

流体飽和多孔質媒質における骨格硬度の低下に伴う Biot 波特性の変化

狐崎 長 琅*

Variation of Biot wave properties in fluid-saturated porous media with decrease of skeleton-stiffness

Choro Kitsunezaki*

ABSTRACT

In this paper, various characteristics of the Biot waves in fluid-saturated porous media are examined numerically and analytically based on the relations in the previous paper (Kitsunezaki, 2004a), whose notation is also kept here. The Biot waves mean elastic waves in the Biot theory (Biot, 1956), which consist of two longitudinal waves (I- and II-waves) and a transverse wave. The main aim of this study is to reveal general variation tendency of characteristics of the longitudinal waves in wide range of sediments, typically from consolidated stiff sandstone to unconsolidated loose sand, mainly in connection with variation of skeleton-stiffness, which is represented by the velocity ratio in P-wave of skeleton to sound wave in fluid, V_{pb}/V_f . In the wave characteristics, special attention is paid to displacement ratios and stress ratios in fluid to solid, as well as velocities and attenuation (logarithmic decrements). The both ratios are key factors to understand propagation mechanism of the two longitudinal waves. Main points of this study are as follows. First, general feature of the above properties is viewed as functions of frequency and skeleton-stiffness. The frequency characteristics are examined for typical two models of media with hard and soft skeletons. The properties in the low and high frequency limits are remarked to examine the effects of skeleton-stiffness. Second, approximate expressions of the characteristics are derived for media with very low skeleton-stiffness ($V_{pb}/V_f \ll 1$), which almost corresponds to loose alluvial sand, in order to clarify factors controlling wave properties. Third, dynamic process in the media with very low skeleton-stiffness is analyzed. Then the results are represented as schematic models of stress-strain relations which demonstrate clearly the contrastive properties of I- and II-waves. In all examinations mentioned above, such a reciprocal relation between the two longitudinal waves is remarked as a useful general law, that the displacement ratio of I-wave in fluid/solid is equal to the opposite value of stress ratio of II-wave in solid/fluid, where I and II are mutually exchangeable.

Key words: Biot theory, porous media, longitudinal waves, reciprocal relation, dynamic compatibility

1. はじめに

1.1 背景と目的

本論文では, Biot (1956) の第 I 種縦波を I 波, 第 II 種縦波を II 波と略記する。筆者は, 前論文 (狐崎, 2004a, b) で, これら I, II 両波の性質について論じた。そこでなお十分論及しえなかった所を, ここでとり

あげる。本論文の関心事は主として次の 2 点である。

固体物質 (粒子) 自体は十分硬質であっても, その結合や接触で構成される骨格の状態は, 弾性的に硬から軟まで, 実に多様である。それは, 典型的には, 堅硬な砂岩から未固結の軟弱砂までに相当する。このような骨格硬度の低下によって, 両波の特性がどのように変化するのか, これが関心の第 1 点である。

2005年2月16日原稿受付; 2005年6月28日受理
物理探査学会第110回学術講演会で一部を発表

* 秋田大学 (名誉教授)
(自宅) 〒010-0851 秋田市手形字オノ浜31-5

Manuscript received February 16, 2005; Accepted June 28, 2005.

A part of this paper was presented at the 110th SEGJ Conference, 2004.

* Akita University (Emeritus professor).
(Home) 31-5 Sainohama, Tegata, Akita 010-0851, Japan.

Biot 波についての論述は多いが、通常着目されるのは、速度、そして減衰である。固体、流体それぞれの、変位や応力の特性にまで深く立ち入ることは、むしろまれである。おそらく、それらを区分した検出が容易でないためであろう。しかし、波動の機構について理解を深めようとするときは、当然固体-流体間の変位比や応力比に引き合わざるを得ない。本論文では速度・減衰だけでなく、よりむしろ変位比や応力比に着目する。これが関心の第2点である。

軟質層は地殻表層の多くを占める。それに関わる物理探査領域も、海底資源から土木、防災まで当然広範である。上記関心の第1点は、それらの理論的基礎に関わる。

波動特性を新しい応用領域へとつなげようとする時、波動機構についての踏み込んだ理解が必要となる。地震波-電気現象（弾性波と界面動電現象との結合）もその例である。この現象によってII波を検出し、透水率検層を目指す試みもある（小林・他，2005）。上記関心の第2点は、この種の研究への寄与も意図している。

本論文の前提について記す。ここでの多孔質媒質は単一固体物質と単一流体物質からなる2相系で、孔隙は流体で飽和し、巨視的には均質等方である、とする。数値的な議論の場合、孔隙流体は水で、固体（粒子）は石英程度の硬質の単一鉱物であるとする。骨格硬度の指標としては、骨格の体積弾性率 k_b や P 波速度 V_{pb} を用いる。それらの低下を骨格の軟化と呼ぶ。また、その概念的な大小を硬質、軟質と言ひ、それぞれの媒質を硬質層、軟質層とも呼ぶ。本論文では、単に速度、あるいは伝播速度といえ、通常通り位相速度を意味する。本論文では、前論文（狐崎，2004a）での諸関係式に基いて、論述する。

1.2 本論文の論理構成

まず2では、後で利用する基本的な諸関係を、記号の説明も兼ねて概説する。

3では、まず典型的な硬質層と軟質層各一例について、I, II両波の速度、減衰、変位比、応力比等を周波数の関数として概観する。

次に、硬質から極軟質の広領域において、諸特性がどのように変化するかを検討する。着目するのは、周波数軸上の高低両極限つまり、高周波極限值と低周波極限值である。これらの両端を押さえれば、中間周波数域の傾向は内挿的におのずと推察できる。そこで、高周波極限と低周波極限の諸特性を、骨格のP波速度 V_{pb} の関数として図で表現する。

その数値計算図では若干の特徴的な性質が見出される。まず、「I, II両波間で、流体対固体の、変位比と応力比とについて特有な関係（相反性）が認められる。また、ある媒質条件においてはI波は、周波数に依らず「固体変位=流体変位」となる「動的同調」状態を呈する。

I, II両波の諸特性は、 V_{pb} の低下につれ、 $V_{pb} \rightarrow 0$ の軟質極限状態へと単調に漸近する。その極限特性の把握は、軟質層の全般特徴を理解する上での鍵となる。実際的にも沖積層程度の未固結層では、軟質極限（極軟骨格）状態として諸特性を近似できる。

そこで、極軟骨格における諸特性の関係式を導き、固体、流体間の変位の一般的な関係を引き出す。これらが4での課題である。4では、諸特性の近似表現式の導出に力を注ぐ。それは主要な支配的因子を簡潔に明示し、背後機構を見透かしやすくするためである。

5では、条件をやや単純化して力学過程の基本を解明し、諸要素の関連をモデル図に表す。これに4の知見も取り込み、各波の波動機構の特徴を視覚的に捉える。

最後に6で、得られた知見の要点を取りまとめる。

2. 基本的な諸関係、前提と記号

2.1 応力、歪み、変位等の関係

(1) まず、狐崎（2004a）にもとづいて、以後多用される諸関係式を簡潔に列記し、あわせて記号の説明もする。詳しくは、狐崎（2004a）を参照してほしい。狐崎（2004a）の式番号は、[] の形で適宜付記する。

これまでと同様、 x 軸方向に伝わる平面波を前提とする。固体物質に働く x 方向の張力 p_x 、流体物質に働く圧力 p 、孔隙率 ϕ などを用いて、固体部（骨格）と流体部（流体網）に働く応力（ σ_x と s ）を定義する：

$$\sigma_x \equiv (1-\phi)p_x, \quad s \equiv -\phi p \quad [21a, b] (1)$$

固体、流体の x 方向変位を u, U とし、それぞれの x 方向歪み（のび）を ϵ_x, ϵ_x とする：

$$\epsilon_x \equiv \partial u / \partial x, \quad \epsilon_x \equiv \partial U / \partial x \quad (2)$$

応力-歪み関係式は、一般に次の形をとる（[20]式）。

$$\sigma_x = P\epsilon_x + Q\epsilon_x, \quad s = Q\epsilon_x + R\epsilon_x \quad (3)$$

応力、歪み、変位、粒子速度等はすべて下記様式の複素関数で表されものとする。例えば粒子速度については

$$\partial u / \partial t = \Phi \exp [\#], \quad \partial U / \partial t = \Psi \exp [\#] \quad (4a)$$

$$\text{ただし, } \# \equiv i\omega(t-x/v); \quad (4b)$$

$$t = \text{時間}, f = \text{周波数}, \omega = 2\pi f, v = \text{複素速度}, i = \sqrt{-1}$$

したがって

$$U/u = (\partial U / \partial t) / (\partial u / \partial t) = \Psi / \Phi \quad (4c)$$

変位振幅比を狐崎（2004a）では Ψ / Φ と記したが、ここでは狐崎（2004b）と同様、直接 U/u で表す。

Biot の弾性係数 P, Q, R に対応する無次元化弾性係数 $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ を次式で定義する。

$$\sigma_{11} = P/H, \quad \sigma_{12} = Q/H, \quad \sigma_{22} = R/H; \quad (5a)$$

$$H \equiv P + 2Q + R, \quad \sigma_{11} + 2\sigma_{12} + \sigma_{22} = 1 \quad (5b)$$

(2) 応力比 s/σ_x や変位比 U/u は次式で与えられる。 $j = I, II$ は I 波と II 波を意味する。

$$\left[\frac{s}{\sigma_x} \right]_j = \frac{\sigma_{12} + \sigma_{22}[\varepsilon_x/\varepsilon_x]_j}{\sigma_{11} + \sigma_{12}[\varepsilon_x/\varepsilon_x]_j} = \frac{\sigma_{12} + \sigma_{22}[U/u]_j}{\sigma_{11} + \sigma_{12}[U/u]_j} \quad (6)$$

$$\left[\frac{U}{u} \right]_j = -\frac{\sigma_{11}z_j - \gamma_{11} + i\phi^2\omega_c/\omega}{\sigma_{12}z_j - \gamma_{12} - i\phi^2\omega_c/\omega} \quad [34e] (7)$$

(7) 式は (3) 第 1 式を後記の (9a) 式と連結することで導かれる。ここで、

$$z_j \equiv V_c^2/v_j^2; \quad V_c^2 \equiv H/\rho, \quad [28a] (8a)$$

$$\omega_c \equiv b/\rho\phi^2 = 8\eta/\phi a^2; \quad [38a] (8b)$$

b = 粘性結合係数, η = 流体の粘性係数, a = 孔隙半径

(5) 式の Biot の弾性係数は固体物質, 流体物質, 骨格等の弾性係数や ϕ で表される。その具体的内容は 2.4 に記す。密度関連量 γ_{11} 等の定義は 2.2 に記す。

2.2 運動方程式

(4) 式類似の様式による u や U を前提とすると, 運動方程式 ([24a, b]) は一般に次式で表せる。

$$-(i\omega/v)\sigma_x = (i\omega)^2(\rho_{11}u + \rho_{12}U) + i\omega b(u - U) \quad (9a)$$

$$-(i\omega/v)s = (i\omega)^2(\rho_{12}u + \rho_{22}U) - i\omega b(u - U) \quad (9b)$$

この式に関わる密度関連量の定義を示す：

ρ_s = 固体物質の密度, ρ_f = 流体物質の密度

$-\rho_{12} = \rho_a$ = 質量結合係数, m = 孔隙係数

$$m \equiv -\rho_{12}/\rho_2 > 0 \quad (10)$$

$$\rho_1 = (1-\phi)\rho_s, \quad \rho_2 = \phi\rho_f, \quad \rho_1 + \rho_2 = \rho \quad (11a)$$

$$\rho_{11} = \rho_1 - \rho_{12}, \quad \rho_{22} = \rho_2 - \rho_{12} \quad (11b)$$

以後用いられる派生的パラメータも列記しておく。

$$\gamma_1 \equiv \rho_1/\rho, \quad \gamma_2 \equiv \rho_2/\rho, \quad \gamma_{12} \equiv \rho_{12}/\rho < 0 \quad (12a)$$

$$\gamma_{11} \equiv \rho_{11}/\rho = \gamma_1 - \gamma_{12}, \quad \gamma_{22} \equiv \rho_{22}/\rho = \gamma_2 - \gamma_{12} \quad (12b)$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_{11} + 2\gamma_{12} + \gamma_{22} = 1 \quad (12c)$$

以後の便宜に備え, 密度や弾性に関わる別様式のパラメータについても, 列記しておく：

$$\gamma_f \equiv \rho_f/\rho = \gamma_2/\phi \quad (13a)$$

$$\gamma_c \equiv \rho_c/\rho = \gamma_{22}/\phi^2; \quad \rho_c \equiv \rho_{22}/\phi^2 \quad (13b)$$

$$\sigma_L \equiv L/H = \sigma_{22}/\phi^2; \quad L = R/\phi^2 \quad (13c)$$

$$\sigma_n \equiv nL/H = (\sigma_{12} + \sigma_{22})/\phi; \quad nL = (Q+R)/\phi \quad (13d)$$

2.3 位相速度と減衰

z_j は次の 2 次方程式で与えられる：

$$a_1^2 z_j^2 - a_2 z_j + 1 = 0; \quad [29a] (14a)$$

$$a_1^2 \equiv (\sigma_L - \sigma_n^2)/B \quad [29b] (14b)$$

$$a_2 \equiv (\gamma_c + \sigma_L - 2\sigma_n\gamma_f - i\omega_c/\omega)/B \quad [29c] (14c)$$

$$B \equiv \gamma_c - \gamma_f^2 - i\omega_c/\omega \quad (14d)$$

因みに (14) 式は, U/u についての 1 対の式 ((7) 式と狐崎 (2005a) の (6b) 式) から U/u を消去すると, 導かれる。

(14a) 式の解を下記の (15) 式に記す。その $z_j (j = I, II)$ を用いて, 位相速度と減衰係数は (16a, b) 式のごとく与えられる。

$$\left. \begin{matrix} z_I \\ z_{II} \end{matrix} \right\} = \frac{a_2}{2a_1^2} \left\{ 1 \mp \left[1 - \frac{4a_1^2}{a_2^2} \right]^{1/2} \right\} \quad [30] (15)$$

$$\text{位相速度: } V_j = V_c / \text{Re}(\sqrt{z_j}) \quad [31c] (16a)$$

$$\text{減衰係数: } \beta_j = -\omega \text{Im}(\sqrt{z_j}) / V_c \quad [31d] (16b)$$

$$\text{対数減衰率: } [\beta A]_j = -2\pi \text{Im}(\sqrt{z}) / \text{Re}(\sqrt{z}) \quad (16c)$$

以後単に減衰という場合は, 対数減衰率を意味する。ここで, $A_j (= 2\pi V_j/\omega)$ は波長である。

低周波極限 ($\omega/\omega_c \rightarrow 0$) の量には添え字の末尾に 0 を, 高周波極限 ($\omega/\omega_c \rightarrow \infty$) の量には ∞ を付す。例えば $V_{I0}, V_{I\infty}$ は低周波極限と高周波極限の I 波速度を意味する。

$$V_{I0} = V_c / \sqrt{z_{I0}} = V_c, \quad V_{II0} = 0 \quad (17a)$$

$$V_{I\infty} = V_c / \sqrt{z_{I\infty}}, \quad V_{II\infty} = V_c / \sqrt{z_{II\infty}} \quad (17b)$$

ここで, $z_{I0}, z_{I\infty}, z_{II\infty}$ は実数である。

以後, $I0, I\infty, II0, II\infty$ 等を, 波の種類と共に周波数状態をも示す呼称としても用いる。

2.4 慣用弾性係数による Biot の弾性係数の表現

慣用の弾性係数としては次の記号を用いる。

k = 体積弾性率, μ = 剛性率, ν = ポアソン比

また, P 波, S 波の速度を V_P, V_S とし, 流体の音速を V_f とする。これらや密度などには, 下記方式の下つき添字を付し, 何にかかわる量かを示す。

s = 固体物質, f = 流体物質, b = 骨格

したがって, V_{Pb}, V_{Sb} は骨格の P 波, S 波速度を意味する。添字のない k, μ, ρ などは, 閉鎖系 (実際上低周波極限) における媒質全体としての総合量を意味する。

Biot の弾性係数と孔隙率 ϕ や慣用の弾性係数との関係は, 狐崎 (2004a) の 2.1.2 に記述されている。後の近似計算に備え, ここではそれを新規パラメータ

$$\Delta \equiv k_b/k_f, \quad \alpha \equiv k_f/k_s, \quad \Delta\alpha \equiv k_b/k_s \quad (18)$$

等で, 若干書き換えて再録する。表記を簡明にするため, 共用記号をまず定義する。

$$D \equiv D_A - \Delta\alpha^2/k_f; \quad (19a)$$

$$D_A \equiv [\phi + \alpha(1-\phi)]/k_f = (1+\delta)\phi/k_f, \quad (19b)$$

$$\delta \equiv \alpha(1-\phi)/\phi, \quad \beta_b \equiv 4\mu_b/3k_b \quad (19c)$$

D_A は $\Delta = 0$ での D を意味する。以上の前提に基づいて Biot の諸係数を列記する。

$$P = [\Delta\phi(1-\alpha) + \phi^2 + (1-2\phi)(1-\Delta\alpha)]/D + \beta_b k_b \quad (20a)$$

$$Q = \phi[1-\phi-\Delta\alpha]/D, \quad (20b)$$

$$R = \phi^2/D, \quad L = 1/D \quad (20c)$$

$$n \equiv (Q+R)\phi/R = 1-\Delta\alpha \quad (20d)$$

$$k = k_b + n^2 L; \quad n^2 L = (1-\Delta\alpha)^2/D \quad (20e)$$

$$H = k + \beta_b k_b = K_b + (1-\Delta\alpha)^2/D \quad (20f)$$

$$V_{Pb} = [K_b/\rho_1]^{1/2}; \quad K_b \equiv (1+\beta_b)k_b \quad (21a)$$

$$V_{Sb} = [\mu_b/\rho_1]^{1/2}, \quad V_f = (k_f/\rho_f)^{1/2} \quad (21b)$$

3. 数値計算例に基づく Biot 波特性の検討

3.1 硬質層と軟質層の対比

(1) 1.1に記した前提に基づき、狐崎 (2004a) と同様に、全般的に Table 1(a) の物質定数を仮定する。骨格の弾性については、硬質 (モデル 1)、軟質 (モデル 2) の 2 種のモデルを設定する。両者共通な量を Table 1(b) に、異なるものを同表(c)に示す。すなわち、 ϕ, m 値に変化はなく、かつ $k_b/k_s = \mu_b/\mu_s$ であるとする。これは $\mu_b/k_b = \mu_s/k_s$, つまり $v_b = v_s$ を意味する。

骨格の弾性とは、実質的には乾燥状態での媒質の巨視的弾性を意味する。この状態では経験上 $v_b \approx v_s$ とみなせる。特性変化の大局的把握という当面の目的においては、モデルの精細さにあまりこだわる必要はない。

硬質モデルはほぼ第三系中部程度の砂岩に相当し、軟質モデルは未固結砂に相当する。両モデルの基本的な違いは Table 1(c) に示すように $\Delta\alpha (=k_b/k_s)$ 値にある。Table 1(b) (c) には特性計算に必要なパラメータ値が表示されている。それらは 2 の諸式を用いて算出された。

これら 2 種のモデルについて、I, II 両波の位相速

度・減衰と流体/固体の変位比や応力比を (7), (6) 式を用いて計算した。この際みかけ上、粘性係数 η について、孔隙内のマイクロな流速分布にかかわる周波数補正を施す。すなわち、 η を $F\eta$ に替える。結局、 ω_c を含む式では、 ω_c を $F\omega_c$ に置き換えて計算した。係数 F は ω/ω_c の関数で、狐崎 (2004a) [39] 式の $F(\kappa)$ を意味する (κ は ω/ω_c の関数)。

(2) Fig. 1 に硬質モデルの計算結果を示す。Fig. 1(a) には縦波の位相速度と対数減衰率を示す。Fig. 1(b) には変位振幅比、Fig. 1(c) には応力振幅比を示す。いずれについても位相差が対置されている。

全く同様な様式で、軟質モデルの計算結果を、Fig. 2(a), (b), (c) に示す。

Fig. 1(a) と Fig. 2(a) を対比してみよう。位相速度は両波とも、硬質の方が軟質よりも全体的に高いが、高周波極限で微増という相対的傾向は変わらない。念のため指標的速度値 (m/s) を示す：

$$\begin{aligned} \text{[硬質モデル]} \quad & V_{I0} = 3268, \quad V_{I\infty} = 3328, \quad V_{II\infty} = 1186 \\ \text{[軟質モデル]} \quad & V_{I0} = 1758, \quad V_{I\infty} = 1883, \quad V_{II\infty} = 205 \end{aligned}$$

減衰は II 波では両者殆ど変わらないが、I 波では軟質の方が硬質よりも、全体的に数倍大きい。この程度の違いはあるが、減衰の全体的変化傾向は互いに類似している。

Fig. 1(b) と Fig. 2(b) の変位振幅比には著しい違いが見られる。特に I 波については、両図とも低周波極限では、

$$|U/u|_{I0} = 1 \quad (22a)$$

であるが、 $f/f_c > 1$ では明確に異なる。すなわち、

Table 1(a) Material parameters common to all numerical models. Solid corresponds to quarts, and fluid to water.

	subscript <i>i</i>	k_i 10 ¹⁰ Pa	μ_i 10 ¹⁰ Pa	ρ_i kg/m ³	μ_i/k_i	v_i	V_{Pi} m/s	V_{Si} m/s
solid	<i>s</i>	3.708	3.120	2650	0.8414	0.172	5449	3431
fluid	<i>f</i>	0.2222	(0)	1000	(0)	(0.5)	1491*	(0)

* $V_{Pf} = V_f$

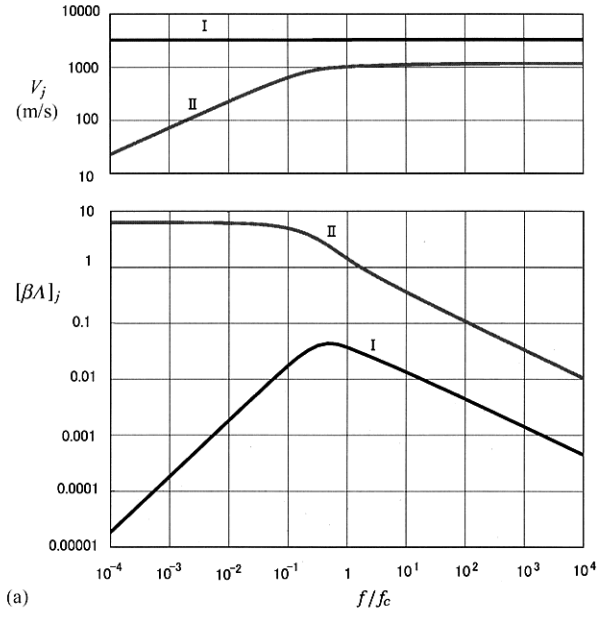
Table 1(b) Parameters of porous media common to model 1 and 2.

Model	<i>m</i>	ϕ	ρ_1 kg/m ³	ρ_2 kg/m ³	ρ kg/m ³	γ_1	γ_2	μ_b/k_b	β_b	α
1 and 2	0.300	0.300	1855	300	2155	0.8608	0.1392	0.8414	1.122	0.05992

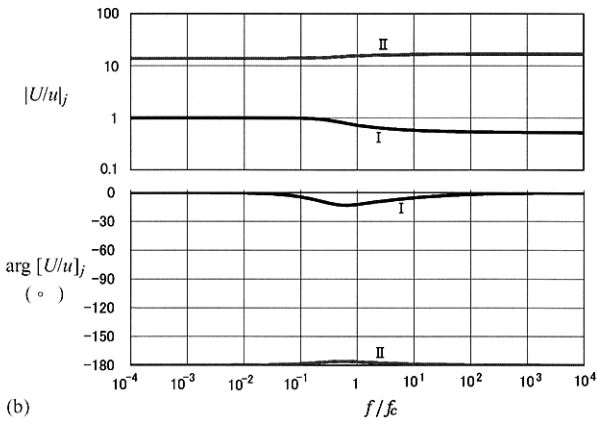
Table 1(c) Parameters of porous media proper to model 1 and 2, which correspond to sandstone and loose sand.

Model	$\Delta\alpha$	Δ	σ_{11}	σ_{12}	σ_{22}	σ_L	σ_n	H 10 ¹⁰ Pa	V_c m/s	V_{Pb} m/s	V_{Sb} m/s
1	0.2431	4.057	0.8926	0.0404	0.0265	0.2949	0.2232	2.302	3268	3211	2022
2	0.00243	0.04057	0.5037	0.2043	0.0878	0.9760	0.9736	0.6661	1758	321	202

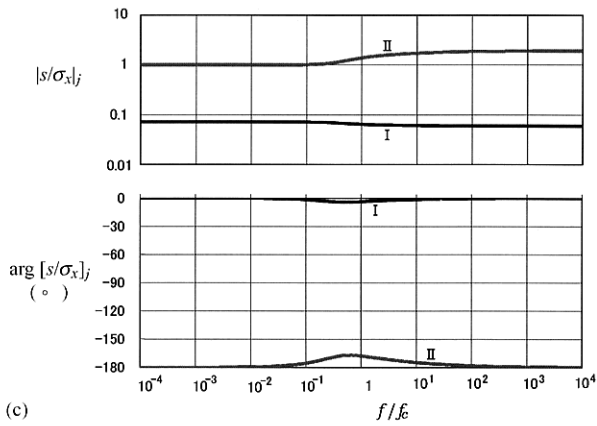
$\alpha = k_f/k_s, \Delta = k_b/k_f$



(a)



(b)



(c)

Fig. 1 Frequency characteristics of longitudinal waves for the model 1.

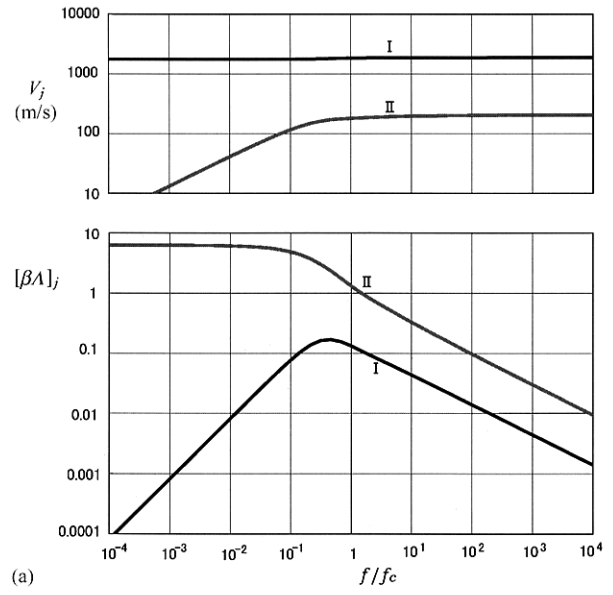
f =frequency. f_c =the characteristic frequency.

(a) Phase velocities V_j and logarithmic decrements $[\beta\Lambda]_j$.

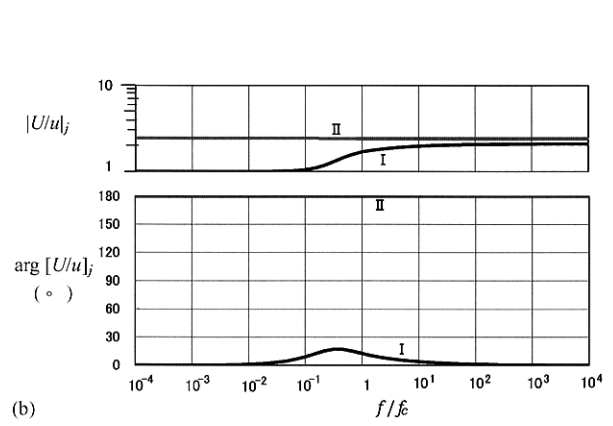
j =I and II, corresponding to I- and II-waves.

(b) Displacement ratios in fluid to solid: $[U/u]_j$
“°”=degrees.

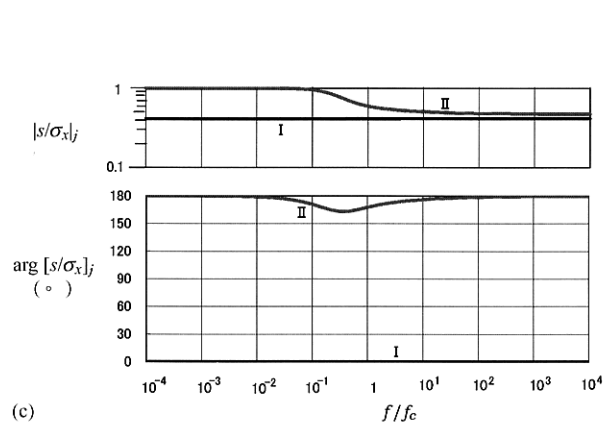
(c) Stress ratios in fluid to solid: $[s/\sigma_x]_j$



(a)



(b)



(c)

Fig. 2 Frequency characteristics of longitudinal waves for the model 2.

(a) Phase velocities and logarithmic decrements.

(b) Displacement ratios in fluid to solid.

(c) Stress ratios in fluid to solid.

$$[\text{硬質}] |U/u|_{I\infty} < 1, \quad [\text{軟質}] |U/u|_{I\infty} > 1 \quad (22b)$$

I波での両変位の位相差は、 $f/f_c \approx 1$ 付近で硬軟それぞれに特有な若干の変化はあるが、ほぼゼロ（基本的に同相）である。II波ではそれがほぼ 180° （逆相）である。

II波については、硬軟両モデルとも $|U/u|_{II} > 1$ で、且つその大きさは、周波数にあまり依存せず、ほぼ一定である。ただし、 $|U/u|$ 値自体は、硬質の方がはるかに大きい。

(3) Fig. 1(c), Fig. 2(c)の応力振幅比については、それ自体の特徴よりも、むしろ Fig. 1(b), Fig. 2(b)の変位振幅比との関係が注目される。たとえば、Fig. 1(b)のI波の変位振幅比は、Fig. 1(c)のII波の応力振幅比と、縦軸値=1を挟んで対称である。同様にII波の変位振幅比はI波の応力振幅比と対称である。縦軸が対数目盛りであることに注意すると、これらは次のような関係として整理できる。

$$|U/u|_I = 1/|s/\sigma_x|_{II} = |\sigma_x/s|_{II}$$

これらの振幅比の関係に対応して、位相差についても、次の関係が認められる。

$$\arg[U/u]_I = -\arg[s/\sigma_x]_{II} \pm 180^\circ$$

これらの関係はIとIIを交換しても成立する。ここで

$$-\arg[s/\sigma_x] = \arg[\sigma_x/s], \quad \exp[\pm i\pi] = -1$$

に注意すると、上記関係は次のようにまとめられる。

$$[U/u]_I = -[\sigma_x/s]_{II}, \quad -[u/U]_{II} = [s/\sigma_x]_I \quad (23)$$

ここでの $[U/u]_j, [\sigma_x/s]_j$ ($j = I, II$) はもちろん位相差と振幅からなる複素量である。両辺の分子と分母はそれぞれ入れ替えてもよい。ここでは分母をI波では固体、II波では流体となるように表現した。この関係については、3.2(2)で再び触れる。

3.2 骨格の軟化に伴う Biot 波特性の変化

(1) $k_b/k_s (= \mu_b/\mu_s)$ を変化させ、3.1で見られた関係を、硬質から軟質への広い変化軸の中で見つめなおしてみよう。ただし、 $\phi = m = 0.3$ はそのまま維持する。ここでは、各種特性値の低周波、高周波の両極限值だけを取りあげる。このとき、 $\omega/\omega_c \rightarrow 0$ や $\omega/\omega_c \rightarrow \infty$ となり、(6), (7), (14)式は極めて単純化される。その計算結果を骨格のP波速度の関数として表現する。両極限值を捉えれば、中間周波数域の状態は内挿的にほぼ推定できる。

Fig. 3(a)には各種の位相速度を、Fig. 3(b)には変位や応力の振幅比を示す。両図とも、縦軸、横軸は対数目盛りである。目盛り線は10倍ごとの間隔で描かれている。その粗さを補うため、横軸や左側縦軸の内側には5の位置を示す短線目盛りも付した。

両図の横軸は水の音速を基準にした骨格のP波速度、つまり V_{pb}/V_f である。それらの横軸上には白抜き矢印1, 2が付されている。それぞれ、硬質モデルと軟質モデルに対応する。縦軸記号の添字*i*に入るべき記号が、図中の各曲線に短点線を付して示されている。例えばI0はI波の低周波極限值を意味する。

Fig. 3(a)では縦波のI0, I ∞ , II0, II ∞ のほか、細曲線でS0, S ∞ も示されている。これらは横波の低周波、高周波両極限值を意味する。すべて、実線は高周波極限值、破線は低周波極限值である。横波(S波)の位相速度の算出には、狐崎(2004b)の(66a)式を用いた。

Fig. 3(a)では、左側の縦軸に速度値が V_i/V_f 形式で表現されている。これは、 V_f と対比することで、水の影響の程度を明示するためである。速度値自体の目盛りも km/s 単位で右縦軸の外側に短線で付されている。 $V_{I\infty}$ は V_{I0} よりもわずかに大きいだけである。 V_{pb}/V_f が1付近をよりも小さくなると、I波速度は全体的に V_f よりもやや大きい一定値に近づく。常に $V_{II0} = 0$ であるから、II波では $V_{II\infty}$ だけに注目する。 $V_{II\infty}$ は常に V_f よりも小さく、しかも $V_{pb} < V_f$ では、 $V_{II\infty} \approx V_S \propto V_{pb}$ である。

S波速度(V_S)自体は、詳しくは μ_b/k_b 値の仮定に依存する。しかし、 $V_{S\infty}$ が V_{S0} よりもわずかに大きいという傾向自体には一般性がある。

(2) Fig. 3(b)において、左端の縦軸との交叉値が1より大きい曲線は変位振幅比 $|U/u|_i$ であり、1より小さい曲線は応力振幅比 $|s/\sigma_x|_i$ である。ただし、次の量については両者共通に1である：

$$|U/u|_{I0} = |s/\sigma_x|_{II0} = 1 \quad (24a)$$

—II0, —II ∞ のように「—」を付した記号も用いられている。これは全く便宜的な表記法で、例えば $|U/u|_i$ に付された「—II0」については、

$$[U/u]_{II0} = -|U/u|_{II0} \quad (24b)$$

つまり、「—」を付すことで $[U/u]_i$ や $[s/\sigma_x]_i$ は負の量であることを示す。負号がなければ正の量である。低周波、高周波の両極限の $[U/u]_i$ や $[s/\sigma_x]_i$ は常に実数である。対数では、正の量しか表現できない。「—」はそれを補う便宜処置である。

Fig. 3(b)でまず注目されるのは、縦軸値=1を介しての見事な対称性である。具体的には

$$|U/u|_{II\infty} \text{ と } |s/\sigma_x|_{I\infty}, \quad |U/u|_{II0} \text{ と } |s/\sigma_x|_{I0} \\ |U/u|_{I\infty} \text{ と } |s/\sigma_x|_{II\infty}, \quad |U/u|_{I0} \text{ と } |s/\sigma_x|_{II0}$$

等について確かめられる。しかもIIの波にはすべて負号が付されており、結局(23)式の相反関係を改めて確認するものとなっている。相反性は解析的にも証明できる。それは別稿(狐崎, 2005a)での課題とする。

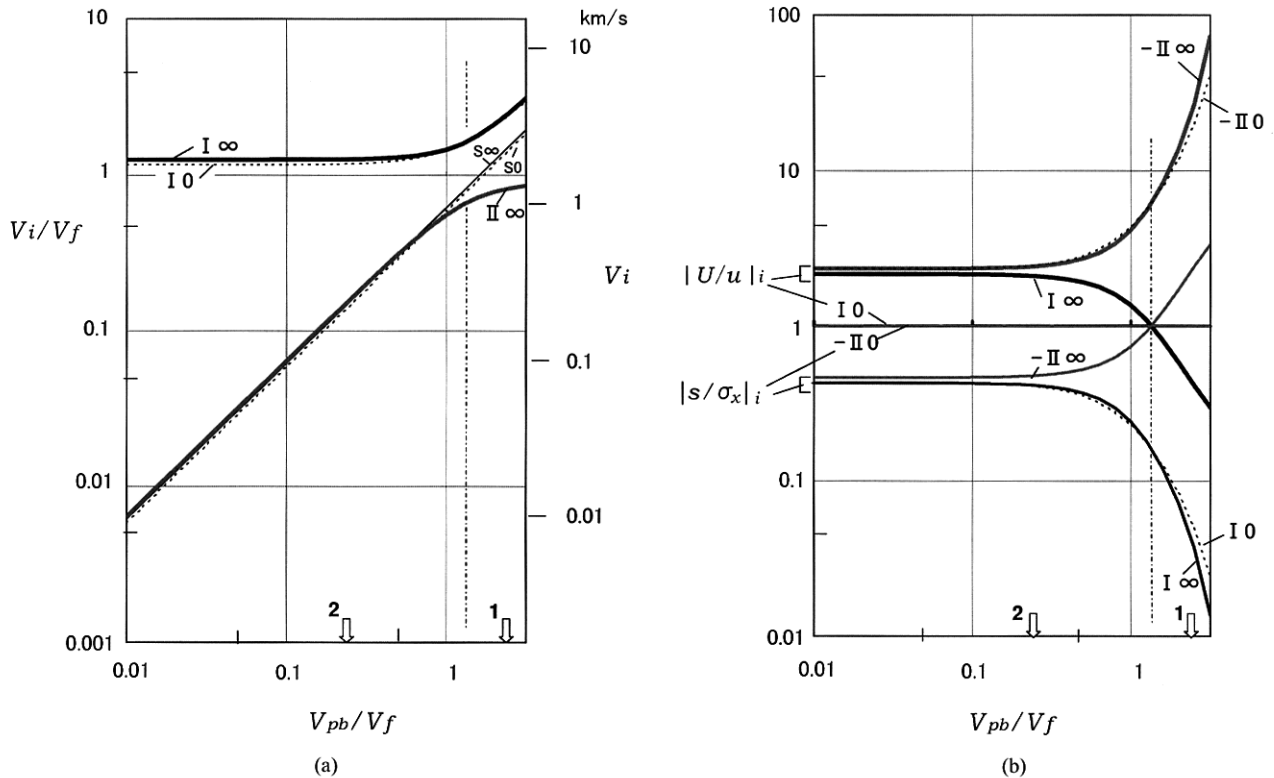


Fig. 3 Dependency of wave properties to V_{pb}/V_f .
 V_{pb} =P-wave velocity of the skeleton. V_f =sound velocity of the fluid.
 1 and 2=model types. $m=\phi=0.3$ (assumed).
 Vertical chain line=the state of dynamic compatibility.
 (a) Phase velocities V_i . $i=jh$; $j=(I, II, S)$, $h=(0, \infty)$. S=S-wave. 0 and ∞ =the low and high frequency limits.
 (b) Amplitude ratios: $|U/u|_i$ and $|s/\sigma_x|_i$. Symbols with negative sign mean that the related amplitude ratios are negative.

$|U/u|_{1\infty}$ は V_{pb}/V_f の低下につれ、1 より小から大へと移行する。つまり変位振幅の卓越側が固体から流体へと移行している。その境界の $|U/u|_{1\infty} = 1$ ($=|U/u|_{10}$) に着目し、これを動的同調と呼ぶことにする。このことについては、次項(3)で補足する。

Fig. 3(b) の $|U/u|_i$ や $|s/\sigma_x|_i$ は V_{pb}/V_f が縦一点鎖線で示す動的同調値よりも低下すると、急速に一定値、つまり $V_{pb}/V_f \rightarrow 0$ の極軟状態値に近づく。この傾向は Fig. 3(a) の位相速度と同様である。 $V_{pb}/V_f < 0.5$ の軟質層では極軟の様相が支配的で、その傾向は V_{pb}/V_f の低下と共に当然深まる。その特性や力学機構を解明することは、そのまま軟質層の本質を理解するための鍵となる。このことは、5での課題とする。

(3) 動的同調は Biot (1956a) の dynamic compatibility に相当する。その際は全周波数域で $|U/u|_1 = 1$ となる。この性質をもたらす媒質条件として、彼は次式 (同論文(5.16)式) を提示している (付録参照)。

$$(\sigma_{11} + \sigma_{12})/\gamma_1 = (\sigma_{22} + \sigma_{12})/\gamma_2 = 1 \quad (25)$$

この条件は特定の V_{pb}/V_f で満たされる。その値は1よりも若干大きく、 ϕ が減少するほど増大する。詳しくは別稿 (狐崎, 2005a) で検討する。

4. 極軟状態での Biot 波特性

4.1 準備事項

(1) 次のような場合、極軟骨格、あるいは極軟状態と呼ぶことにする。

$$\Delta \ll 1, \quad \Delta\alpha = k_b/k_s \ll 1 \quad (26)$$

この状態を前提として、 Δ や $\Delta\alpha$ は適宜省略する。通常 $\alpha < 0.1$ であるが、 α 自体は当面保存する。以下で、 D_Δ , H_Δ , $V_{c\Delta}$ など添え字 Δ つきの量は、 $\Delta=0$ での D, H, V_c などを意味する。これらの前提にもとづいて(19), (20) 式の近似式を以下に列記する。

$$D \doteq D_\Delta \quad (27a)$$

$$Q \doteq \phi(1-\phi)/D_\Delta, \quad R = \phi^2/D_\Delta, \quad L = 1/D_\Delta \quad (27b)$$

$$P \doteq [(1-\phi)^2 + \Delta\beta_b k_f D_\Delta]/D_\Delta \doteq (1-\phi)^2/D_\Delta \quad (27c)$$

上式最右辺では次の性質により $\Delta\beta_b k_f D_\Delta$ を省略している：

$$k_f D_\Delta = (1+\delta)\phi \doteq \phi < 1 \quad (28a)$$

$$0 < \beta_b < 2, \quad (0 < \mu_b/k_b < 3/2) \quad (28b)$$

以後順を追って H や V_c へと進む。

$$n \doteq 1 \quad (\text{但し, } n < 1), \quad n^2 L \doteq 1/D_\Delta \quad (29a)$$

$$k \doteq (\Delta k_f D_\Delta + 1)/D_\Delta \doteq 1/D_\Delta \quad (29b)$$

$$H \doteq H_\Delta; \quad H_\Delta \equiv 1/D_\Delta \quad (30a)$$

$$V_c \doteq V_{c\Delta}; \quad V_{c\Delta}^2 \equiv 1/D_\Delta \rho = V_f^2 \gamma_f / \phi (1 + \delta) \quad (30b)$$

上記の関係を用いて、無次元化弾性係数の近似式も示す。

$$\sigma_{11} \doteq (1 - \phi)^2, \quad \sigma_{22} \doteq \phi^2, \quad \sigma_{12} \doteq \phi(1 - \phi) \quad (31a)$$

$$\sigma_L \doteq 1, \quad \sigma_n = n\sigma_L \doteq 1, \quad 0 < \sigma_L - \sigma_n^2 \ll 1 \quad (31b)$$

(2) 補助的關係を付記する ((10)~(13)式より) :

$$\gamma_{11} = \gamma_1 + m\gamma_2, \quad \gamma_{22} = (1 + m)\gamma_2 \quad (32a)$$

$$\gamma_{12} = -m\gamma_2, \quad \gamma_c = (1 + m)\gamma_f / \phi \quad (32b)$$

$$\text{通常の場合 } (\rho_s > \rho_f, \rho > \rho_f): \quad 0 < \gamma_f < 1 \quad (32c)$$

以後の表記を簡略にするため、下記の量を定義する :

$$M \equiv \gamma_c - \gamma_f^2 = (\gamma_1 + m)\gamma_f / \phi > 0 \quad (33a)$$

$$N \equiv 1 + \gamma_c - 2\gamma_f = 1 + (\gamma_{22} - 2\phi\gamma_2) / \phi^2 \quad (33b)$$

4.2 変位比と応力比

(1) 4.1 (1), (2)での準備をもとに、(14)式の諸量の極軟値を求める。当面は、3.1 (1)に記した F 補正を省略するが、この点については(5)で補足する。

(14b)式に(31b)式の関係を導入すると、 $\Delta \ll 1$ では常に

$$|a_1^2| \ll 1 \quad (34)$$

次に a_2 については、(14c)式に(33a, b)式を用いて、

$$a_2 \doteq [N - i\omega_c/\omega] / [M - i\omega_c/\omega] \quad (35)$$

$$\omega_c/\omega \gg 1: \quad a_2 \doteq 1 \quad (36a)$$

$$\omega_c/\omega \ll 1: \quad a_2 \doteq N/M \quad (36b)$$

これらによる下記(37a)式の性質に基づき、(15)式の $[]^{1/2}$ の項を近似展開すると、(37b)式が得られる。

$$|4a_1^2/a_2^2| \ll 1 \quad (37a)$$

$$z_I \doteq 1/a_2, \quad z_{II} \doteq a_2/a_1^2 \gg 1 \quad (37b)$$

(37b)第1式と(36a, b)式より、

$$z_{I0} = 1, \quad z_{I\infty} = M/N \quad (38)$$

これらの $z_{I0}, z_{I\infty}$ を(7)式に導入すると、 $[U/u]_{I0}$ や $[U/u]_{I\infty}$ が得られる。II波についても同様である。(38)式の $z_{I0}, z_{I\infty}$ は軟化極限 ($\Delta \rightarrow 0$) とした上で、更に低周波あるいは高周波の極限とした場合の収束値である。このため、 \doteq でなく、 \equiv と表現している。上記の $[U/u]_{j0}$ や $[U/u]_{j\infty}$ もまた同種の収束値であり、同様に記述される。具体的には、次項(2), (3)に記す。

(2) まず、 z_{I0} が有限であることから、一般に

$$[U/u]_{I0} = 1 \quad (39a)$$

$[U/u]_{I\infty}$ については、順を追って変形・整理する :

$$\begin{aligned} [U/u]_{I\infty} &= -[\sigma_{11}z_{I\infty} - \gamma_{11}] / [\sigma_{12}z_{I\infty} - \gamma_{12}] \\ &= -[(1 - \phi)^2 M - \gamma_{11} N] / [\phi(1 - \phi)M - \gamma_{12} N] \\ &= (m\gamma_f + \gamma_1)^2 / \gamma_f(m + 1 - \phi)(m\gamma_f + \gamma_1) \\ &= (m + \gamma_1/\gamma_f) / (m + 1 - \phi) \end{aligned} \quad (39b)$$

(3) $[U/u]_{II}$ は、(7)式に(37b)第2式の z_{II} を導入すれば求まる。高周波極限では、 $\omega_c/\omega \rightarrow 0$ でしかも $z_{II} \rightarrow \infty$ であるから、 $[U/u]_{II}$ は明らかに収束する :

$$[U/u]_{II\infty} = -\sigma_{11}/\sigma_{12} = -(1 - \phi)/\phi \quad (40)$$

(14b, c)式により、 $\omega_c/\omega \rightarrow \infty$ では

$$z_{II0} \doteq a_2/a_1^2 \doteq -i\omega_c/\omega(\sigma_L - \sigma_n^2), \quad |z_{II0}| \gg 1 \quad (41a)$$

これを(7)式に代入し、その分子、分母をまず $i\omega_c/\omega$ で除す。この場合は(31b)式により

$$1/(\sigma_L - \sigma_n^2) \rightarrow \infty$$

であるから、表現式は著しく単純化される :

$$[U/u]_{II0} = -\sigma_{11}/\sigma_{12} = -(1 - \phi)/\phi \quad (41b)$$

これは(40)式の $[U/u]_{II\infty}$ に等しい。したがって自然な推定として、極軟状態では周波数に依らず

$$[U/u]_{II} = -(1 - \phi)/\phi \quad (42)$$

(4) (23)式の相反関係も用いると、(2), (3)の結果は次のようにまとめられる。すなわち、極軟状態では

$$[U/u]_{I0} = -[\sigma_x/s]_{II0} = 1 \quad (43a)$$

$$[U/u]_{I\infty} = -[\sigma_x/s]_{II\infty} = 1 + \Gamma; \quad (43b)$$

$$\Gamma \equiv (1/\gamma_f - 1)/(m + 1 - \phi) \quad (43c)$$

$$-[u/U]_{II} = [s/\sigma_x]_I = \phi/(1 - \phi) \quad (44)$$

Fig. 3(b)の場合 : $\phi/(1 - \phi) = 0.429, 1 + \Gamma = 2.155$

上記の各値 ($[U/u]_{I\infty}$ 等) は、Fig. 3(b)左端 ($V_{pb}/V_f = 0.01$) での各対応値 ($|U/u|_I$ 等) と、1%以下の誤差で一致する。

(5) これまでは、3.1 (1)で注意した F 補正を考慮せずに、 $\omega/\omega_c \rightarrow \infty$ の処理をしてきた。しかし、 $\omega/\omega_c \rightarrow \infty$ では $|F| \propto (\omega/\omega_c)^{1/2} \rightarrow \infty$ であるが、 $F\omega_c/\omega$ 全体としては

$$F\omega_c/\omega \propto (\omega_c/\omega)^{1/2} \rightarrow 0$$

である。このため、これまで $\omega_c/\omega \rightarrow 0$ で「 ω_c/ω を省略」としたところは、 F 補正つきでは、「 $F\omega_c/\omega$ を省略」と読みかえればよく、論旨には影響しない。 $\omega_c/\omega \rightarrow \infty$ では本来 $F \rightarrow 1$ であるため、 F 係数自体を完全に無視できる。この論理は以後も適用される。

4.3 縦波の位相速度

4.3.1 第II種縦波の速度

I波速度については、あとで触れることにして、まず特に考慮を要する極軟状態でのII波速度を取り上げる。

(1) $\omega/\omega_c \rightarrow 0$ では、(41a)式により $z_{II} \rightarrow \infty$ であり、当然 $v_{II} \rightarrow 0$ となる。ここではその段階にとどめず、更

に一步進めて、 $\sigma_L - \sigma_n^2$ を $\Delta\alpha$ の関数として表し、軟質で低周波の場合の v_{II} 特性を明示する。

このため、(19), (20)式において Δ^2 は省略するが、 Δ は保存し、4.1 (1)の諸関係式を近似度の一段高いものに置きかえる。以下、必要とされる量を順次列記する。

$$D = D_\Delta(1 - \Delta\alpha/D_\Delta k_s) \quad (45a)$$

$$D_\Delta k_s = (1 + \delta)\phi/\alpha = [\phi + \alpha(1 - \phi)]/\alpha \quad (45b)$$

$$n^2 L = n^2/D \doteq [1 + \Delta\alpha(1/D_\Delta k_s - 2)]/D_\Delta \quad (46a)$$

$$k = \Delta\alpha k_s + n^2 L \quad (46b)$$

$$\doteq [1 + \Delta\alpha(D_\Delta k_s + 1/D_\Delta k_s - 2)]/D_\Delta \quad (46b)$$

$$H \doteq H_\Delta[1 + \Delta C_H]; \quad (47a)$$

$$C_H \doteq \alpha[D_\Delta k_s(1 + \beta_b) + 1/D_\Delta k_s - 2] \quad (47b)$$

$$V_c \doteq V_{c\Delta}[1 + \Delta C_H/2] \quad (47c)$$

$D_\Delta, H_\Delta, V_{c\Delta}$ は、既に(19b), (30a), (30b)式で定義されている。なお ΔC_H は、ある程度硬い軟質層に対応するための補正項である。さらに、

$$\begin{aligned} \sigma_L &= 1/DH \doteq 1 + \Delta\alpha[2 - D_\Delta k_s(1 + \beta_b)] \\ &= 1 + \Delta[\alpha(1 - \beta_b) - \phi(1 - \alpha)(1 + \beta_b)] \end{aligned} \quad (48a)$$

$$\sigma_n = n\sigma_L \doteq 1 - \Delta[\alpha\beta_b + \phi(1 - \alpha)(1 + \beta_b)] \quad (48b)$$

$$\sigma_L - \sigma_n^2 \doteq \Delta(1 + \beta_b)[\phi + \alpha(1 - \phi)] \quad (48c)$$

(2) (41a)式に(48c)式を導入する：

$$z_{II0} \doteq -i(\omega_c/\omega)/[\Delta(1 + \beta_b)\{\phi + \alpha(1 - \phi)\}] \quad (49a)$$

$$\sqrt{z_{II0}} = (1 - i)|z_{II0}/2|^{1/2} \quad (49b)$$

この関係を(16a)式に導入すると、II 0の位相速度は

$$V_{II0} \doteq V_c[2\Delta(1 + \beta_b)\{\phi + \alpha(1 - \phi)\}(\omega/\omega_c)]^{1/2} \quad (49c)$$

と求まる。4.2では z_{II0} や V_{II0} を $\omega/\omega_c \rightarrow 0$ の極限值と定義したが、ここではその意味内容を拡張し、 ω/ω_c の領域を若干広げている。その結果 $\omega/\omega_c \ll 1$ では、II 波が

$$V_{II} \propto (\omega/\omega_c)^{1/2}$$

という拡散現象的性格を持つことが明示された。

当面は(47c)式において、補正項を省略する。すなわち

$$\Delta C_H/2 \ll 1, \quad \therefore V_c = V_{c\Delta}$$

この $V_{c\Delta}$ として(30b)式を用い、(19c)第1式に留意すると、(49c)式は次のような極めて簡単な形に変換される。

$$V_{II0} \doteq [2\Delta\gamma_f(1 + \beta_b)(\omega/\omega_c)]^{1/2} V_f \quad (49d)$$

II 0では一般に(49b)式が成立するので、(16c)式より常に

$$[\beta A]_{II0} = 2\pi \quad (49e)$$

(3) 次に $V_{II\infty}$ を求める。第1の足場は(37b)第2式の z_{II} である。(14b, c)式の a_1^2, a_2 において $\omega_c/\omega \rightarrow 0$ と

し、更に a_2 については、(31b)式により $\sigma_L \doteq \sigma_n \doteq 1$ とする：

$$z_{II\infty} \doteq a_2/a_1^2 \doteq (1 + \gamma_c - 2\gamma_f)/(\sigma_L - \sigma_n^2) \quad (50a)$$

これに(33b), (48c)式を代入して得られる $z_{II\infty}$ と、(30b)式による V_c とを用いて、 $V_{II\infty}$ は次のように求まる：

$$V_{II\infty} = \frac{V_c}{\sqrt{z_{II\infty}}} \doteq V_f \left[\frac{\Delta(1 + \beta_b)\gamma_f\phi}{\phi + (1 + m - 2\phi)\gamma_f} \right]^{1/2} \quad (50b)$$

(4) Fig. 2(a)の場合について、(2), (3)の近似式による計算値を、2.3, 2.4の厳密式による計算値(真値)と比較してみた。(49d)式による V_{II0}/V_f 値は、 $\omega/\omega_c = 0.01$ では、真値(0.0279)に対し誤差1%ほどである。 $\omega/\omega_c < 0.01$ では更に精度が高い。(50b)式による $V_{II\infty}/V_f$ 値は、真値(0.137)に対し、表記の桁の範囲で一致する。

4.3.2 第I種縦波の速度

(1) 極軟状態でのI波速度を求めるための準備は、4.3.1までの段階で既に整っている。まず、一般的な関係として、

$$z_{I0} = 1, \quad V_{I0} = V_c \quad (51a)$$

したがって、(47c)式を用いると

$$V_{I0} \doteq V_{c\Delta}[1 + \Delta C_H/2] \quad (51b)$$

C_H は(47b)式で与えられている。

$\Delta \rightarrow 0$ では、まず(38)第2式と(33a, b)式により、

$$z_{I\infty} = (\gamma_1 + m)/[m + (1 - \phi)^2 + \phi\gamma_1/\gamma_f] \quad (52a)$$

これと(17b)式により、

$$V_{I\infty} = V_{I0} \left[\frac{m + (1 - \phi)^2 + \phi\gamma_1/\gamma_f}{\gamma_1 + m} \right]^{1/2} \quad (52b)$$

(52b)式による $V_{I\infty}/V_{I0}$ は Δ に依存しない。この性質はある程度の Δ の範囲内で成立する。このことは、Fig. 3(a)において、下端横軸の矢印2付近よりも V_{pb}/V_f が小さくなれば、 $V_{I\infty}, V_{I0}$ 両曲線の平行性が認められることから伺える。

(2) 念のため Fig. 2(a)の軟質モデルについて、(30b), (51b), (52b)式等による近似計算値を、厳密式による計算値と比較してみた。 $V_{I0}/V_{c\Delta}, V_{I0}/V_f, V_{I\infty}/V_{I0}$ 等についての誤差は0.1%以下であった。

ここで用いられた初出のパラメータ値を付記する：

$$D_\Delta k_s = 5.707, \quad C_H = 0.616, \quad \Delta C_H = 0.0250$$

5. 極軟状態における波動機構

5.1 極軟状態における応力-歪み関係の機構

(1) 極軟状態での歪みと応力とはどのような機構で結びついているのか。そこから見ていくことにする。鮮明なイメージを描くには、枝葉を切り捨て、状態を単純化する

の方がよい。まず、固体粒子は剛体 ($\alpha=0$) と仮定する。あとでは、 $k_b/k_f \ll 1$ の極軟状態とする。Biot の弾性係数の導出過程をたどりつつ、力学過程を考察する。

当面の目標は、一般的な係数表現式 ((19), (20) 式) の導き方を示すことではない。それは別に狐崎 (2005b) で取り上げる。今そこに埋没すると、核心が見失われる。実際の観点においても、極軟状態では4.2や4.3で見たように、固体粒子の圧縮性は(30b)式の δ を通じて I 波速度にわずかに影響するだけで、変位比や応力比には影響しない。

(2) 基準状態の媒質中に、巨視的微小領域として直角座標の3軸 (x, y, z) に平行な各辺を持つ立方体 (基準体: R) を設定し、その中の各部の変位や歪みについて考察する。狐崎 (2004a) の A2 でも解説したように、空間的概念を明確にするため、固体部を骨格、流体部を流体網と表現する。骨格の外側を包絡面で囲み、その囲まれた立体を骨格体(B)と呼ぶ。流体網についても同様に、流体網体(L)を定義する。R, B, L はそれぞれの簡略呼称である。R, B, L の体積をそれぞれ R 体積, B 体積, L 体積と呼ぶ。

基準状態では、 $R=B=L$ であり、R 体積=B 体積=L 体積でもあるが、歪み後は一般に、B と L は一致しない。狐崎 (2004a) の Fig. A3 (a), (b), (c) の矩形枠域について、(a) は R に、(b), (c) は歪後の B, L に対応する。

骨格と流体網の歪みは空隙体積の変化を媒介として流体圧力 p を規定する。その過程を以下では具体的にたどることにする。

当面は、 x 方向に伝わる縦波平面波を前提とする。歪み(のび)は x 方向にのみ生じ、 y, z 方向には生じない。歪み状態でも骨格体や流体網体は長方体である。それぞれの体積歪みを e, ε とすると、

$$e = e_x, \quad \varepsilon = \varepsilon_x$$

骨格や流体網を構成する固体物質や流体物質を、単に固体や流体と呼ぶ。R 内にあった各要素の体積が、歪みに伴いどう変化するかを、記号の定義も兼ね、「基準状態」→「歪み状態」として、以下に列記する。

(基準状態) (歪み状態)

- | | | | |
|------------|----------|---|-----------------|
| ① B 体積: | 1 | → | $1+e$ |
| ② 固体体積: | $1-\phi$ | → | $1-\phi$ |
| ③ L 体積: | 1 | → | $1+\varepsilon$ |
| ④ L 内流体体積: | ϕ | → | ϕ' |
| ⑤ L 内固体体積: | $1-\phi$ | → | $1-\phi_L$ |

⑤は、固体粒子=剛体の前提に基づく。R, B, L の y, z 方向の辺長は1とする。狐崎 (2004a) の Fig. A3 を借りて、①, ③の状態を表すと、 $AB=1, A'B'=1+e, A''B''=1+\varepsilon$ である。この様子は狐崎 (2005b) の Fig. 3 にも示されている。

これ以後は歪み状態だけについて記述する。≡と記す所

は e^2 等の高次 (2次) 以上の歪 (微少量) を省略したことによる近似であり、後では単に「=」と書く。B 内でも L 内でも固体体積の占有率は等しい、とみなせるから、

$$(1-\phi_L)/(1+\varepsilon) = (1-\phi)/(1+e) \quad (53a)$$

$$\therefore \phi_L \doteq \phi - (1-\phi)(\varepsilon - e) \quad (53b)$$

これと下記 (54a) 式の関係から、流体の体積歪 ε_f や圧力 p が求められる ((54b, c) 式):

$$\phi' = 1 + \varepsilon - (1 - \phi_L) = \varepsilon + \phi_L \quad (54a)$$

$$\varepsilon_f = (\phi' - \phi) / \phi = [e + \phi(\varepsilon - e)] / \phi \quad (54b)$$

$$p = -k_f \varepsilon_f = -k_f [e(1-\phi) / \phi + \varepsilon] \quad (54c)$$

σ_x と s からなる全応力 τ_x を、流体応力成分 ($-p$) と残余成分 τ_x' とに分解する (詳しくは狐崎 (2005b) 参照):

$$\tau_x = \tau_x' + (-p); \quad \tau_x \equiv \sigma_x + s \quad (55a)$$

応力は統一的に張力で正とされる。このため圧力 p は流体応力では $-p$ に換えられている。 $-p$ 成分は流体、固体の全物質に均等・等方に作用する。しかし、これによっては、剛体である固体は歪まず、したがって骨格も歪まない。 τ_x' は有効応力とも呼ばれる。これは固体部のみに作用し、骨格に e_x の歪みをもたらし、 e_x は固体粒子間の微小接触部の変形で賄われる。 $e_x = e$ であるから、結局

$$\tau_x' = K_b e; \quad \tau_x' = \tau_x + p \quad (55b)$$

(55a, b) 式と (54c) 式より

$$\sigma_x = [K_b + k_f(1-\phi)^2/\phi]e + k_f(1-\phi)\varepsilon \quad (55c)$$

流体網応力 s は (1) 式と (54c) 式より

$$s = k_f [(1-\phi)e + \phi\varepsilon] \quad (55d)$$

(3) (55c, d) 式と (3) 式を対比すると、極軟状態での Biot の弾性係数は次のように求まる。

$$P = k_f [\Delta(1+\beta_b) + (1-\phi)^2/\phi] \quad (56a)$$

$$Q = k_f(1-\phi), \quad R = k_f\phi \quad (56b)$$

$$H = k_f [\Delta(1+\beta_b) + 1/\phi] \quad (56c)$$

$\Delta = k_b/k_f \rightarrow 0$ では、次のように単純化される。

$$P = k_f(1-\phi)^2/\phi, \quad Q = k_f(1-\phi) \quad (57a)$$

$$R = k_f\phi, \quad H = k_f\phi \quad (57b)$$

$$\sigma_{11} = (1-\phi)^2, \quad \sigma_{12} = (1-\phi)\phi, \quad \sigma_{22} = \phi^2 \quad (57c)$$

(57c) 式では、(5a, b) 式と (57a, b) 式を用いている。

(57c) 式は、既に求めた (31a) 式に等しい。

(4) 5.1 (2) で述べた力学機構は Fig. 4 のようにモデル化できる。同図 (a) において、斜線域は固体部 (剛体ブロック)、斑点域は流体部を表す。これは媒質内の固体

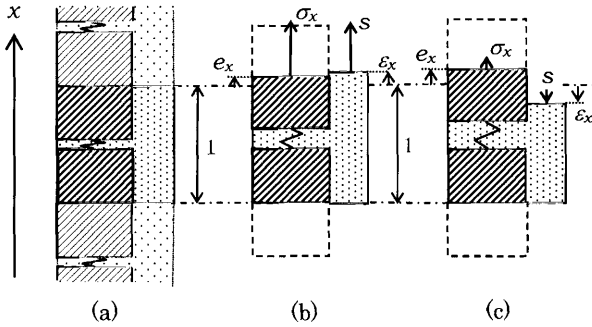


Fig. 4 Simplified models for longitudinal deformation of fluid-saturated porous media with very low skeleton-stiffness.
 (a) Reference (unstrained) state.
 (b) Strained state in I-wave.
 (c) Strained state in II-wave.

と流体を側方に押し詰めて分離した状態に相当する。ブロックはバネ (K_b に相当) で上下に次々と連結されて、流体部と共に 1 本の柱体を形成する。 x (柱軸) 方向に伝わる平面波を前提としている以上、側方の伸縮はなく、柱体の側面からの流体の出入もないので、この 1 本の柱体を考えれば十分である。

ここでは太線枠内の濃色域 (単位セル) に着目する。1 本の柱体はこれの反復連鎖からなる。バネが介在する固体間の隙間は実際には十分小さいので、固体/流体の断面積比は、その体積比に等しい。柱体は紙面に直交する方向では一様とすると、紙面上の固体/流体の断面幅比はそのまま断面積比となる。

単位セルの固体端面や流体端面を当該柱体全体に延長した断面が B や L の端面に相当する (線が混み入るため図示は省略)。Fig. 4(a) では両者は一致するが、歪状態の同図(b), (c) では分離する。

見やすくするため誇張して描かれているが、 e_x や ε_x は微小量である。応力や歪の同逆の位相関係は、矢印の上下の向きで直接表されている。Fig. 4(a) の単位セルを基準体とみなすと、歪状態における同図(b), (c) の様相は 5.1(2) の説明と対応する。(b) は I 波, (c) は II 波に相当する (5.2.2 参照)。

5.2 バネモデルによる極軟状態の波動機構

5.2.1 準備事項と共通事項

(1) v ((8a) 式の v_j) を規定する機構を、実効的な弾性率と密度という観点から捉えよう。

τ_x と e_x (あるいは u) についての実効弾性率 K_E と、実効密度 ρ_E とを用いると、 v は次のように表せる。

$$v^2 = K_E / \rho_E; \tag{58a}$$

$$K_E \equiv \tau_x / e_x, \quad \rho_E \equiv (\partial \tau_x / \partial x) / (\partial^2 u / \partial t^2) \tag{58b}$$

上記の K_E と ρ_E とに付録の (A1a) 第 1 式と第 2 式をそれぞれ導入すると、一般的な関係として次式が得られる：

$$K_E = H(1 + \sigma_C w / u); \quad \sigma_C \equiv \sigma_{22} + \sigma_{12} \tag{59a}$$

$$\rho_E = \rho(1 + \gamma_2 w / u); \quad w \equiv U - u \tag{59b}$$

$$\text{極軟状態では} \quad \sigma_C = \phi \tag{59c}$$

(2) 5.1(2) で述べた関係全体を一覧できるように、応力-歪み関係をバネ系としてモデル化し、Fig. 5(a) に示す。ここでは、下記の記号法を用いる。

- ← 要素の外側から働く引張力 (厳密には応力)
- ↔ 2 端点間の要素の伸び (厳密には歪み)

例えば、Fig. 5(a) の B-D 間からは、(55b) 第 1 式の関係が読み取れる。A 点における左右の素子の結合は、(55b) 第 2 式に対応する。C-F 間のバネは (54c) 式の第 1~2 辺に、並列要素 (C-F と B-E) の歪みの関係は (54b) 式の左右両辺の関係に相当する。次の 5.2.2 では (58a) 式の K_E もこの図のバネ系から読み取る。

5.2.2 個別状況についての検討

(1) [I 0 の場合] I 0 では、 $w=0$ 、すなわち $\varepsilon - e = 0$ である。これは Fig. 5(a) の D-E 間の直結を意味する。その結果が同図(b)である。二つの並列接続バネが (58a) 式の K_E を構成し、 ρ はそのまま ρ_E となる。この場合 $p = -ek_f / \phi$ の流体圧力が発生する。実際上 K_b バネは十分弱く、これを削除して $\tau_x \doteq -p$ としても、大勢に影響しない。

$$V_{I0} = V_c \doteq (k_f / \phi \rho)^{1/2} \tag{60}$$

これは、(30b) 式で $\delta=0$ とした際の $V_{c,d}$ に一致する。

(2) [I ∞ の場合] I ∞ では、(43b, c) 式より

$$(\varepsilon - e) / e = w / u = \Gamma > 0 \tag{61a}$$

となる。これは D-E 間の歪みを次のように規定する。

$$\phi(\varepsilon - e) = \phi \Gamma e = [\phi \Gamma / K_b] \tau_x' \tag{61b}$$

従って D-E 間は $K_b / \phi \Gamma$ の等価バネで結ばれるが、結局 B-E 間のバネは十分弱く、I 0 の場合と同様に $\tau_x \doteq -p$ とみなせる。しかし、この等価バネの介在は e と e_f との関係を下記(61c)式のように変更する：

$$(1 + \phi \Gamma) e = \phi e_f \tag{61c}$$

その影響はまず (58a) 式の K_E に (そして v に) 及ぶ：

$$K_E \doteq - (p / \phi e_f) (\phi e_f / e) = (k_f / \phi) (1 + \phi \Gamma) \tag{61d}$$

これと、(59b) 式の ρ_E を (58a) の v 式に導入する：

$$V_{I\infty} = V_c [(1 + \phi \Gamma) / (1 + \gamma_2 \Gamma)]^{1/2} \tag{62}$$

(43c) 式によって Γ を表せば、(62) 式と (52b) 式の一致も確かめられる。I ∞ では I 0 より K_E や ρ_E は増すが、前者の増分がより大きいため ($\gamma_2 / \phi = \gamma_f < 1$)、 $V_{I\infty} > V_{I0}$ となる。() 内の関係は $\rho_s / \rho_f > 1$ を前提としている。

結局、I では骨格バネと流体のバネが並列して、全応

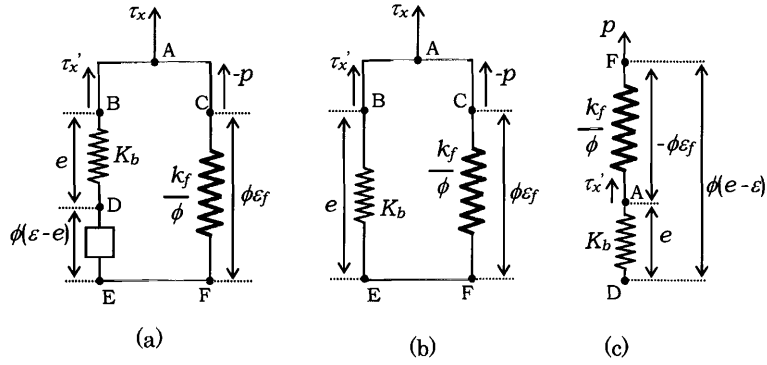


Fig. 5 Spring models of stress-strain relations corresponding to Fig. 4.
 (a) General relations.
 (b) I-wave at the low frequency limit.
 (c) II-wave at the low frequency limit.

力を受け止める。しかし、支持主体は流体バネであるため、全応力は殆ど流体圧に転化する。これがすべてのI波特性の根源である。

(3) $[\Pi 0, \Pi \infty]$ (43a, b)式より

$$\Pi 0 \text{ では } -\sigma_x/s=1, \quad \tau_x=0 \quad (63a)$$

$$\Pi \infty \text{ では } -\sigma_x/s=1+\Gamma, \quad -\tau_x/s=\Gamma>0 \quad (63b)$$

すなわち Fig. 4(c)に見るように、流体側が押し ($s<0$) なら、固体側は引く ($\sigma_x>0$) ことで、流体の体積変化を極力相殺し、 p の発生を最小に押さえている。このことがII波の特性をI波と著しく異なるものにする。この関係を Fig. 5 で見てみよう。

$\Pi 0$ では、 $\tau_x=0$ により Fig. 5(a) は同図(c)の直列接続型に転化する。この際は

$$p=\tau_x', \quad e-\phi\epsilon_f=\phi(e-\epsilon) \quad (64a)$$

$$K_E=\tau_x/e_x=0 \quad (64b)$$

(64a)第2式は Fig. 5(c)に直接適合するが、少々の変形で同図(a)にもあてはまる。

$\Pi \infty$ では(55b), (63b), (1)式から次の関係が得られる:

$$(1+\phi\Gamma)p=\tau_x' \quad (65a)$$

したがって、Fig. 5(c)はF-A間のバネについて次の置き換えをすれば、 $\Pi \infty$ のモデルに流用できる。すなわち、

$$p \rightarrow (1+\phi\Gamma)p, \quad k_f/\phi \rightarrow (1+\phi\Gamma)k_f/\phi \quad (65b)$$

p と共に k_f/ϕ も $(1+\phi\Gamma)$ 倍することで、(54c)式第1~2辺の関係は維持される。

Π では、骨格バネが直列の緩衝素子として働き、流体圧の発生を τ_x 程度のレベルに押さえる。

Fig. 5(c)では τ_x は表に出ていない。 $\Pi \infty$ について $K_E = \tau_x/e$ を引き出すためには、(63b)第2式、(65a)式、(55b)第1式等の導入による $\tau_x' \rightarrow \tau_x$ の変換を要する:

$$K_E = (\tau_x/p) (p/\tau_x') (\tau_x'/e) = \phi\Gamma K_b / (1+\phi\Gamma) \quad (65c)$$

$\Pi 0$ と $\Pi \infty$ では、(44)式より $w/u = -1/\phi$ である。したがって、 ρ_E は(59b)式により

$$\rho_E = \rho - \rho_2/\phi = \rho(1-\gamma_f) \quad (66)$$

上記の諸関係を(58a)式に導入すると、極軟状態でのII波速度が求められる。これを一括表記する:

$$\Pi 0: \quad (f/f_c \rightarrow 0 \text{ で}) \quad |v_{\Pi 0}| \rightarrow 0 \quad (67a)$$

$$\Pi \infty: \quad V_{\Pi \infty} = \left[\frac{\phi K_b}{\rho(1-\gamma_f)(1/\Gamma+\phi)} \right]^{1/2} \quad (67b)$$

(67b)式は若干変形すると、(50b)式に一致する。

極軟状態では $V_{\Pi \infty}$ を規定する実効弾性率は骨格の縦弾性率であり、そこに流体は関与しない。このため $V_{\Pi \infty}$ は V_S に近いものになる (Fig. 3(a)参照)。ただし、両者の関係は μ_b/k_b にも依存する。

6. まとめとむすび

流体飽和多孔質媒質における Biot 理論を前提として、骨格硬度の大幅な変化が弾性波諸特性に与える影響を調べた。縦波 (I 波, II 波) を主体に、速度の他、流体/固体の変位比、応力比をとりあげ、特に高周波極限 (∞) と低周波極限 (0) に着目した。骨格硬度 (硬度と略記) の指標としては骨格/流体の P 波速度比を用い、数値的な検討では、流体は水、固体は石英相当の物質とした。主な知見を以下に記す。(たとえば、I 波の低周波極限を I 0 と略記する)

(1) 縦波の速度 V は流体/固体の変位比 U/u と密接に関連する。特定の媒質条件のもとでは、I 波は周波数に依らず $U/u=1$ の動的同調状態となる。I ∞ ではそれよりも硬質なら $U/u<1$ 、軟質なら $U/u>1$ となる。

(2) I 波の流体/固体の「変位比」は II 波の固体/流体の「応力比」の逆符号値に等しい、という相反関係が成立する。ここで、「変位比」と「応力比」は交換可能で

ある。

(3) 未固結層（沖積層程度）の状態は、硬度低下の極限状態（極軟層）として近似できる。極軟層の縦波諸特性について、特に詳しく検討し、簡明な表現式を導いた。

(4) 軟質層での縦波の応力-歪み関係を、バネモデルで表した。固体と流体の応力は I 波で同相、II 波で逆相である。骨格バネ（縦弾性率）と流体バネ（体積弾性率）は、I 波では全応力に対し並列、II 波では有効応力に対し直列となる（厳密には I 0, II 0 で）。これが流体圧力を規定する。I 波では全応力は支持主体の流体にほぼそのまま伝達されるが、II 波では弱い骨格バネに支配され、流体圧力は相対的に微弱な有効応力レベルに留まる。

(5) 以上の研究によって、多孔質媒質（特に軟質層）における弾性波特性全般の根底が見晴らしやすくなった。未固結層の考察において、極軟層モデルは簡明で有効な手段となるはずである。

謝 辞

草稿の改善過程では小林芳正氏（地質計測㈱）のご指摘を、また英文表現などでは乗富一雄氏（秋田大学名誉教授）や岩崎好規氏（地域地盤環境研究所）のご意見を参考にした。これらの方々に感謝します。

参 考 文 献

Biot, M. A. (1956) : Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid : I Low-frequency range, Jour. Acous. Soc. Am., **28**, 168-178.
 狐崎長琅 (2004a) : 管の波からみた流体飽和多孔質媒質の縦波弾性波 : Biot 理論の単純化モデル, 物理探査, **57**, 151-172.
 狐崎長琅 (2004b) : Biot の波と管の波の連結についての補足,

物理探査, **57**, 477-488.

狐崎長琅 (2005a) : Biot の両種縦波に伏在する重要な諸性質, 物理探査, **58**, 319-329.

狐崎長琅 (2005b) : Biot の弾性係数と有効応力の概念, 物理探査, (投稿中)

小林源祐・桜井昌人・藤井勢之 (2005) : 透水性把握のための新しい EKL 検層システムの開発 (その 2), 物理探査学会第112回学会論文集, p. 66-69.

付録 相対変位による速度の表現

全応力 τ_x と歪みや加速度との関係から出発する。このため(3)の両式と(9a, b)式とについて、それぞれの和をとる。そして e_x, ϵ_x と u, U を、 u と w (相対変位) で書きかえると、次の 2 式が得られる :

$$\tau_x = -i\omega(Hu + Cw)/v; \quad \tau_x = -i\omega v(\rho u + \rho_2 w) \quad (A1a)$$

$$\tau_x \equiv \sigma_x + s, \quad w \equiv U - u, \quad C \equiv Q + R \quad (A1b)$$

ここでは、固体と流体からなる全体を系としているため、内力である相互結合力（粘性結合、質量結合）は消える。

(A1a)両式から次のような一般的関係が導かれる。

$$(v/V_c)^2 = (1 + \sigma_C w/u)/(1 + \gamma_2 w/u); \quad (A2a)$$

$$\sigma_C \equiv C/H = \sigma_{12} + \sigma_{22} = \phi \sigma_n, \quad \gamma_2 = \phi \rho_f / \rho \quad (A2b)$$

(A2a)式によると、 w/u が v/V_c を規定する。その詳論は狐崎 (2005a) に譲り、ここでは次の関係にのみ注意する :

$$w=0 \text{ か } \sigma_C/\gamma_2=1 \text{ なら, } v=V_c \quad (A3)$$

$\sigma_C/\gamma_2=1$ は(25)式の第 2~3 辺の關係に合致する。(25)式の他の辺の等式關係も(5b), (12c)式により導かれる。