}^T \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \theta} \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial x_j} \mathbf{M}^T \mathbf{B} \quad (27)$$

式中: $\text{Cov}(\cdot)$ 表示协方差; σ 为标准差; $\text{Var}(\cdot)$ 表示方差; $\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial x_j}$ 和 $\text{Var}(\mathbf{U}')$ 可通过随机有限元法求得。

3 一次二阶矩法

将式(15)在验算点 $\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$ 处做一阶 Taylor 展开,可得 Z_i 的均值 u_{Z_i} 和标准差 σ_{Z_i} 分别为

$$u_{Z_i} = Z_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*) +$$

$$\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial Z_i}{\partial x_j} \right)_{x_j^*} (u_{x_j} - x_j^*) \quad (28)$$

$$\sigma_{Z_i} = \left\{ \sum_{j=1}^m \left[\left(\frac{\partial Z_i}{\partial x_j} \right)_{x_j^*} \sigma_{x_j} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

功能函数 Z_i 的可靠度指标为

$$\beta_i = \frac{u_{Z_i}}{\sigma_{Z_i}} \quad (30)$$

设计验算点坐标为

$$x_j^* = u_{x_j} + \beta_i \sigma_{x_j} \cos \varphi_{x_j} \quad (31)$$

其中 $\cos \varphi_{x_j} = - \left(\frac{\partial Z_i}{\partial x_j} \right)_{x_j^*} \frac{\sigma_{x_j}}{\sigma_{Z_i}} \quad (32)$

在使用一次二阶矩法时,所有随机变量必须满足正态分布,当随机变量为非正态分布时,需要将其转换成等效正态分布变量^[8]

$$u'_{x_i} = x_i^* - \sigma'_{x_i} \Phi^{-1} [F_{x_i}(x_i^*)] \quad (33)$$

$$\sigma'_{x_i} = \frac{\phi \{ \Phi^{-1} [F_{x_i}(x_i^*)] \}}{f_{x_i}(x_i^*)} \quad (34)$$

式中: u'_{x_i} 和 σ'_{x_i} 分别为等效正态分布变量的均值和标准差; Φ^{-1} 为标准正态累积分布函数的反函数; $F_{x_i}(\cdot)$ 和 $f_{x_i}(\cdot)$ 分别为原非正态分布变量的概率分布函数和概率密度函数。

4 随机有限元法

线弹性有限元方程为

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F} \quad (35)$$

式中: \mathbf{K} 为总刚度阵; \mathbf{U} 为位移列阵; \mathbf{F} 为等效节点载荷列阵。

将位移 \mathbf{KU} 在基本随机变量 $\mathbf{X}=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 的验算点 $\mathbf{X}^*=(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$ 处进行一阶 Taylor 展开,有

$$E[\mathbf{U}] \approx \mathbf{U}^* = \mathbf{K}^{*-1} \mathbf{F}^* \quad (36)$$

$$\text{Var}[\mathbf{U}] \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \text{Cov}(x_i, x_j) \quad (37)$$

式中: \mathbf{U}^* 、 \mathbf{K}^* 、 \mathbf{F}^* 分别表示位移 \mathbf{U} 、总刚度阵 \mathbf{K} 、载荷列阵 \mathbf{F} 在验算点处的值。

将式(35)两边分别对随机变量求导,有

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} = \mathbf{K}^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_j} \mathbf{U} \right] \quad (38)$$

5 数值算例

如图 3 所示的含多裂纹的多孔均匀拉伸板,

所有裂纹都等长,板长 $W=150$ mm,板高 $H=72$ mm,所有孔的直径均为 10 mm,孔间间距为 30 mm,材料为 40CrNiMoA^[9],弹性模量 $E=210$ GPa,泊松比 $\mu=0.3$,屈服强度 $\sigma_s=1334$ MPa,取随机变量为裂纹长度 $a_i(i=1,2,\dots,8)$ 、载荷 σ 、平面应变断裂韧度 K_{IC} ,它们分别服从对数正态分布、对数正态分布、正态分布;它们的均值分别为 5 mm、120 MPa、90 MPa·m^{1/2},它们的变异系数分别为 0.1、0.1、0.2。由于该构件具有双向对称性,故取其四分之一作为计算模型,在裂纹尖端采用 1/4 节点奇异单元,而在其他区域采用三角形六节点单元,有限元计算模型见图 4。

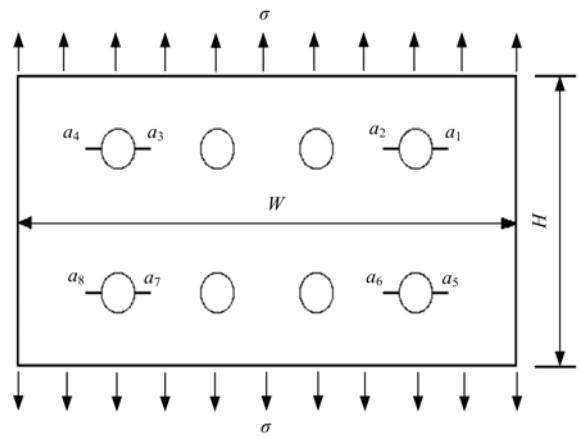


图 3 含多裂纹的多孔均匀拉伸板

Fig. 3 Model of multi-holes with eight-cracks

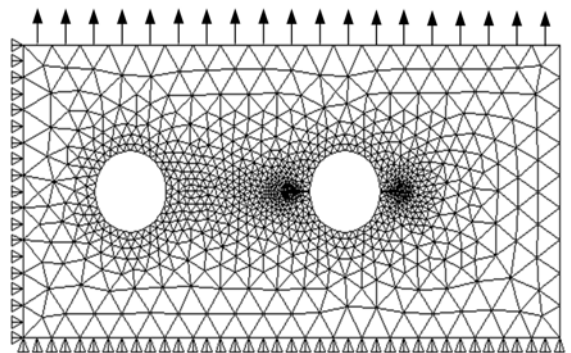


图 4 有限元模型

Fig. 4 Model of finite element method

求得各裂纹 $i(i=1,2,\dots,8)$ 的可靠度指标依次为:2.5975,2.5958,2.5958,2.5975,2.5975,2.5958,2.5958,2.5975。

相关矩阵为

$$\rho = \begin{bmatrix}
 1 & 0.9999 & 0.9965 & 0.9966 & 0.9464 & 0.9460 & 0.9460 & 0.9464 \\
 0.9999 & 1 & 0.9964 & 0.9965 & 0.9460 & 0.9455 & 0.9455 & 0.9460 \\
 0.9965 & 0.9964 & 1 & 0.9999 & 0.9460 & 0.9455 & 0.9455 & 0.9460 \\
 0.9966 & 0.9965 & 0.9999 & 1 & 0.9464 & 0.9460 & 0.9460 & 0.9464 \\
 0.9464 & 0.9460 & 0.9460 & 0.9464 & 1 & 0.9999 & 0.9965 & 0.9966 \\
 0.9460 & 0.9455 & 0.9455 & 0.9460 & 0.9999 & 1 & 0.9964 & 0.9965 \\
 0.9460 & 0.9455 & 0.9455 & 0.9460 & 0.9965 & 0.9964 & 1 & 0.9999 \\
 0.9464 & 0.9460 & 0.9460 & 0.9464 & 0.9966 & 0.9965 & 0.9999 & 1
 \end{bmatrix}$$

结构的失效界限为 $0.0047 \leq R_f \leq 0.0216$, 而 1000 次的 Monte-Carlo 模拟所得到的失效概率为 0.011, 从计算结果来看, 本方法可靠有效。

6 结束语

从概率论和数理统计的角度出发, 将影响结构断裂的不确定因素视为随机变量, 建立了一种基于随机有限元法和可靠性设计理论的含多裂纹结构的断裂可靠性分析模型。该模型将含多裂纹结构看作一个由所有裂纹组成的串联系统, 适用于任意裂纹、边界和载荷的多裂纹结构可靠性分析, 对于保证老龄结构的安全运行具有重要意义。

参考文献:

[1] 刘文铤, 郑旻仲, 费斌军, 等. 概率断裂力学与概率损伤容限/耐久性[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1999: 103-107.

[2] Hwang C G, Wawrzynek P A, Ingraffea A R. On the calculation of derivatives of stress intensity factors for multiple cracks [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2005, 72: 1171-1196.

[3] Pitt S, Jones R, Atluri S N. Further studies into interacting 3D cracks[J]. Computers and Structures, 1999, 70: 583-597.

[4] Wang L, Brust F W, Atluri S N. The EPFEAM and the prediction of fracture under WFD conditions part III: computational predictions of the NIST multiple site damage experimental results[J]. Computational Mechanics, 1997, 20: 199-212.

[5] Erdogan F, Sih G C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear[J]. Journal of Basic Engineering, 1963, 85: 519-527.

[6] Swift T. Damage tolerance capability[J]. International Journal of Fatigue, 1994, 16: 75-94.

[7] Ditlevsen O. Narrow reliability bounds for structure systems[J]. Journal of Structure Mechanics, 1979, 7(4): 453-472.

[8] Rackwitz R, Fiessler B. Structural reliability under combined random load sequences[J]. Computational Structure, 1978, 9: 484-494.

[9] 高庆. 工程断裂力学[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1986: 71-72.