

文章编号:1000-6893(2007)01-0118-05

# 钉载作用下多裂纹板的裂纹闭合接触问题

郭树祥, 许希武

(南京航空航天大学 航空宇航学院 结构强度研究所, 江苏 南京 210016)

## Frictional Contact Problems of a Finite Plate with Multiple Closed Cracks under Fastener Loads

GUO Shu-xiang, XU Xi-wu

(Research Institute of Structures and Strength, College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**摘 要:** 基于摩擦接触问题的数学规划解法,采用各向异性体平面弹性理论中的复势方法,建立了含裂纹群有限大各向异性板,在钉载作用下裂纹闭合或局部闭合问题的有效分析方法。忽略钉与孔间的摩擦,假设钉载沿孔边呈余弦分布,通过在可能闭合的裂纹边界引入互补变量函数并将其展成 Fourier 级数形式,以 Faber 级数为工具,应用保角映射技术和最小二乘边界配点法,导出裂纹面摩擦接触的线性互补模型,并通过算例验证了方法的有效性。数值结果表明,由于采用级数解描述板应力场和位移场,本方法具有较高的计算精度和效率,便于研究裂纹闭合对应力强度因子等断裂参数的影响。

**关键词:** 裂纹群; 线性互补问题; 复势方法; 摩擦接触; 应力强度因子; Faber 级数

**中图分类号:** O346.1 **文献标识码:** A

**Abstract:** Based on the mathematical programming procedure of the contact problem with friction and using the complex potential method in the anisotropic plane theory of elasticity, an efficient approach is presented to deal with the frictional contact of a finite anisotropic plate containing multiple cracks subjected to arbitrary loads of fasteners. The complementary parameters introduced to the contact boundary are expanded into the Fourier series, and the linear complementary model considering the crack closure is obtained by means of the Faber series expansion, conformal mapping and the least square boundary collocation technique. Some examples are given to demonstrate the correctness and effectiveness of the method. Numerical results indicate that the present method has many advantages such as high accuracy, good convergence, and is convenient to investigate the effects of crack closure on the fracture capabilities of structures.

**Key words:** multiple crack; the linear complementary problem; complex potential method; frictional contact; stress intensity factor; Faber series

本文基于摩擦接触问题的数学规划解法<sup>[1,2]</sup>,应用各向异性体平面弹性理论中的复势方法,在可能闭合的裂纹边界引入互补变量函数并将其表示为 Fourier 级数形式,将钉载沿钉孔边近似为余弦分布载荷,结合保角映射技术、最小二乘边界配点法和 Faber 级数展开,导出裂纹面摩擦接触的线性互补模型,建立了考虑裂纹闭合接触的钉载作用下平面多裂纹问题有效分析方法,并通过算例验证了该方法的有效性。数值结果表明,由于采用复势级数解<sup>[3,4]</sup>描述板的应力场和位移场,本文方法求解裂纹闭合问题时具有较高的精度,而且数据准备简单,讨论参数影响极为方便。

### 1 裂纹面接触条件表述

对于平面裂纹问题,将裂纹用短轴趋于零的椭圆来模拟,设其方程为: $z = z_0 + (a \cos \theta + ib \sin \theta) \cdot e^{i\alpha}$ ,式中: $z_0$ 为裂纹中心坐标; $a$ 为裂纹半长度; $b$ 趋于零; $\alpha$ 为裂纹倾角; $-\pi < \theta \leq \pi$ 。假设裂纹体处于线弹性范围内,小变形,接触表面的摩擦力遵守库仑定律,忽略动摩擦。沿裂纹方向建立局部坐标系,其接触表面的一部分如图 1 所示。设裂纹表面的切向及法向作用力(接触力)分别为  $F_{cr}(\theta)$  和  $F_{cn}(\theta)$ ,裂纹表面的位移在总体坐标系的投影为  $u_c(\theta)$  和  $v_c(\theta)$ ,则接触表面的切向及法向相对位移为

$$\left. \begin{aligned} u_{cr} &= [u_c(\theta) - u_c(-\theta)] \cos \alpha + \\ &\quad [v_c(\theta) - v_c(-\theta)] \sin \alpha \\ u_{cn} &= -[u_c(\theta) - u_c(-\theta)] \sin \alpha + \\ &\quad [v_c(\theta) - v_c(-\theta)] \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

收稿日期:2005-08-01; 修订日期:2006-03-28

基金项目:江苏省自然科学基金(BK99117);教育部跨世纪优秀人才计划;教育部优秀年轻教师基金

通讯作者:许希武, E-mail: xwxu@nuaa.edu.cn

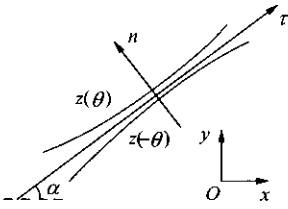


图 1 局部接触裂纹表面示意图

Fig. 1 Local surface of the closing crack

定义裂纹面切向及法向接触力

$$\left. \begin{aligned} P_{cr} &= -F_{cr}(\theta) = F_{cr}(-\theta) \\ P_{cn} &= -F_{cn}(\theta) = F_{cn}(-\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

则裂纹面需满足的接触边界条件可表为线性互补形式<sup>[2]</sup>

$$\left. \begin{aligned} P_{cr} &= E_{\tau}(u_{cr} - \lambda_1 + \lambda_2) \\ P_{cn} &= E_{\eta}(u_{cn} - \lambda_3) \\ f_k + v_k &= 0 \quad (k = 1, 2, 3) \\ v_k \cdot \lambda_k &= 0, \quad v_k, \lambda_k \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= E_{\tau}u_{cr} + \mu E_{\eta}u_{cn} - E_{\tau}\lambda_1 + E_{\tau}\lambda_2 - \mu E_{\eta}\lambda_3 \\ f_2 &= -E_{\tau}u_{cr} + \mu E_{\eta}u_{cn} + E_{\tau}\lambda_1 - E_{\tau}\lambda_2 - \mu E_{\eta}\lambda_3 \\ f_3 &= E_{\eta}u_{cn} - E_{\eta}\lambda_3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(3)、式(4)中:  $\mu$  为裂纹表面间的摩擦系数;  $E_{\tau}$  和  $E_{\eta}$  为惩罚因子, 理论上应趋于无穷大;  $\lambda_1, \lambda_2$  为切向滑动参数;  $\lambda_3$  为法向接触参数;  $v_k (k=1, 2, 3)$  为松弛变量。由式(1)、式(2)知接触面的相对位移  $u_{cr}, u_{cn}$  和接触力  $P_{cr}, P_{cn}$  可扩张为周期  $2\pi$  的奇函数, 且满足 Dirichlet 条件。

## 2 多椭圆孔多裂纹板平面弹性问题的级数解

考虑含任意分布多椭圆孔及裂纹群的有限大各向异性板, 受任意分布的钉载作用, 其中钉孔、椭圆孔和裂纹的总数为  $l$ , 板所占的域为  $S$ , 如图 2 所示, 其外边界为  $L_0$ , 内边界为  $L_1, L_2, \dots, L_l$ , 定义整标集  $I_R = \{p | L_p \text{ 为承受钉载的圆孔边界}, 1 \leq p \leq l\}$ ,  $I_c = \{p | L_p \text{ 为可能闭合的裂纹边界}, 1 \leq p \leq l\}$ , 设可能发生闭合的裂纹总数为  $l_c (l_c \leq l)$ , 将圆孔与裂纹统一用椭圆来模拟, 椭圆的长短半轴分别为  $a_m, b_m$ , 长轴与  $x$  轴正向夹角为  $\alpha_m$ , 中心坐标为  $z_m (m=1, 2, \dots, l)$ 。在仿射变换  $z_j = x + \mu_j y (j=1, 2)$  下, 域  $S$  变换为域  $S_j$ , 其中  $\mu_j (\text{Im}(\mu_j) > 0)$  是反映材料各向异性程度的复参数,  $S$  中的点  $z_m$  与  $S_j$  中的点  $z_{jm}$  相对应, 边界周线  $L_m$  与  $L_{jm}$  对应。

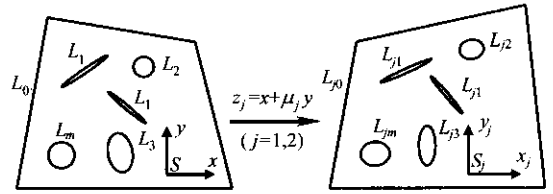


图 2 含多椭圆孔、多裂纹的有限大板

Fig. 2 A finite plate with multiple elliptical holes and cracks

假设不计体力作用且除钉孔外, 板在各内边界所受外载主矢均为零, 在  $S_j$  域上的复势函数  $\varphi_j(z_j) (j=1, 2)$  可表示为<sup>[3,4]</sup>

$$\varphi_j(z_j) = \sum_{m \in I_R} B_{jm} \ln \xi_{jm} + \sum_{m=1}^l \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{jmk}}{\xi_{jm,k}} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} z_{j,k} \quad (5)$$

式中:  $\xi_{jm}$  为由  $z_j$  平面经如下的保角变换所得<sup>[3]</sup>

$$z_j - z_{jm} = R_{jm} (\xi_{jm} + t_{jm} / \xi_{jm}) \quad (6)$$

式中:  $R_{jm}$  和  $t_{jm}$  可由  $\mu_j$  和椭圆孔的尺寸参数确定。

式(6)将  $z_j$  平面上边界  $L_{jm}$  的外部保角映射到  $\xi_{jm}$  平面上单位圆  $\xi_{jm} = e^{i\theta}$  的外部。式(5)中多值项系数  $B_{jm}$  根据平衡条件和位移单值条件, 可由钉孔所受外载主矢确定<sup>[4,5]</sup>。易知复势函数  $\varphi_j(z_j)$  在域  $S_j$  上解析。  $b_{jmk}$  和  $a_{jk}$  为待定系数, 由边界条件来确定。

若边界上给定边界应力  $X_n, Y_n$  或边界位移  $u(t), v(t)$ , 则边界条件可写为

$$\sum_{j=1}^2 [r_j \varphi_j(z_j) + s_j \overline{\varphi_j(z_j)}] = f_p(t) \quad (7)$$

( $p = 0, 1, 2, \dots, l$ )

对于应力边界条件和位移边界条件, 式(7)中  $r_j, s_j$  和  $f_p(t)$  分别对应不同的值, 可由  $X_n, Y_n$  或  $u(t), v(t)$  表示<sup>[3]</sup>。

在钉孔边界, 考虑间隙配合情况, 假设受钉载作用孔边压力呈余弦分布, 忽略钉与孔间的摩擦影响, 如图 3 所示, 则孔边作用的压力为

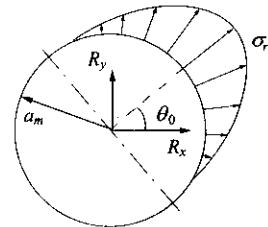


图 3 钉载的孔边压力分布

Fig. 3 The distribution of pressure caused by fastener loads

$$\sigma_r = \begin{cases} \sigma_0 \cos(\theta - \theta_0), & \theta \in \left[ \theta_0 - \frac{\pi}{2}, \theta_0 + \frac{\pi}{2} \right] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $\theta_0 = \arctan R_{,m} / R_{,m}$ ,  $\sigma_0 = \frac{2}{\pi \alpha_m} \sqrt{R_{,m}^2 + R_{,m}^2}$ 。

假设接触条件式(3)中的互补变量函数  $\lambda_k$ ,  $\nu_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) 均可扩张为周期  $2\pi$  的奇函数, 并满足 Dirichlet 条件, 将其展成 Fourier 级数

$$\lambda_{k,p} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\lambda}_{k,n,p} e^{in\theta} \quad (9)$$

$$\nu_{k,p} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\nu}_{k,n,p} e^{in\theta} \quad (10)$$

式中:  $p$  为第  $p$  个接触内边界,  $p \in I_c$ , 根据函数的奇偶性易知  $\hat{\lambda}_{k,n,p}$  和  $\hat{\nu}_{k,n,p}$  均为纯虚数, 且  $\hat{\lambda}_{k,-n,p} = -\hat{\lambda}_{k,n,p}$ ,  $\hat{\nu}_{k,-n,p} = -\hat{\nu}_{k,n,p}$ 。

将式(5)中函数  $\ln \xi_{jm}$ ,  $\xi_{jm}^n(z_j)$  和  $z_j^n$  在边界  $L_{jp}$  ( $p \neq m$ ) 所围域内展开成 Faber 级数<sup>[4]</sup>, 式(5)所有级数均取前  $N$  项部分和代入边界条件, 并考虑到在边界  $L_{jp}$  ( $p = 1, 2, \dots, l$ ) 上有  $\xi_{jp} = e^{i\theta} = \sigma$ , 即边界条件左边可表示为  $\sigma$  的幂级数形式。若  $p \notin I_c$ , 将边界条件右边直接展开为 Fourier 级数; 若  $p \in I_c$  则边界作用接触力  $F_{cr}$  和  $F_{cn}$ , 此时可根据式(1), 将裂纹表面的相对位移用复势函数  $\varphi_j(z_j)$  表示, 连同式(9)一并代入式(3)前两式, 结合式(2), 将裂纹表面接触力用待定系数  $b_{jmk}$ ,  $a_{jk}$  和  $\hat{\lambda}_{k,n,p}$  表示并代入边界条件式(7)右边, 同样将边界条件右边展开成 Fourier 级数, 令  $e^{i\theta} = \sigma$  且取至第  $N$  项, 令等式两边相同幂次  $\sigma_k$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$ ) 的系数相等, 即可得到关于  $b_{jmk}$ ,  $a_{jk}$  ( $j = 1, 2; m = 1, 2, \dots, l; k = 1, 2, \dots, N$ ) 和  $\hat{\lambda}_{k,n,p}$  ( $p \in I_c; k = 1, 2, 3; n = 1, 2, \dots, N$ ) 的  $2Nl$  个线性方程组。对于外边界  $L_{j0}$ , 采用最小二乘边界配点法<sup>[4]</sup>, 在  $L_0$  上取配点  $z_q$  ( $q = 1, 2, \dots, M$ ,  $M \geq 2N + 1$ ), 代入边界条件, 得到关于  $b_{jmk}$  和  $a_{jk}$  的  $M$  个线性方程组, 与由内边界得到的方程组联立求解, 将待定系数  $b_{jmk}$  和  $a_{jk}$  用  $\hat{\lambda}_{k,n,p}$  表示, 连同式(4)、式(10)一并代入式(3)中第 3 个方程, 得只含未知系数  $\hat{\lambda}_{k,n,p}$  和  $\hat{\nu}_{k,n,p}$  的  $3Nl_c$  个线性方程组, 写成矩阵形式

$$G\lambda + \nu = W \quad (11)$$

式中:  $\lambda = [\hat{\lambda}_{k,n,p}]_{3Nl_c \times 1}$ ,  $\nu = [\hat{\nu}_{k,n,p}]_{3Nl_c \times 1}$ 。

将互补变量函数  $\lambda_{k,p}$  和  $\nu_{k,p}$  分段线性化, 并以分点函数值  $\lambda'_{k,m,p}$  和  $\nu'_{k,m,p}$  代替  $\hat{\lambda}_{k,n,p}$  和  $\hat{\nu}_{k,n,p}$ , 将式(11)化为只含未知数  $\lambda'_{k,m,p}$  和  $\nu'_{k,m,p}$  的线性方程组, 形式如下

$$G'\lambda' + \nu' = W' \quad (12)$$

式中:  $\lambda' = [\lambda'_{k,m,p}]_{3Nl_c \times 1}$ ;  $\nu' = [\nu'_{k,m,p}]_{3Nl_c \times 1}$ ;  $G' = [g'_{ij}]_{3Nl_c \times 3Nl_c}$ ;  $W' = [w'_i]_{3Nl_c \times 1}$ 。通过分段线

性化, 接触边界的互补条件可简化为

$$\left. \begin{aligned} \lambda'^T \nu' &= 0 \\ \lambda' &\geq 0, \nu' \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式(12)、式(13)构成标准的线性互补问题, 可采用 Lemke 等算法求解<sup>[6]</sup>。求得  $\lambda'$  后, 再计算  $\hat{\lambda}_{k,n,p}$ , 然后将其代入由边界条件得到的方程组中, 即可解出复势函数  $\varphi_j(z_j)$  的全部待定系数  $b_{jmk}$  和  $a_{jk}$ , 从而得到含闭合裂纹平面问题的解答。

### 3 数值结果

(1) 考虑含中心水平裂纹的矩形板, 在裂纹两侧受对称的钉载  $Q$  作用, 钉孔半径  $r$ , 板在垂直方向作用均匀拉伸应力  $\sigma$ , 裂纹长度  $2a$ , 结构尺寸如图 4 所示。假设为平面应变状态, 材料呈各向同性, 取复参数  $\mu_1 = 0.999i$ ,  $\mu_2 = 1.001i$ , 弹性模量  $E = 206 \text{ GPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ 。取板的尺寸足够大:  $H/a = W/a = 200$ , 可看成无限大板情况, 根据文献<sup>[7]</sup>, 当钉载  $Q$  较小时, 裂纹张开, 随着载荷  $Q$  增加, 裂纹中段发生闭合, 根据对称性可知, 闭合接触区域的摩擦力为零, 设闭合区域宽度  $2b$ , 取级数部分和  $N = 20$ , 板每边的配点数  $m = 20$ , 惩罚因子<sup>[2]</sup>  $E_c = E_\eta = 10^3 E$ , 裂纹面摩擦系数  $\mu = 0$ 。图 5 给出了不同钉孔半径下裂尖的应力强度因子随闭合区域尺寸  $b$  的变化关系, 图中虚线为文献<sup>[7]</sup>的结果, 其中  $F_1 = K_1/\sigma \sqrt{\pi a}$  为归一化应力强度因子,  $h/a = 1$ 。当  $r/a = 0.01$  时, 本文计算结果与文献<sup>[7]</sup>关于集中力作用的结果吻合较好, 说明若钉孔半径足够小, 孔边的载荷  $Q$  完全可看成作用于板的集中力。图 5 的结果还表明, 相同闭合区域的裂纹尖端应力强度因子随着钉孔半径  $r$  的增加而增大, 而且闭合区域尺寸  $b$  越大, 应力强度因子越小。

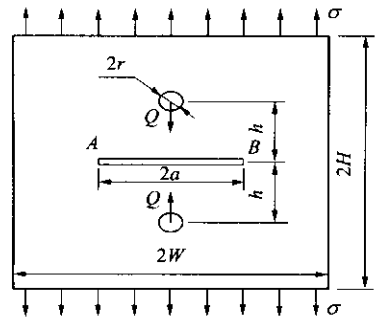


图 4 含裂纹板受均匀拉伸和钉载作用

Fig. 4 The plate containing a crack subject to tension and fastener loading

图 6 描述了板在均匀拉伸  $\sigma$  和不同钉载  $Q$  作用下变形后裂纹的形状, 结构参数  $r/a = 0.01$ ,

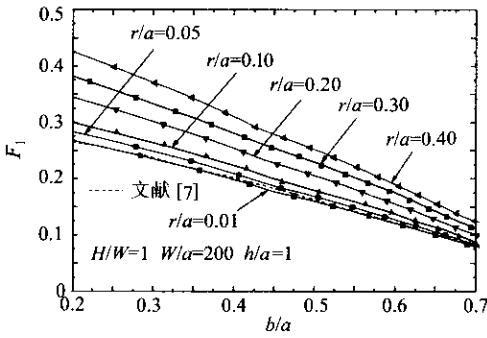


图 5 裂尖  $F_I$  随区域  $b/a$  的变化关系

Fig. 5 Variation of  $F_I$  versus the contact zone  $b/a$

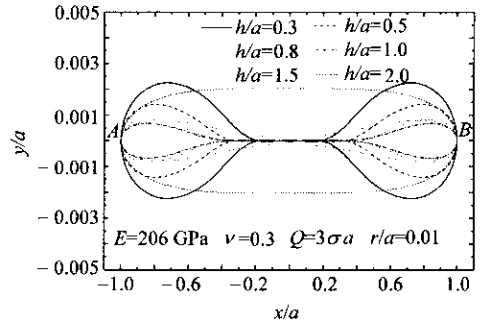


图 8 不同  $h/a$  比值时裂纹闭合的形状

Fig. 8 The shapes of crack under different ratio  $h/a$

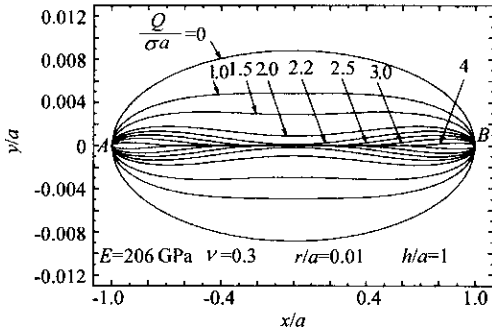


图 6 不同钉载  $Q$  作用下裂纹闭合形状

Fig. 6 The shapes of crack under different loadings  $Q$

$h/a = 1$ , 其他参数不变。当  $Q < 2.2\sigma_a$  时, 裂纹面不发生接触, 当  $Q > 2.2\sigma_a$  时, 裂纹的中部区域开始接触, 随着载荷  $Q$  的增加, 接触区域逐渐增大, 裂纹尖端张开位移逐渐减小。图 7 和图 8 反映了钉孔半径  $r$  和孔与裂纹间距  $h$  对裂纹闭合及裂尖张开位移的影响。 $r/a$  越大, 裂纹闭合区域越大, 但随着闭合区域增大, 裂尖的张开位移却并未减小, 而是略有增加, 因此裂尖的应力强度因子将随着钉孔半径的增加而增大。当  $h/a < 1$  时, 裂纹闭合区域随着距离  $h$  的增加而扩大, 裂尖张开位移也随之减小; 当  $h/a > 1$  时,  $h/a$  越大, 闭合接触区域越小, 裂尖张开位移也越大。因此, 选择适当距离施加使裂纹闭合的钉载可以有效地抑制裂纹的扩展。

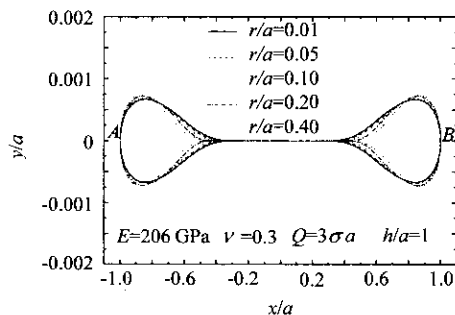


图 7 不同  $r/a$  比值时裂纹闭合形状

Fig. 7 The shapes of crack under different ratio  $r/a$

(2) 考虑含一钉孔和 3 条裂纹的正交各向异性板, 其一端固支, 在孔边作用单位厚度钉载  $Q$ , 载荷方向与水平方向夹角  $\theta$ , 裂纹长度分别为  $2b$  和  $2a$ , 裂纹  $AB$  的倾角  $\alpha$ , 结构如图 9 所示。尺寸参数:  $e/R = 3, L/R = 2, b/R = 0.5, h/R = 3, a/R = 1, W/R = 4, H/W = 1$ 。图 10 和图 11 描述了  $\alpha = 0^\circ$  时钉载方向  $\theta$  的变化对裂尖  $A$  端应力强度因子的影响, 其中  $\nu_{21} = 0.3, G_{12}/E_1 = 0.05$ 。数值结果表明, 材料两方向的模量比对裂纹应力强度因子的影响较大, 对于本例, 由于钉孔与裂纹  $AB$  沿  $E_2$  方向排列,  $E_2/E_1$  越大, 裂纹  $AB$  的  $K_{I}$  受钉载方向的影响越显著;  $E_2/E_1$  越小, 则裂纹  $AB$  的  $K_{II}$  受钉载方向的影响越显著。与模量的变化相比, 裂纹摩擦系数的变化对应力强度因子的影响很小, 根据图 11 的结果, 结合复合断裂判据可知, 若  $\mu = 0$  时裂纹  $AB$  不扩展, 则  $\mu > 0$  时裂纹也不会扩展。

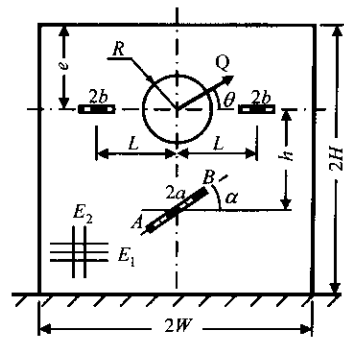


图 9 含多裂纹各向异性板

Fig. 9 The anisotropic plate with multiple cracks

图 12 和图 13 给出了水平钉载 ( $\theta = 0^\circ$ ) 时裂尖  $A$  端应力强度因子随裂纹倾角  $\alpha$  的变化曲线, 计算中取  $\nu_{21} = 0.3, E_2/E_1 = 1$ 。从图 12 可以看出, 当裂纹处于倾角  $\alpha = 135^\circ$  位置时, 裂纹尖端的 I 型应力强度因子达到最大, 其最大值随着剪切模量的增加而增大, 且靠近钉孔一侧裂尖的  $K_I$  大于另一侧; 在  $\alpha = 45^\circ$  位置附近, 裂纹处于闭合状态,

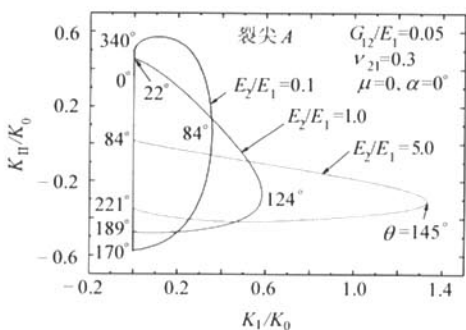


图10  $E_2/E_1$  对裂尖 A 处 SIFs 的影响

Fig. 10 Variation of SIFs at tip A versus  $E_2/E_1$

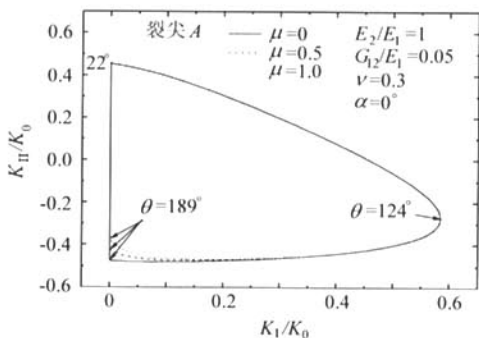


图11 摩擦系数  $\mu$  对裂尖 A 处 SIFs 影响

Fig. 11 Variation of SIFs at tip A versus coefficient  $\mu$

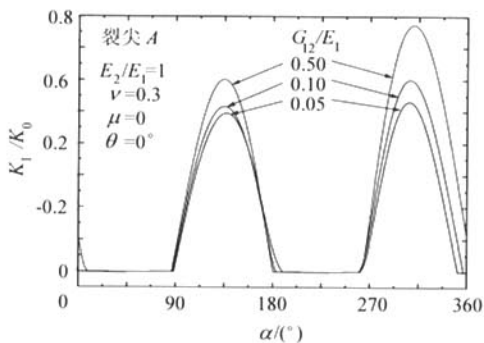


图12  $G_{12}/E_1$  对裂尖 A 处  $K_I$  的影响

Fig. 12 Variation of  $K_I$  at tip A versus  $G_{12}/E_1$

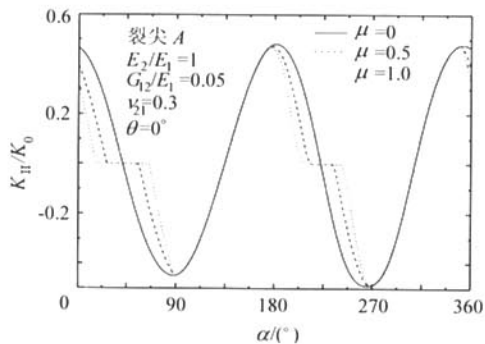


图13 摩擦系数  $\mu$  对裂尖 A 处  $K_{II}$  的影响

Fig. 13 Variation of  $K_{II}$  at tip A versus coefficient  $\mu$

应力强度因子  $K_I = 0$ , 此时若  $\mu \neq 0$ , 裂纹面将存在摩擦力, 摩擦力对应力强度因子的影响如图 13 所示. 摩擦系数  $\mu$  越大, 裂纹尖端的  $K_{II}$  在数值上

越小; 当  $K_{II} = 0$  时(即图中曲线的水平段), 裂纹处于粘着接触状态, 该状态的倾角范围也随着摩擦系数的增加而扩大.

### 参 考 文 献

[1] 陈国庆, 陈万吉, 冯恩民. 摩擦接触问题数学规划法的收敛性和算法的改进[J]. 计算结构力学及其应用, 1994, 11(4): 374-379.

Chen G Q, Chen W J, Feng E M. Convergence analysis of the mathematical programming method for solving frictional contact problems and an improved algorithm[J]. Computational Structural Mechanics and Applications, 1994, 11(4): 374-379. (in Chinese)

[2] 朱昌铭. 基于虚功原理的弹性接触问题的线性互补方法[J]. 力学学报, 1995, 27(2): 189-197.

Zhu C M. A linear complementarity method for elastic contact problems based on the principle of virtual work[J]. Acta Mechanica Sinica, 1995, 27(2): 189-197. (in Chinese)

[3] 郭树祥, 许希武. 任意多椭圆孔多裂纹无限大各向异性板应力强度因子求解的一种新方法[J]. 计算力学学报, 2006, 23(1): 7-12.

Guo S X, Xu X W. A new method for computing SIF of the infinite anisotropic plates containing multiple elliptical holes and cracks[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2006, 23(1): 7-12. (in Chinese)

[4] Xu X W, Yue T M, Man H C. Stress analysis of finite composite laminate with multiple loaded holes[J]. International Journal of Solids and Structures, 1999, 36: 919-931.

[5] 列赫尼茨基 C Г. 各向异性板[M]. 北京: 科学出版社, 1963.

Лехницкий С Г. Anisotropic plate[M]. Beijing: Science Press, 1963. (in Chinese)

[6] Lemke C E. Bimatrix game equilibrium points and mathematical programming[J]. Management Science, 1965, 11: 681-689.

[7] Chen Y Z. A contact crack problem in an infinite plate[J]. International Journal of Engineering Science, 1999, 37: 621-630.

### 作者简介:



郭树祥(1976—) 男, 博士生. 主要研究方向: 计算结构力学、断裂力学, 工程问题的力学建模与仿真. E-mail: nuaagsx@nuaa.edu.cn

许希武(1963—) 男, 教授, 博士生导师. 主要研究方向: 工程力学、固体力学、复合材料结构力学及飞行器结构强度等. E-mail: xwxu@nuaa.edu.cn