

Lamb の問題に基づくレーリー波複素コヒーレンス関数の離散定式とその応用—空間自己相関法の新しい解釈—

白 石 英 孝*・松 岡 達 郎*

Complex coherence function represented by discrete formula on the basis of Lamb's problem for Rayleigh waves: An application for new interpretation of the spatial autocorrelation method

Hidetaka Shiraishi* and Tatsuro Matsuoka*

ABSTRACT

The spatial autocorrelation (SPAC) method requires a special circular array where several observation points are equally spaced on the circumference. In order to look for the possibility of developing a new method of array observation with fewer restriction of arrangement than the SPAC method, we proposed a formula of the complex coherence function (CCF) of the Rayleigh wave measured on a couple of observation points located at any place. This formula was derived on the basis of an analytical solution of Lamb's problem, aiming to study the relation between wave source and observation point. The formula was given as simple discrete representation consisting of the Bessel function of the first kind of zero order $J_0(kr)$ (k : wavenumber, r : radius of array) and an infinite series with higher-order Bessel functions. In the SPAC method, by regarding the SPAC coefficient from directional average of CCFs (real part) as $J_0(kr)$, phase velocities of Rayleigh waves (wave number k) are calculated.

We first studied the relationship between the values of CCF and wave sources located far from a couple of observation points, and found that the values of CCF strongly varies depending on the direction with increase in kr , and also found that such directional properties were mainly caused by the variation of the infinite series in the formula of CCF. Furthermore, we applied the formula to the SPAC method for revealing the mechanism of the directional average and the reason why the SPAC method requires the special circular array with sensors equally spaced on a circle. The results are summarized as follows: 1) The values of the infinite series gets lower enough to be negligible after the directional average of CCFs, so that the SPAC coefficient can be approximated to $J_0(kr)$. 2) From the inverse analysis on the condition that the values of the infinite series is equal to zero, it was found that the condition was satisfied not only in the usual SPAC arrays but also in some extra circular arrays consisting of observation points not equally spaced on the circumference.

This result suggests the possibility of array design with fewer restriction of arrangement of observation points, using a new algorithm for obtaining $J_0(kr)$ without the operation of directional average used in the SPAC method.

Key words: Lamb's problem, complex coherence function, spatial autocorrelation method

1. はじめに

空間自己相関法 (SPAC 法) では AKI (1957) の理論

をもとに、円形アレーの中心点と円周点間の複素コヒーレンス関数の実部を観測量とし、その方位平均値 (空間自己相関係数) が $J_0(kr)$ (波数 k と半径 r の第 1 種 0 次

2004年7月9日原稿受付; 2004年12月28日受理

* 埼玉県環境科学国際センター

〒347-0115 埼玉県北埼玉郡騎西町大字上種足914

Manuscript received July 9, 2004; Accepted December 28, 2004

* Center for Environmental Science in Saitama

914 Kamitanadare, Kisai-machi, Kitasaitamagun, Saitama 347-0115 Japan

©2005 SEGJ

ベッセル関数) に等しいことを利用して位相速度を検出する。この関係を表す定式は、現在では定常確率過程における微動のスペクトル表現を基礎として導かれている(たとえば岡田ほか, 1990)。この定式には方位平均の過程に積分表現(方位積分)が含まれているため、実観測時にはこれを離散化して算術平均を行う。その結果、円周点を等間隔とする配置上の制約が生じ、実際のアレー展開が困難な場合がある。そのため、これまで凌・岡田(1994)、山本ほか(1997a, b)、岡田ほか(2003)などによって配置の制約を緩和する検討が試みられてきた。また長・篠崎(2003)は、Henstridge(1979)の方法をもとに方位積分をフーリエ級数展開によって円周方向に離散化し、不等間隔配置や微動強度の方位特性などの理論的検討を行っている。しかし現時点では、SPAC法の観測点配置に関する制約を大きく改善した実用手法は確立されていない。

筆者らは、こうした背景のもとに、円周点の配置に高い任意性をもつ位相速度検出法について検討を行っている。それは、一言でいえば方位積分(方位平均)を用いずに $J_0(kr)$ を求める方法である。この検出法を構築するには、従来のSPAC法で単に方位平均を行うためだけに利用されていた複素コヒーレンス関数を、視点を変えて、アレー観測を数学的に表現する手段として捉え直す必要があると考えられる。すなわち、実観測での離散的配置に適用できる複素コヒーレンス関数の数学的表現(離散定式)の構築である。このような離散定式を用いることにより、従来の定式では対応が困難な円周点の任意配置を数学的に容易に表現することが可能になる。さらに、演算過程を簡便な代数表現に置き換えられるという利点をもつと考えられる。

複素コヒーレンス関数を微動観測の問題に適用した例は、すでに複数モードの識別(堀家, 1980)やSPAC法の観測点数等の検討(紺野, 2000)などがある。しかしながら、筆者らが検討を進めているような円周点の任意配置を表現する手段として適用された例はない。また、既存の適用例では、複素コヒーレンス関数を現行のSPAC法と同様に確率過程論に基づいて導いている。これに対し筆者らは、Lambの問題の解析解を援用して複素コヒーレンス関数の離散定式化を行った。Lambの問題の解析解は、Tokimatsu et al. (1992)、芦谷ほか(1999)、Arai and Tokimatsu (2004)などにより、H/VスペクトルやF-K法などによる地下構造推定の検討に用いられているが、本稿ではこれを複素コヒーレンス関数の定式化に利用した。こうした作業を行ったのは、振源から観測点に至る波動伝搬のプロセスを明確化しておくことで、逆に観測点から振源に遡るプロセスも明確化されるため、将来的に観測値を用いた振源のモデル化(振源の方位分布や強度分布の確率モデル化)を試みる場合などに有益であると考えたためである。

筆者らは新しい位相速度検出法の検討に先だって、こ

の離散定式によるアレー観測の数学的表現の妥当性を検証した。すなわち、この定式によってSPAC法の演算過程を適切に表現できるか否かの検討である。その結果、筆者らの提案した離散定式によってSPAC法の記述が可能であるだけでなく、これまで知られていなかった位相速度検出メカニズムの詳細や観測点配置の制約の本質的な原因について明瞭に説明できることが判明した。本稿では、1) 複素コヒーレンス関数についてLambの問題の解析解を援用して離散定式化する過程を示し、2) その定式を用いて、微動の振源方位と複素コヒーレンス関数の値との関係を検討することにより、3) SPAC法における方位平均のメカニズムについて詳細に解釈した結果を述べる。さらに、その解釈に基づいて、4) 観測点配置の制約の本質的な原因を明らかにする。

2. 複素コヒーレンス関数の離散定式化

離散定式化にあたっては、一般に上下動のアレー微動観測で検出が期待されるレーリー波を対象とし、観測点における上下動振幅と振源との関係を表現するために、齋藤・柁沢(1993)に示されたLambの問題の解析解を基本式として用いた。これに芦谷ほか(1999)を参考として地盤の内部減衰の導入および複素共役の操作を行い、上下動点振源による速度振幅を求めた。すなわち、周波数 f において加振力 $Fe^{j\phi}$ をもつ振源から十分離れた距離 \tilde{r} の位置にある観測点のレーリー波上下動速度振幅 $U(f)$ は、次のように表すことができる。

$$U(f) = -\sqrt{2\pi}f\tilde{r}^{-1/2} \sum_{m=1}^M A_m \{F \times \exp(j\phi)\} k_m^{-1/2} \exp(-h_m k_m \tilde{r}) \times \exp\left\{-j\left(k_m \tilde{r} - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad (1)$$

ここで、 A_m は地盤の応答、すなわちmedium response(Harkrider, 1964)である。また、 k_m は波数、 h_m は地盤の内部減衰を表す(ただし m はモード次数)。なお、 j は虚数単位である。

次に、今後の議論に必要な以下の仮定を設ける。

仮定1: 振源は観測点から十分遠方にある。

仮定2: レーリー波の単一のモードが卓越する(ただし、基本モードに限定されない)。

仮定3: 振源間には相関が無い。

このうち仮定1は式(1)の成立に必須の条件であるが、本稿の定式化の過程でも用いられるため、ここに示した。また仮定2および仮定3は、後の第4章に示すSPAC法への適用を念頭において設けたものである。

単一モードが卓越する場合(仮定2)には式(1)から総和記号がはずれ、次式が得られる(モード次数 m および振幅 $U(f)$ の周波数の引数 f を省略)。

$$U = -\sqrt{2\pi}f\tilde{r}^{-1/2}AFk^{-1/2} \exp(-hk\tilde{r}) \times \exp\left\{-j\left(k\tilde{r}-\phi-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad (2)$$

複数の振源（振源数： L ）が存在する場合に、2つの観測点 p, q での速度振幅 U_p, U_q は、各振源に由来する成分の重ね合わせとして、次のように表すことができる。

（観測点 p ）

$$U_p = \sum_{l=1}^L C_{pl} \exp\left\{-j\left(kr_{pl}-\phi_l-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad (3)$$

$$\text{ただし, } C_{pl} = -\sqrt{2\pi}fr_{pl}^{-1/2}AF_lk^{-1/2} \exp(-hkr_{pl})$$

（観測点 q ）

$$U_q = \sum_{l=1}^L C_{ql} \exp\left\{-j\left(kr_{ql}-\phi_l-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad (4)$$

$$\text{ただし, } C_{ql} = -\sqrt{2\pi}fr_{ql}^{-1/2}AF_lk^{-1/2} \exp(-hkr_{ql})$$

ここで、 r_{pl}, r_{ql} は観測点 p, q と振源 l との距離、 F_l は振源 l の加振力、 C_{pl} および C_{ql} は振源 l に関する観測点 p, q での位相情報を除いた振幅に相当する。

式(3), (4)は、定常確率過程とみなすことのできる微動の有限フーリエ変換(生スペクトル)に相当するため、実際の観測を想定して部分分割平均 (segment averaging; Bendat and Piersol, 1971) による平滑化スペクトルを次式で定義する。

$$G_{pq} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_{pi} U_{qi}^* \quad (5)$$

式(5)はクロススペクトルについて表されたものであるが、 $p=q$ (または $q=p$) としてパワースペクトルに読み替えることができる。ここで、 N は有限の微動記録の分割数 (セグメント数)、 i はセグメント番号、 $*$ は複素共役を表す。そこで、振源が無相関の場合 (仮定3) には、異なる振源から到達する微動の位相が無相関となるため、パワースペクトルおよびクロススペクトルは次式で表すことができる。

パワースペクトル

$$\text{(観測点 } p) \quad G_{pp} = \sum_{l=1}^L C_{pl}^2 \quad (6)$$

$$\text{(観測点 } q) \quad G_{qq} = \sum_{l=1}^L C_{ql}^2 \quad (7)$$

クロススペクトル

$$\text{(観測点 } p, q) \quad G_{pq} = \sum_{l=1}^L C_{pl} C_{ql} \exp\{-jk(r_{pl}-r_{ql})\} \quad (8)$$

なお、たとえば観測点 p のパワースペクトルを表す式(6)は、本来は式(9)で表されるが、ここでは式(10)の

ように表記を改めて示した。式(10)の C_{pl}^2 とは、振源 l から観測点 p に到達するパワーの時間平均値を意味する。

$$G_{pp} = \sum_{l=1}^L \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_{pi}^2 \right) \quad (9)$$

$$C_{pl}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_{pi}^2 \quad (10)$$

2点間 p, q の複素コヒーレンス関数を γ_{pq} と表記すると、これは式(6)~(8)を用いて次のように表すことができる。

$$\gamma_{pq} = \frac{G_{pq}}{\sqrt{G_{pp}} \sqrt{G_{qq}}} = \sum_{l=1}^L \lambda_{pq} \exp\{-jk(r_{pl}-r_{ql})\} \quad (11)$$

ただし、

$$\lambda_{pq} = \frac{C_{pl} C_{ql}}{\sqrt{\sum_{l=1}^L C_{pl}^2} \sqrt{\sum_{l=1}^L C_{ql}^2}} \quad (12)$$

は、後述するように観測点 p, q での振源 l の寄与割合に関係する量である。

次に、仮定1 (振源は観測点から十分遠方にある) を用いて式(11), (12)の変形を行う。式(11)の指数関数中に含まれる項 $r_{pl}-r_{ql}$ は、振源 l が十分遠方にある場合には Fig. 1 に示すとおり観測点 p での振源 l の方位角 θ_l および観測点間距離 r を用いて、

$$r_{pl}-r_{ql} \approx r \cos \theta_l \quad (13)$$

と近似することができる。この近似により観測点間の位相差は、観測点間距離と振源の方位角を用いて表される。なお、方位角を測る基準となる観測点 p を以下、方位基準点と呼ぶ。

また、付録に示したように、振源 l に対応する観測点の振幅には次の関係が成り立つ。これらは観測場の定常性を表す条件に相当する。

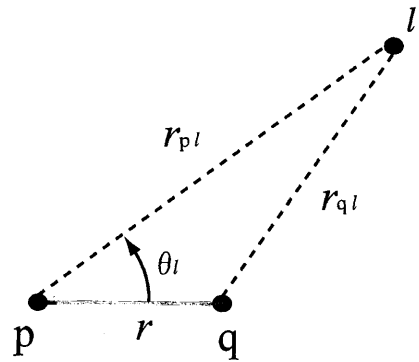


Fig. 1 Geometry used in formulation of the complex coherence function (CCF) between observation points p and q in relation to wave-source l .

$$C_{ql}^2 \approx C_{pl}^2 \quad (14)$$

$$C_{pl} C_{ql} \approx C_{pl}^2 \quad (15)$$

式(13)～(15)を式(11), (12)に代入して整理すると、次式が得られる。ただし、以下では、近似記号(\approx)を等号(=)に置き換えて表記する。

$$\gamma_{pq} = \sum_{l=1}^L \lambda_{pql} \exp(-jkr \cos \theta_l) \quad (16)$$

$$\lambda_{pql} = \frac{C_{pl}^2}{C_{p1}^2 + C_{p2}^2 + \dots + C_{pL}^2} \quad (17)$$

式(17)から、係数 λ_{pql} は観測点 p (方位基準点)のパワースペクトルに含まれる振源 l 成分の割合、つまり振源 l の寄与の割合を表していることがわかる。本稿では、この量を寄与率係数と呼ぶ。寄与率係数については、式(17)から次の関係が成立する。

$$0 < \lambda_{pql} \leq 1 \quad (18)$$

$$\sum_{l=1}^L \lambda_{pql} = 1 \quad (19)$$

さらに、式(17)に式(14)を適用することで、次式のように、観測点 p, q の寄与率係数が同一の値をもつことが導かれる。

$$\lambda_{pql} = \lambda_{qpl} \quad (20)$$

以上により、複素コヒーレンス関数は式(16)で与えられ、これに含まれる寄与率係数(式(17))は、式(18)～(20)に示す性質をもつ。

この複素コヒーレンス関数 γ_{pq} の実部および虚部は、

$$\text{Re}(\gamma_{pq}) = \sum_{l=1}^L \lambda_{pql} \cos(kr \cos \theta_l) \quad (21)$$

$$\text{Im}(\gamma_{pq}) = -\sum_{l=1}^L \lambda_{pql} \sin(kr \cos \theta_l) \quad (22)$$

のように表記できるが、以下の関係式

$$\cos(kr \cos \theta) = J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(kr) \cos 2n\theta \quad (23)$$

$$\sin(kr \cos \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} J_{2n-1}(kr) \cos(2n-1)\theta \quad (24)$$

および式(19)を用いれば、これら実部と虚部は最終的に次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \text{Re}(\gamma_{pq}) &= J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n J_{2n}(kr) \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \sum_{l=1}^L \lambda_{pql} \cos 2n\theta_l \right\} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \text{Im}(\gamma_{pq}) &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} J_{2n-1}(kr) \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \sum_{l=1}^L \lambda_{pql} \cos(2n-1)\theta_l \right\} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

以上のように、Lambの問題の解析解を基本とし、仮定1～3(仮定2, 3はSPAC法への適用のために設定)を用いて導かれた複素コヒーレンス関数は、式(21), (22)または(25), (26)に示す離散的表現となる。また、式(21), (22)は定常確率過程のスペクトル表現(堀家, 1980)に基づく紺野(2000)の結果と一致しており、本稿の導出方法によっても同一の帰結が得られることがわかる。ただし、ここに示したように本稿の定式化では具体的な振源を設定して導出を行うことで、振源に関するパラメータが複素コヒーレンス関数の中に組み込まれる過程が明確に表されている。これに加えて定常性の条件(式(14), (15))や寄与率係数の満たすべき条件(式(18)～(20))などの重要な関係式が明示的に導かれている。

3. 複素コヒーレンス関数の基本的性質(方位特性)

式(21), (22)によれば2地点間の複素コヒーレンス関数は、振源ごとの寄与率係数 λ と三角関数項($\cos(kr \cos \theta)$, $\sin(kr \cos \theta)$)の線形結合として表される。ここで三角関数項に振源方位角 θ が含まれているため、複素コヒーレンス関数の値には振源方位に依存して変化する要素が含まれる。本稿では、この方位依存性を表す三角関数項を、複素コヒーレンス関数の方位特性と呼ぶ。この方位特性をいくつかの kr について調べると、以下に示すように興味深い性質をもつことがわかる。

Fig. 2は、例として複素コヒーレンス関数実部の方位特性を $kr=0.25\pi, 0.5\pi, 1.0\pi$ および 2.5π について示したものである。また、図は振源方位角方向を独立変数 θ 、動径方向を従属変数 $\cos(kr \cos \theta)$ として表されている。さらに図には式(23)の関係を用い、第1種0次のベッセル関数項(以下、 J_0 項と呼ぶ、他の次数も同様)および無限級数項についても併せて示している。ただし、無限級数項を直接計算することはできないため、ここでは、無限級数項 $=\cos(kr \cos \theta) - J_0(kr)$ 、として示した。なお、方位特性の値が負となる場合を表すために、原点の値は便宜的に -2 とした。振源方位角については、方位基準点を原点におき、 x 軸正方向を0度として反時計回りに角度が増加するものとした。

Fig. 2に示した各 kr ごとの方位特性(太実線)のうち、たとえば $kr=0.25\pi$ (同図(a))についてみると、ほぼ円に近い特性を示していることがわかる。ただし、正確には90度方向および270度方向で1となり、0度方向および180度方向では、約0.7となる。これは、観測点 p, q を結ぶ線分(以下、測線と呼ぶ)に対して直交方向に位置する振源については、両観測点での位相差が0

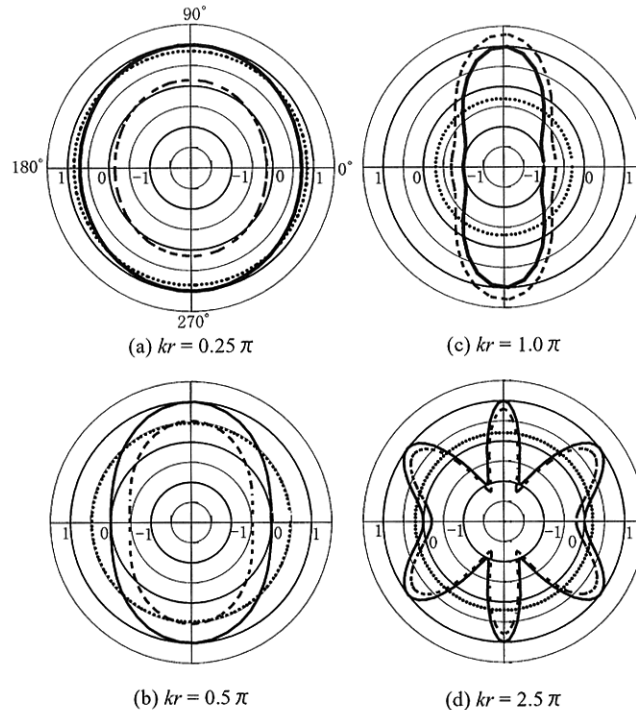


Fig. 2 Directional profiles of the real part of CCF (thick solid lines) calculated for $kr=0.25\pi$, 0.5π , 1.0π and 2.5π . These profiles are called directional properties in text. The Bessel function of the first kind of zero order $J_0(kr)$ (dotted lines) and infinite series with higher-order Bessel functions (broken lines) are also shown in the figure; they are terms of equation (23).

となるため方位特性が1となるのに対し、それ以外の方位にある振源については、観測点間の位相差 $kr \cos \theta$ に応じた値をもつことを意味する。

kr の値による方位特性の変化を概観すると次のような傾向をもつ。 $kr=0.25\pi$ (同図(a)) については前述のとおりほぼ円に近い特性となるが、 $kr=0.5\pi$ (同図(b)) および $kr=1.0\pi$ (同図(c)) では、 kr が大きいほど0度、180度方向の値が小さくなって全体の方位依存性が強まり、方位特性は楕円形となる。 kr の値が π を超えると極端な変化を示し、例えば $kr=2.5\pi$ (同図(d)) のように特異な形状の特性となる。

kr による特性の変化は、図中に併記した J_0 項 (点線) と無限級数項 (破線) の割合によって決定され、特に後者の影響が支配的である。すなわち、 J_0 項は方位依存性が無いため、常に特性が真円になるのに対し (ただし、半径は変化する)、無限級数項は振源方位角 θ によって値が変化する方位依存成分であり、この値の変化が方位特性を大きく支配している。したがって、無限級数項を何らかの方法によって消去・抑制すれば、方位依存性が排除され J_0 項だけを求めることができる。次章では、SPAC法の方位平均の操作が、この無限級数項を抑制する手段のひとつであることを示す。

4. 空間自己相関法への適用

本章では、先に導いた複素コヒーレンス関数の離散定式を空間自己相関法 (SPAC法) に適用し、方位平均の

メカニズムおよび観測点配置の制約について検討した結果を示す。この検討を通じて、これら二つの事項についての新たな解釈が導かれる。なお、SPAC法では複素コヒーレンス関数の実部だけが用いられるため、本章では特に断らない限り「複素コヒーレンス関数」とはその実部をさすものとする。

4.1 方位平均

SPAC法では円形アレーの中心点と円周上の観測点との複数の複素コヒーレンス関数を方位平均した値 (空間自己相関係数) から位相速度の推定が行なわれている。この方位平均の操作によって、観測値に含まれる方位依存成分がキャンセルされると推測されるが、本節では方位平均に伴って方位特性 (円形アレーとしての総合特性) および平均化された複素コヒーレンス関数がどのような挙動を示すのかについて検討した結果を示す。

4.1.1 方位平均と方位特性

通常のSPAC法で用いられる4点円形アレー (中心点および円周上に等間隔配置された3点: 以下、正三角形アレーと呼ぶ) を対象とした場合、中心点を共有する3組の複素コヒーレンス関数の個々の方位特性を用いることで、方位平均に伴う正三角形アレーとしての総合特性を次のように表すことができる。

正三角形アレーの総合特性

$$= \frac{1}{3} \left[\cos(kr \cos \theta) + \cos \left\{ kr \cos \left(\theta - \frac{2}{3} \pi \right) \right\} + \cos \left\{ kr \cos \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) \right\} \right] \quad (27)$$

式中の $\pm 2\pi/3$ で表される項は、個々の方位特性の空間的な位相差を表す。なお無限級数項は前節と同様にして求めた。

Fig. 3は式(27)で表される総合特性を、Fig. 2の kr の値に対応させて示したものである。図から、総合特性(太実線)は $kr=0.25\pi, 0.5\pi$ (同図(a), (b))で円形となり、また、 $kr=1.0\pi$ (同図(c))ではやや凹凸はあるものの、これもほぼ円形の特有性をもつことがわかる。しかしながら $kr=2.5\pi$ (同図(d))では前に示した一組の複素コヒーレンス関数の場合と形状は異なるが、やはり強い方位依存性をもつ。また、 $kr \leq \pi$ の範囲では総合特性は J_0 項(点線)に一致し、無限級数項はほぼ0(破線)となる。

こうした総合特性の性質から、SPAC法における方位平均は、複素コヒーレンス関数の無限級数項を抑制し、観測系のもつ総合特性を円形(半径= J_0 項)として方位依存性を排除する操作であることが明らかである。また、これに伴い総合特性がほぼ円形となる kr の範囲は、 $kr=\pi$ 付近まで拡張されているが、この範囲はSPAC法で空間エリジンクを避けるための目安として利用されている kr の範囲(凌ほか, 1991)に一致する。

4.1.2 空間自己相関係数の算出例

前項では、SPAC法における方位平均の意味を複素コヒーレンス関数の方位特性によって説明したが、ここでは直接的に複素コヒーレンス関数の代数演算によって(すなわち空間自己相関係数を求めて)方位平均操作の数学的な意味を考察した結果を示す。

この演算に必要な振源と観測点との関係はFig. 4のとおりとし、観測点P0(中心点)およびP1で構成される測線P0-P1を振源方位角0度とする。方位基準点はP0である。中心点P0と円周上の各観測点P1~P3との間の複素コヒーレンス関数は、式(25)を用いて次のように表される。

$$\text{Re}(\gamma_{01}) = J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n J_{2n}(kr) \times \left\{ \sum_{l=1}^L \lambda_{01l} \cos 2n\theta_l \right\} \right] \quad (28)$$

$$\text{Re}(\gamma_{02}) = J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n J_{2n}(kr) \times \left\{ \sum_{l=1}^L \lambda_{02l} \cos 2n \left(\theta_l - \frac{2}{3} \pi \right) \right\} \right] \quad (29)$$

$$\text{Re}(\gamma_{03}) = J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n J_{2n}(kr) \times \left\{ \sum_{l=1}^L \lambda_{03l} \cos 2n \left(\theta_l + \frac{2}{3} \pi \right) \right\} \right] \quad (30)$$

また、式(20)の関係は円周上のすべての観測点について成立するため、

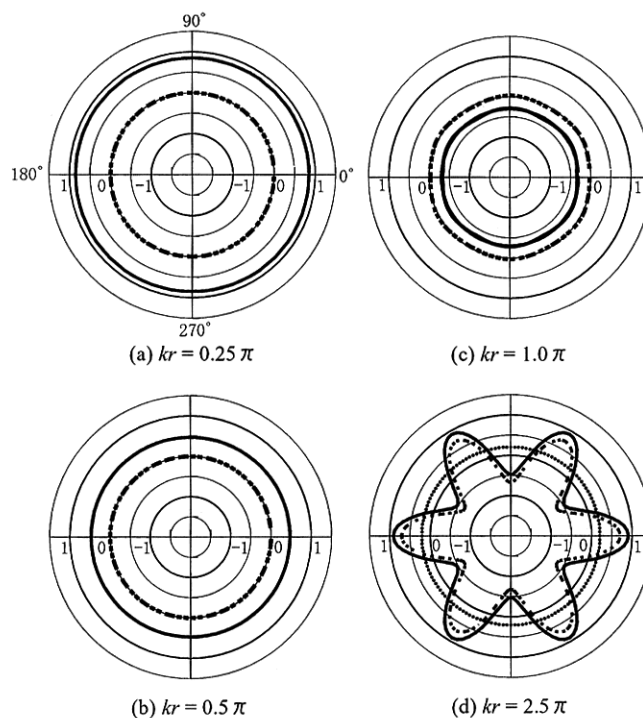


Fig. 3 Directional profiles of the averaged values of real part of CCFs for a usual four-point circular array shown in Fig. 4. The condition of calculations and the line types are the same as Fig. 2.

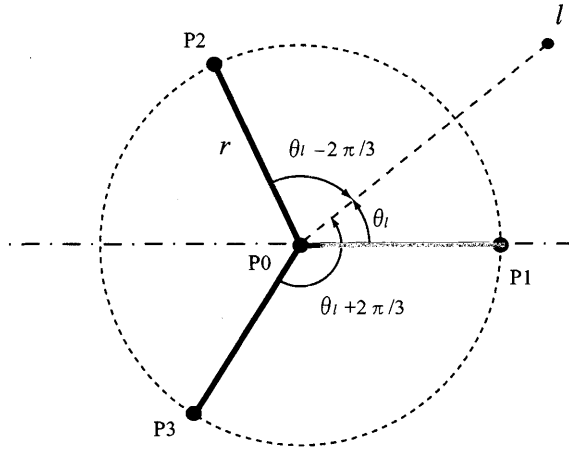


Fig. 4 A four-point circular array used to calculate spatial autocorrelation coefficients using real part of CCFs.

$$\lambda_{01l} = \lambda_{02l} = \lambda_{03l} = \lambda_l$$

と置くことができる。これを、式(28)～(30)に代入して次式が得られる。

$$\begin{aligned} \text{Re}(\gamma_{01}) = & J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n J_{2n}(kr) \right. \\ & \left. \times \left\{ \sum_{l=1}^L \lambda_l \cos 2n\theta_l \right\} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \text{Re}(\gamma_{02}) = & J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n J_{2n}(kr) \right. \\ & \left. \times \left\{ \sum_{l=1}^L \lambda_l \cos 2n \left(\theta_l - \frac{2}{3} \pi \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \text{Re}(\gamma_{03}) = & J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n J_{2n}(kr) \right. \\ & \left. \times \left\{ \sum_{l=1}^L \lambda_l \cos 2n \left(\theta_l + \frac{2}{3} \pi \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (33)$$

そこで、空間自己相関係数を ρ と表記すると、これは式(31)～(33)を用いて方位平均（実際の演算は算術平均）を行うことによって、次のように表される。

$$\begin{aligned} \rho = & \frac{\text{Re}(\gamma_{01}) + \text{Re}(\gamma_{02}) + \text{Re}(\gamma_{03})}{3} \\ = & J_0(kr) + \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(kr) \sum_{l=1}^L \left[\lambda_l \cos(2n\theta_l) \right. \\ & \left. \times \left\{ 1 + 2 \cos \left(2n \frac{2}{3} \pi \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

式(34)から、複素コヒーレンス関数の方位平均は、無限級数項の変形のみ操作であることが明らかである。さらに、この無限級数項は式(34)の中括弧内の n が3の倍数のときだけ値3をもち、それ以外では0となるため、最終的に ρ は次のような簡単な形で表すことができる。

$$\rho = J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{3n} J_{6n}(kr) \left\{ \sum_{l=1}^L \lambda_l \cos(6n\theta_l) \right\} \right] \quad (35)$$

この変形は、後の一般化の議論に示すとおり無限級数項の値を抑制するように作用し、その結果 ρ は J_0 項に近似されることになる。なお、式(35)は岡田(2001)によってSPAC法の従来の定式から導かれた誤差項と一致する結果を表している。

4.1.3 方位平均のメカニズム

ここでは、前項に示した方位平均の数学的表現をもとに、方位平均のメカニズムを一般化して整理した結果について述べる。円周上に等間隔で任意の数の観測点を設けた場合の、複素コヒーレンス関数および空間自己相関係数 ρ は、以下の式(36)～(39)のように表すことができる。ただし、式の見通しをよくするため無限級数項については J_4 項までを展開した形で示す。観測点数の偶数・奇数で式が異なるのは、円の直径にあたる直線上に観測点が配置される（偶数の場合）か否かの違いによるものである。

【円周上観測点 $2s$ 個 ($s=2,3,4,\dots$)】

- 中心点と n 番目 ($n=1, 2, 3, \dots$) の観測点との複素コヒーレンス関数

$$\begin{aligned} \text{Re}(\gamma_{0n}) = & J_0(kr) - 2J_2(kr) \left[\sum_{l=1}^L \lambda_l \right. \\ & \left. \times \cos 2 \left\{ \theta_l + \frac{\pi}{s}(n-1) \right\} \right] + 2J_4(kr) \\ & \times \left[\sum_{l=1}^L \lambda_l \cos 4 \left\{ \theta_l + \frac{\pi}{s}(n-1) \right\} \right] \dots \end{aligned} \quad (36)$$

- 空間自己相関係数

$$\begin{aligned} \rho = & J_0(kr) - 2J_2(kr) \left\{ \frac{\sum_{i=1}^s \cos 2 \left(\frac{\pi}{s} i \right)}{s} \right\} \sum_{l=1}^L \lambda_l \cos 2\theta_l \\ & + 2J_4(kr) \left\{ \frac{\sum_{i=1}^s \cos 4 \left(\frac{\pi}{s} i \right)}{s} \right\} \sum_{l=1}^L \lambda_l \cos 4\theta_l - \dots \end{aligned} \quad (37)$$

【円周上観測点 $2s-1$ 個 ($s=2, 3, 4, \dots$)】

- 中心点と n 番目 ($n=1, 2, 3, \dots$) の観測点との複素コヒーレンス関数

$$\begin{aligned} \text{Re}(\gamma_{0n}) = & J_0(kr) - 2J_2(kr) \left[\sum_{l=1}^L \lambda_l \right. \\ & \left. \times \cos 2 \left\{ \theta_l + \frac{2\pi}{2s-1}(n-1) \right\} \right] + 2J_4(kr) \\ & \times \left[\sum_{l=1}^L \lambda_l \cos 4 \left\{ \theta_l + \frac{2\pi}{2s-1}(n-1) \right\} \right] - \dots \end{aligned} \quad (38)$$

• 空間自己相関係数

$$\begin{aligned} \rho = & J_0(kr) - 2J_2(kr) \left\{ \frac{1 + 2 \sum_{i=1}^{s-1} \cos 2 \left(\frac{2\pi}{2s-1} i \right)}{2s-1} \right\} \\ & \times \sum_{l=1}^L \lambda_l \cos 2\theta_l + 2J_4(kr) \\ & \times \left\{ \frac{1 + 2 \sum_{i=1}^{s-1} \cos 4 \left(\frac{2\pi}{2s-1} i \right)}{2s-1} \right\} \sum_{l=1}^L \lambda_l \cos 4\theta_l - \dots \end{aligned} \quad (39)$$

式(37), (39)から, 方位平均により2次以上のベッセル関数項に測線の構成角をパラメータとして含む係数(式中の中括弧)が乗じられることがわかる。なお, ここで測線の構成角とは, 円周上で隣接する2つの観測点と中心点とで構成される扇形の中心角であり, 2π を円周上観測点の数で割った角度に相当する。また, この測線構成角は, 複素コヒーレンス関数の空間的な位相差に対応し, 2次以上のベッセル関数に乗じられた係数は, この位相差に由来する項が括り出されたものである。

たとえば, 正三角形アレーの場合(測線構成角 $2\pi/3$)には, 式(39)を用いて ρ を次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \rho = & J_0(kr) - 2J_2(kr) \left\{ \frac{1 + 2 \cos 2 \left(\frac{2\pi}{3} \right)}{3} \right\} \sum_{l=1}^L \lambda_l \cos 2\theta_l \\ & + 2J_4(kr) \left\{ \frac{1 + 2 \cos 4 \left(\frac{2\pi}{3} \right)}{3} \right\} \sum_{l=1}^L \lambda_l \cos 4\theta_l - \dots \end{aligned}$$

この式の右辺で, J_2 項および J_4 項に乗じられた係数の値は両者とも0である。また, より高次の項については式として表していないが, 6の倍数次のベッセル関数(J_6 項, J_{12} 項など)を含む項だけが残り, それ以外の項は係数の作用によってすべて消去されている。さらに6の倍数次のベッセル関数は, たとえば $kr \leq \pi$ の範囲では, J_0 項と比べて無視しうる微量であるため, 正三角形アレーの ρ の値は, この範囲で $J_0(kr)$ として近似することができる。

したがって, SPAC法の方位平均は, 測線構成角(複素コヒーレンス関数の空間的な位相差)に由来する係数により各測線の無限級数項を互いに相殺し, 方位依存成分を抑制することで方位平均値を $J_0(kr)$ に近似するというメカニズムをもつことがわかる。このように, 測線の構成角は, 空間自己相関係数の算出過程で決定的な役割を担い, 方位平均のメカニズムの核をなすものと考えられることができる。

4.2 観測点配置の制約

SPAC法を用いた地下構造調査における問題点とし

て, 観測点配置の制約(円周上観測点の等間隔配置)があげられるが, これは一般に方位平均を行う際の方位積分の離散化に由来するものと考えられている。一方, 前節で明らかにされた方位平均のメカニズムは, 観測点配置と密接に関連している。すなわち, このメカニズムを用いて方位平均値を $J_0(kr)$ に近似させるためには, 無限級数項に乗じられる係数を0とする測線構成角で観測点を配置しなければならない。そこで, 観測点配置の制約について次に示す検討を行った。

ここでは議論を簡単にするために, 円周上に少数の観測点(3点および5点)を配置した場合について, 方位平均の過程でどのような測線構成角の組み合わせが J_2 項および J_4 項を消去するのかを調べた結果を示す。すなわち, 前節の計算手順(測線構成角から方位平均値を求める)に対する逆解析(方位平均値を $J_0(kr)$ に近似できる測線構成角を求める)の結果である。

ベッセル関数の各項に乗じられる係数は式(39)から, 次のように表すことができる。

$$3 \text{ 点配置 } J_2 \text{ 項: } (1 + 2 \cos 2\alpha)/3,$$

$$J_4 \text{ 項: } (1 + 2 \cos 4\alpha)/3$$

$$5 \text{ 点配置 } J_2 \text{ 項: } (1 + 2 \cos 2\alpha + 2 \cos 2\beta)/5,$$

$$J_4 \text{ 項: } (1 + 2 \cos 4\alpha + 2 \cos 4\beta)/5$$

5点配置は3点配置よりも測線が増えるため, 測線構成角は α, β の2つの角度によって表され, 組み合わせの数は多くなる。なお, 各係数は離散的配置に起因するとみられる明瞭な規則性を有している。

Fig. 5は, 各観測点数について J_2 項および J_4 項を同時に0とする角度を数値計算によって求め, その観測点配置を示したものである。両観測点数とも円形アレーに対応する配置の他に半円形アレーに対応する配置が含まれており, さらに5点配置については, 角度についての組み合わせが多いため Fig. 5(e), (f)の不等間隔配置も算出されていることがわかる。これらの配置は, 場の等質性を仮定した平行移動によって従来の円周上の等間隔配置からも導くことも可能であるが, 複素コヒーレンス関数の離散定式を用いることにより, 直接算出することができる。全体に共通することは円または半円を円周上の観測点数で等分割した角度を基本とする配置になっていることであり, たとえば不等間隔配置として得られた Fig. 5(e), (f)の配置であっても, 角度は半円を5等分した $\pi/5$ および円を5等分した $2\pi/5$ やその和 $3\pi/5$ の組み合わせになっている。

以上の結果は, SPAC法では不等間隔配置を含むある限定された観測点配置によってのみ, 方位平均の値を $J_0(kr)$ に近似できることを表している。つまり, SPAC法の配置の制約は, 単に従来の定式に含まれる積分表現の離散化(等間隔化)に由来するものではなく, むしろSPAC法自体が(内包される方位平均のメカニズムが)観測点の配置を制約しているものと考えられる。これ

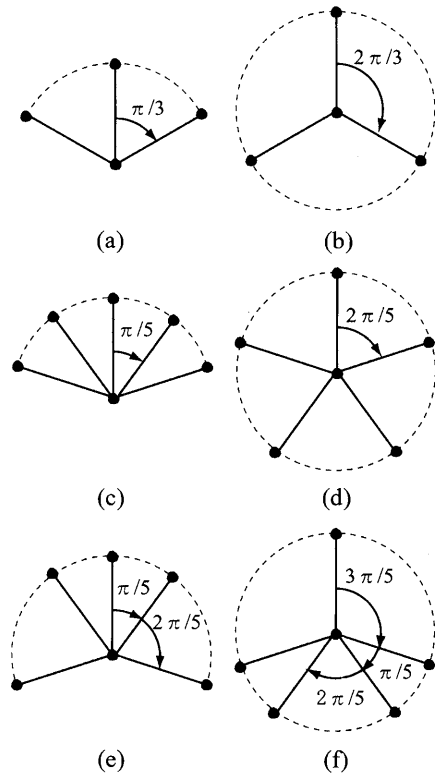


Fig. 5 Various circular arrays consisting of 3 or 5 sensors on a circle and one at the center. They were obtained from the results of simple inverse analysis to find the optimal azimuthal intervals between sensors on a circle under the condition that the value of infinite series in equation (23) is equal to zero.

は、別の見方をすると SPAC 法の方位平均のメカニズムとは異なる方法で J_0 項を算出することができれば、観測点配置の制約を緩和・解消しうる可能性があることを示唆している。

5. まとめ

円周観測点配置に高い任意性をもつ円形アレー解析法の構築を視野に入れて、任意の離散的配置を数学的に表現するための複素コヒーレンス関数の定式を提案した。この離散定式は、将来的に振源および伝搬過程を含む微動観測場の把握を考慮して、Lamb の問題の解析解を援用して導かれている。

本稿では、はじめに離散定式の導出過程を示し、その定式を用いて振源方位と複素コヒーレンス関数との関係を詳細に述べた。次に、その結果を用いて、SPAC 法の位相速度検出における方位平均のメカニズムを詳しく検討し、円周点等間隔配置の本質的な原因について新たな解釈をした結果を述べた。その要約は以下の通りである。

(1) 2 地点間 (一組) の複素コヒーレンス関数の実部は、SPAC 法で空間自己相関係数の近似に用いられる第 1 種 0 次ベッセル関数項 ($J_0(kr)$) ; kr は波数と半径の積

および振源の方位角を含む無限級数項の和として表現される。この実部は振源の方位と kr によって値が変化し、その変化の仕方は定式中の無限級数項で表される方位依存成分に支配されている。

(2) 円周上の観測点を等間隔に配置する SPAC 法において、空間自己相関係数を求める際の方位平均 (複数の複素コヒーレンス関数実部の算術平均) は、複素コヒーレンス関数に含まれる方位依存成分を抑制する操作と解釈される。すなわち、本定式では、SPAC 法のアレー観測から空間的な位相差をもつ複数の複素コヒーレンス関数が得られることになり、方位平均の過程で、この位相差的作用により互いの方位依存成分が相殺され、方位平均値が $J_0(kr)$ に近似される。

(3) 方位平均の過程を逆解析した結果によれば、方位依存成分を相殺し方位平均値を $J_0(kr)$ に近似できるのは、不等間隔配置を含むある特定の配置に限定される。したがって、こうした配置の制限は単に従来の定式に含まれる積分表現の離散化 (等間隔化) に由来するものではなく、本稿に示した SPAC 法の方位平均のメカニズムに原因があると考えられる。

本稿の検討結果のうち、SPAC 法の円周点配置が方位平均のメカニズムによって制限されるとの結論は、方位平均を用いずに $J_0(kr)$ を算出する位相速度検出法の可能性を示すものである。この新しい検出法については稿を改めて報告する。

謝 辞

本研究をまとめるにあたり、北海道大学名誉教授 岡田廣博士ならびに東北大学助教授 浅沼宏博士から貴重なご教示・ご助言をいただきました。また、査読者の方々には懇切なご助言をいただき、本稿の改善を図ることができました。ここに記して謝意を表します。

参 考 文 献

Aki, K. (1957) : Space and time spectra of stationary stochastic waves, with special reference to microtremors, *Bull. Earthq. Res. Inst.*, **35**, 415-457.
 Arai, H. and Tokimatsu, K. (2004) : S-wave velocity profiling by inversion of microtremor H/V spectrum, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **94**, 53-63.
 芦谷公稔・吉岡 修・横山秀史 (1999) : 周波数-波数スペクトルの逆解析による複数モードの位相速度推定と鉄道振動への応用, *物理探査*, **52**, 214-226.
 Bendat, J. S. and Piersol, A. G. (1971) : Random data : Analysis and measurement procedures. John Wiley & Sons, Inc., 328-329.
 長 郁夫・篠崎祐三 (2003) : 微動を用いた構造決定のための円形アレイデータ解析に関する理論的研究, *物理探査*, **56**, 29-42.
 Harkrider, D. G. (1964) : Surface waves in multilayered elastic media, part I, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **54**, No. 2, 627-679.
 Henstridge, J. D. (1979) : A signal processing method for circular arrays, *Geophysics*, **44**, 179-184.
 堀家正則 (1980) : 微動の位相速度及び伝達関数の推定, *地震*

2, 33, 425-442.

紺野克昭 (2000): 地下構造推定に用いる2点間および3点間空間自己相関法に関する理論的検討, 土木学会論文集, No. 654/I-52, 367-375.

凌 魁群・松島 健・岡田 廣 (1991): 微動探査法(6)一空間自己相関法の有効周波数領域の推定について, 物理探査学会第85回学術講演会論文集, 261-263.

———・岡田 廣 (1994): 微動中の表面波検出法としての空間自己相関法の任意アレイへの応用, 物理探査学会第91回学術講演会論文集, 272-275.

岡田 廣・松島 健・森谷武男・笹谷 努 (1990): 広域・深層地盤調査のための長周期微動探査法, 物理探査, 43, 402-417.

——— (2001): 微動アレー観測のための空間自己相関法における効率的な観測点個数に関する考察, 物理探査学会第104回学術講演会講演論文集, 26-30.

———・松岡達郎・白石英孝・八戸昭一 (2003): 微動アレー探査のための空間自己相関法: 半円形アレーの適用について, 物理探査学会第109回学術講演会論文集, 183-186.

齋藤正徳・桃沢宏之 (1993): 成層構造に対する反射率, 表面波分散曲線の計算 II. レーリー波の計算, 物理探査, 46, 283-298.

Tokimatsu, K., Tamura, S. and Kojima, H. (1992): Effects of multiple modes on Rayleigh wave dispersion characteristics, *J. Geotech. Eng. ASCE*, 118, 1529-1543.

山本英和・岩本鋼司・斎藤徳美・吉田 篤 (1997a): 空間自己相関法の円形アレイにおける地震計配置の検討, 物理探査学会第96回学術講演会論文集, 444-447.

———・岩本鋼司・斎藤徳美・立花政宜 (1997b): 空間自己相関法の任意アレイへの適用可能性, 物理探査学会第96回学術講演会論文集, 448-452.

付録 定常性の条件の導出

ここでは, 本文中に示した定常性の条件 (式(14), (15)) の導出過程を示す。これは, 観測点 p (方位基準点) のパワースペクトルを用いて観測点 q のパワースペクトル及び観測点 p, q のクロススペクトルを近似することにより導かれるものである。

近似にあたっては, 本文第2章に示した仮定1 (振源は観測点から十分遠方にある) を用いる。

(1) パワースペクトル

観測点 p, q での振源 l に由来する成分のパワースペクトル C_{pl}^2, C_{ql}^2 は, 式(3), (4), (6), (7)により, 以下のように表される。

$$C_{pl}^2 = 2\pi f^2 A^2 F_l^2 \frac{1}{k} \frac{1}{r_{pl}} \exp(-2hkr_{pl}) \quad (A1)$$

$$C_{ql}^2 = 2\pi f^2 A^2 F_l^2 \frac{1}{k} \frac{1}{r_{ql}} \exp(-2hkr_{ql}) \quad (A2)$$

式(A2)に式(13)の関係を代入すると,

$$C_{ql}^2 = 2\pi f^2 A^2 F_l^2 \frac{1}{k} \frac{1}{r_{pl} - r \cos \theta_l} \times \exp\{-2hk(r_{pl} - r \cos \theta_l)\} \quad (A3)$$

が得られる。ここで, 式(A3)中の項 $(r_{pl} - r \cos \theta_l)$ については, 仮定1から $r \ll r_{pl}$ とみなすことができるため次の近似が成り立つ。

$$r_{pl} - r \cos \theta_l = r_{pl} \left(1 - \frac{r}{r_{pl}} \cos \theta_l\right) \approx r_{pl}$$

これを式(A3)に代入すると, 次式が得られる。

$$C_{ql}^2 \approx 2\pi f^2 A^2 F_l^2 \frac{1}{k} \frac{1}{r_{pl}} \exp(-2hkr_{pl})$$

この式の右辺は式(A1)に等しい。したがって,

$$C_{ql}^2 \approx C_{pl}^2 \quad (14)$$

という関係が成立する。

(2) クロススペクトル

観測点 p, q 間の振源 l に由来する成分のクロススペクトルは, 式(3), (4), (8)から

$$\begin{aligned} & C_{pl} C_{ql} \exp\{-jk(r_{pl} - r_{ql})\} \\ &= 2\pi f^2 A^2 F_l^2 \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{r_{pl} r_{ql}}} \exp\{-hk(r_{pl} + r_{ql})\} \\ & \quad \times \exp\{-jk(r_{pl} - r_{ql})\} \end{aligned} \quad (A4)$$

と表わされる。式(A4)に含まれる項に式(13)の関係を代入し, 仮定1 ($r \ll r_{pl}$) を用いてテイラー近似を行うと, 次の関係が導かれる。

$$\begin{aligned} r_{pl} + r_{ql} &= 2r_{pl} - r \cos \theta_l = 2r_{pl} \left(1 - \frac{r}{2r_{pl}} \cos \theta_l\right) \approx 2r_{pl} \\ \frac{1}{\sqrt{r_{pl} r_{ql}}} &= \frac{1}{r_{pl}} \left\{1 - \frac{r}{r_{pl}} \cos \theta_l\right\}^{-1/2} \\ &\approx \frac{1}{r_{pl}} \left\{1 + \frac{r}{2r_{pl}} \cos \theta_l\right\} \approx \frac{1}{r_{pl}} \end{aligned}$$

これと式(13)を式(A4)に代入すると, 次式が得られる。

$$\begin{aligned} & C_{pl} C_{ql} \exp(-jkr \cos \theta_l) \\ &= 2\pi f^2 A^2 F_l^2 \frac{1}{k} \frac{1}{r_{pl}} \exp(-2hkr_{pl}) \\ & \quad \times \exp(-jkr \cos \theta_l) \end{aligned}$$

この式に, 式(A1)を代入すると,

$$C_{pl} C_{ql} \exp(-jkr \cos \theta_l) \approx C_{pl}^2 \exp(-jkr \cos \theta_l)$$

と表わされる。したがって次の関係が成立する。

$$C_{pl} C_{ql} \approx C_{pl}^2 \quad (15)$$