

# 自适应 Galerkin 间接边界元方法计算 三维线性静磁场问题

邹军<sup>1</sup>, 何金良<sup>1</sup>, 于海玉<sup>1</sup>, 滕文锐<sup>2</sup>

(1. 清华大学电力系统及发电设备控制和仿真国家重点实验室, 北京市 海淀区 100084;

2. 河南工业大学机电系, 河南省 郑州市 450042)

## An Adaptive Galerkin Approach of the Indirect Boundary Element Method for Calculating 3D Linear Magnetostatic Field

ZOU Jun<sup>1</sup>, HE Jin-liang<sup>1</sup>, YU Hai-yu<sup>1</sup>, TENG Wen-rui<sup>2</sup>

(1. State Key Lab of Control and Simulation of Power Systems and Generation Equipments, Tsinghua University, Haidian District, Beijing 100084, China; 2. Dept. of Electrical Engineering, Henan University of Technology, Zhengzhou 450042, Henan Province, China)

**ABSTRACT:** The indirect boundary element method has some special advantages for the 3D linear magnetostatic field calculation by using the equivalent magnetic surface charge. In order to improve the accuracy of solutions and decrease the computational costs, an adaptive Galerkin approach to solve the magnetostatic integral equation is presented by using the h-type refinement technology. The basic idea of the proposed approach can be summarized as follows. The error of magnetic flux density is globally minimized in the Galerkin sense in the implementation, so the continuity error of magnetic flux density of each element can be served as a criterion to guide the adaptive refinement. The singularity of geometric corners and edges can be overcome due to the scheme of the discretization of the integral equation with Galerkin's approach. In addition, a local resolution technology is proposed, which leads to the minimal refined unknown. The numerical examples show the proposed method is efficient and accurate by comparison to the analytical solutions and the measured results.

**KEY WORDS:** Adaptive meshing; 3D magnetostatic field; Magnetic surface charge; Local resolution; Galerkin method

**摘要:** 基于磁荷模型的三维间接边界元方法在计算静磁场问题上具有独特的优点, 为提高计算精度, 降低计算成本, 建立了以等效磁荷为待解变量, 基于 Galerkin 离散的三维静磁场积分方程自适应求解方法。其基本思想为: 由于单元只在加权意义下满足磁场积分方程, 故采用单元法线方向上磁通连续性条件满足情况作为自适应计算的判据。磁场积分方程采

用 Galerkin 方法进行离散, 避免了区域边点和角点几何奇异性对解答的影响。为进一步提高计算效率, 提出了一种场量局部更新求解技术, 使得每次自适应计算的规模大为降低。通过与解析计算结果和测量结果比对, 数值算例证明了该方法的正确性和有效性。

**关键词:** 自适应剖分; 三维线性静磁场; 表面磁荷; 局部节点更新; Galerkin 方法

## 1 引言

本文讨论基于积分方程法三维线性静磁场的计算问题。对于三维开域静磁场计算问题, 剖分仅在线性磁媒质表面进行, 边界元方法更为合适<sup>[1-6]</sup>。从等效源观点出发, 磁场积分方程可基于单层和双层等效源两种方法<sup>[7-9]</sup>。从计算效率角度考虑, 双层等效源方法需在边界上设置双标量位, 故单层等效源方法计算效率较高, 但磁媒质内部, 由于消去误差影响, 场量计算精度较差。文献[10-11]给出了基于差场概念改进的新单层等效源磁场积分方程的计算方法, 改进后的方法可同时精确计算磁媒质内外的场量。

电磁场数值计算领域, 自适应计算方法是一个持久而弥新的研究课题。目前, 有限元方法的自适应计算研究得比较充分<sup>[12]</sup>, 而边界元自适应计算方法的报道并不多见。文献[13]介绍了静电场边界元自适应计算问题, 其提出的误差判据不适用于磁场

问题，同时，该文采用节点匹配法求解磁场积分方程，此时，边点和角点的几何奇异性对解答精度影响较大，从而影响自适应计算的效果。文献[14]讨论了二维静电场中边界元方法自适应计算的误差判据。对于电介质材料，其相对介电常数与空气相差不大，电介质内部区域中场量相对容易准确求解，这构成了文献[9]中自适应计算的基础。对于磁场问题，磁媒质的磁导一般远大于空气，计算中由于计算中消除误差的影响，磁媒质中场量很难准确求解，因此，如何准确计算磁媒质中的场，如何将文献[14]中方法推广应用到磁场中，还需要进一步的研究工作。

本文以改进的单层源磁场积分方程为基础<sup>[10-11]</sup>，建立了以等效磁荷模型为待解变量，基于 Galerkin 离散的三维静磁场积分方程自适应求解方法。其基本思想为：由于单元只是在加权意义下满足磁场积分方程，故可采用单元法线方向上磁通连续性条件满足情况作为自适应计算的判据。采用 Galerkin 方法进行离散，所有匹配点选在单元的高斯采样点上，避免了区域边和角点几何奇异性对解答的影响。为提高计算效率，本文进一步提出了一种场量局部更新求解技术，使得每次自适应计算的规模大为降低。通过与球模型解析计算结果和列车位置传感器测量结果的比对，证明了本文方法的有效性和正确性。

## 2 计算方法简介

### 2.1 基于磁荷概念的三维磁场边界积分方程

图 1(a)为布置有等效磁荷的磁媒质和空气分界面示意图。对于线性磁场问题，场域中任意点处磁场强度  $\mathbf{H}$  可表示为

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_c + \mathbf{H}_m \quad (1)$$

其中， $\mathbf{H}_c$  为外施的激励磁场，为已知量； $\mathbf{H}_m$  为磁媒质表面磁荷  $\mathcal{S}_m$  产生的响应场，为待解量。为方便计，引入归一化表面磁荷密度

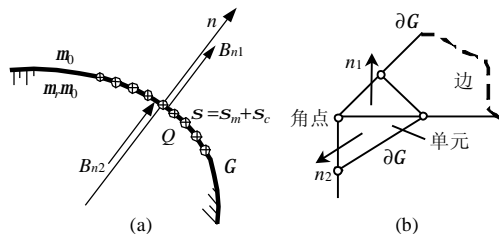


图 1 分界面条件和几何角点奇异性示意图

Fig. 1 Conditions on the interface and the singularity of the geometric and discretized points

$$\mathcal{S}_m = \frac{\mathcal{S}_m}{\mathbf{m}_0} \quad (2)$$

其中， $\mathbf{m}_0$  为自由空间磁导率。将  $\mathbf{H}_m$  用等效磁荷表示，则式(1)可改写为

$$l \frac{W}{4\pi} \mathcal{S}_m + \int_s \mathcal{S}_m \nabla \left( \frac{1}{4\pi R} \right) ds = \mathbf{H}_c \cdot \mathbf{n} \quad (3)$$

其中， $l = \frac{\mathbf{m}_r + 1}{\mathbf{m}_r - 1}$  为常数； $\mathbf{m}_r$  为磁媒质相对磁导率；

$R = |\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_s|$  为场点与源点之间的距离； $\mathbf{n}$  为媒质分界面法向，如图 1(a)所示。 $W$  为场点  $Q$  沿  $\mathbf{n}$  方向的立体角。

### 2.2 Galerkin 方法离散磁荷边界积分方程

式(3)构成了以表面磁荷  $\mathcal{S}_m$  为待解量的第二类 Fredholm 积分方程。对于光滑连续的边界面，式(3)可采用点匹配方法直接求解。但对于图 1(b)所示的几何角点和边点，在这些点法向定义不唯一，直接采用点匹配方法处理这些点比较困难。为解决角点和边点几何奇异性问题<sup>[15-16]</sup>，令式(3)在整个边界上的加权余量为零，则

$$\oint_{G_i} F_i \left[ \frac{W}{4\pi} l \mathcal{S}_m + \int_s \mathcal{S}_m \nabla \left( \frac{1}{4\pi R} \right) ds - \mathbf{H}_c \cdot \mathbf{n} \right] dG_i = 0 \quad (4)$$

其中， $F_i$  为任意权函数。将整个边界面离散为一系列平面三角单元，对第  $i$  个单元取  $F_i$  为三角单元的各节点对应的形状函数  $N_i$ ，同时，将匹配点设置在三角单元的高斯积分点处，这样，在匹配点处  $W=2\pi$ ，则式(4)可进一步简化为

$$\frac{l}{2} \int_{s_i} \mathcal{S}_{m,i} N_i ds_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\mathcal{S}_{m,j}}{4\pi} \int_{s_i} \int_{s_j} \frac{\cos(\mathbf{r}_{ij}^0, \mathbf{n})}{r_{ij}^2} N_i ds_i ds_j = \int_{s_i} H_{n,i}^s N_i ds_i \quad i=1, 2, \dots, n \quad (5)$$

其中， $s_i$  和  $s_j$  分别为单元  $i$  和单元  $j$  的面积； $r_{ij}$  为单元面积分时单元高斯积分点之间的距离； $\mathbf{r}_{ij}^0$  为其单位矢量。在单元内采用线性插值，则单元内磁荷密度  $\mathcal{S}_i(\mathbf{x}, \mathbf{h})$  可表示为

$$\mathcal{S}_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \sum_{k=1}^3 N_k(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \mathcal{S}_{i,k} \quad (6)$$

式中  $(\mathbf{x}, \mathbf{h})$  为单元局部坐标； $N_k(\mathbf{x}, \mathbf{h})$  为单元形状函数； $\mathcal{S}_{i,k}$  为单元节点处的磁荷密度。

由式(6)对各节点应用式(5)，则

$$\mathbf{K} \mathbf{s} = \mathbf{C} \quad (7)$$

式中  $\mathbf{K}$  为系数矩阵； $\mathbf{s}$  为各节点的磁荷密度； $\mathbf{C}$  为由激励场确定的方程的右端项。为了消除误差的影响，精确求解磁媒质内的场量，文献[10]给出一种基于差场概念的求解方法，简言之，应用式(7)

分别计算真实磁导率情况下磁荷  $S_{magn}$  和无限大磁导率情况下的磁荷  $S_{comp}$ , 则媒质内外的场量可分别为<sup>[10]</sup>

$$H_{G,in} = H_{magn} - H_{comp} + \frac{S_{magn} + S_{comp}}{2m_r} n + \frac{1 - m_r}{m_r} [(H_{magn} - H_{comp}) \cdot n] n \quad (8)$$

$$H_{G,out} = H_{magn} - H_{comp} + \frac{S_{magn} + S_{comp}}{2m_r} n \quad (9)$$

式中

$$\begin{cases} H_{magn} = -\int_s S_{magn} \nabla \left( \frac{1}{4\pi R} \right) ds \\ H_{comp} = -\int_s S_{comp} \nabla \left( \frac{1}{4\pi R} \right) ds \end{cases} \quad (10)$$

### 2.3 基于单元细分 H-型自适应计算

在分界面上, 磁通密度法线方向应保证连续, 但是式(7)只在加权余量最小意义下成立, 因此, 可定义各节点处磁通密度法向误差为

$$\Delta B_n = m_0 (H_{G,out} - m_r H_{G,in}) \cdot n \quad (11)$$

原则上, 式(11)可作为自适应计算的判据, 但式(11)涉及各节点处场量的求解, 此时仍需考虑角点和边点的几何奇异性问题。为避免这一数值处理上的困难, 将自适应计算的误差判据定义在单元内部, 对第  $i$  单元

$$y_{err,i} = \frac{\sqrt{\int_{s_i} \Delta B_n^2 ds_i}}{y_{max}} \quad (12)$$

式中  $y_{max}$  为单元磁通的范数意义下的最大值, 即

$$y_{max} = \max_{\text{all element}} \sqrt{\int_{s_i} (m_0 H_{G,out} \cdot n)^2 ds_i} \quad (13)$$

容易理解, 式(12)定义的误差判据中磁媒质中场量精确计算是非常重要的。

自适应迭代过程中单元细分过程如图 2 所示。设节点 0 周围第  $k$  迭代剖分单元如图 2(a), 由式(12)确定  $\Delta 023$  和  $\Delta 056$  不满足精度要求, 在上述单元重心处添加节点, 形成第  $k+1$  次迭代剖分的单元, 如

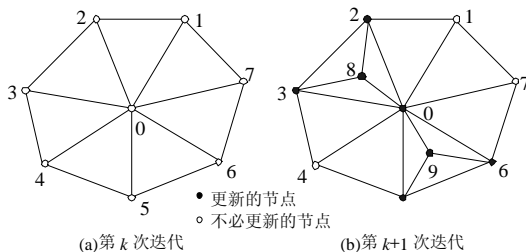


图 2 单元细分过程示意图

Fig. 2 Demonstration of adaptive refinement process

图 2(b)所示。这种节点的添加方式所形成单元可能形成“坏”的形状(钝角三角形), 不过, 由于式(4)采用 Galerkin 方法离散积分方程, 单元形状对系数矩阵的影响减弱, 数值算例表明磁场积分方程法计算结果对单元形状并不敏感。

### 2.4 节点局部更新求解技术

上节讨论了基于单元细分 H-型自适应迭代过程, 对于不同剖分网格, 需重新计算对应的系数矩阵, 并对型如式(7)的方程求解。如所周知, 边界元法所形成的系数矩阵为不对称满阵, 且方程组易呈病态性质, 因此, 反复求解式(7)是不合理的。在自适应计算中, 本文对迭代过程中单元做标志, 若一个单元不涉及添加节点的操作, 则该单元所属的节点认为是准确的, 在下次迭代中不参与运算。具体实施方案为: 设第  $k$  次迭代满足自适应误差判据节点上磁荷密度为  $s_1$ , 需重新计算的节点磁荷密度为  $s_2$ 。将所有不需要重新计算节点放在方程组最前面, 改写式(7)如下,

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

对第  $k+1$  次迭代  $s_1$  为已知量, 则式(14)可降阶为

$$(K_{22} - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12}) s_2 = (C_2 - K_{21} K_{11}^{-1} C_1) \quad (15)$$

图 2(b)分别用实心点和空心点标识了迭代过程中需要改进的节点和数值保持不变的节点。显然, 式(15)实现了迭代过程中只更新需要改进的节点, 是一种局部求解的技术。式(15)一方面减小了计算规模, 另一方面大大改善了式(7)方程组的条件数, 有利于方程组的准确求解。

图 2(b)中新节点添加过程仅为节点局部更新算法的原理示意图, 实际计算中, 单元划分若采用 Delaunay 算法, 单元实际分布情况与图 2(b)会有所不同。同时, 在程序实现中, 式(15)中  $K_{11}$  矩阵求逆过程可不进行, 而采用类似有限元方法中第一类边界条件的处理方式, 从而可进一步提高计算效率。

## 3 数值算例

### 3.1 算例 1: 匀强磁场中均匀导磁球

图 3 是匀强磁场中置有均匀导磁球的坐标系统示意图, 设外加激励磁场沿  $z$  轴方向, 球内部和外部的磁感应强度可解析计算<sup>[17]</sup>, 为简单计, 给出球内磁感应强度  $z$  轴分量为

$$B_{z,in} = \frac{3m_r B_0}{m_r + 2} \quad (16)$$

球外磁感应强度  $z$  轴分量为

$$B_{z,out}(x,y,z) = B_0 + 3 \frac{m_r - 1}{m_r + 2} \frac{R^3 B_0 z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{m_r - 1}{m_r + 2} \frac{R^3 B_0}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (17)$$

设球的半径为1cm，激励场沿  $z$  轴方向，设  $B_0=1T$ ,  $m_r=100$ 。定义图 3 中沿  $y$  方向直线  $OAB$  为校验线，其中  $A$  点坐标和  $B$  点坐标分别为(0,1,0)和(0,5,0)。球表面初始网格和第 3 次细分后节点和单元俯视图如图 4 所示。 $B_z$  在球内和球外解析结果和数值计算结果如图 5、6 所示。各次单元平均误差和添加节点在总节点中的比例见表 1 所示。从图 5、6 可以看出，对于磁媒质区域内部和靠近磁媒质的区域，自适应细分对计算精度改善效果比较明显，对于磁媒质内部，自适应细分对计算精度改善效果更为明显。虽然本算例中场的分布具有对称性，但由于采用无结构的三角型网格，网格划分并不能保证具有对称性，因此，自适应过程实质调整

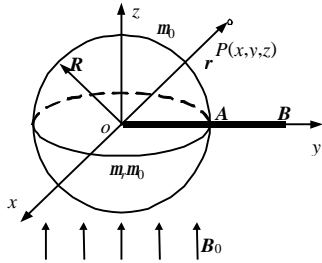


图 3 均匀磁场中介质球坐标系示意图  
Fig. 3 Configuration of a sphere in a homogeneous magnetic field

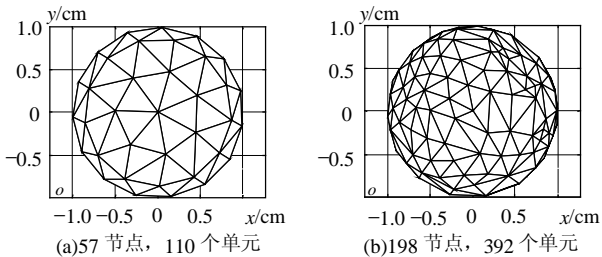


图 4 初始与加密后剖分单元示意图

Fig. 4 Nodes and elements of the initial and 3rd refinement

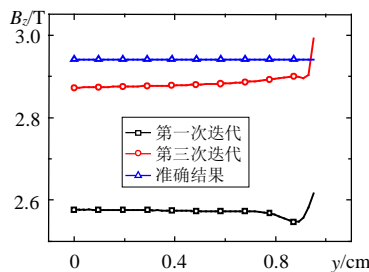


图 5 球内校验直线上磁感应强度  $z$  方向分量  
Fig. 5 Magnetic flux density along the checking line inside the sphere

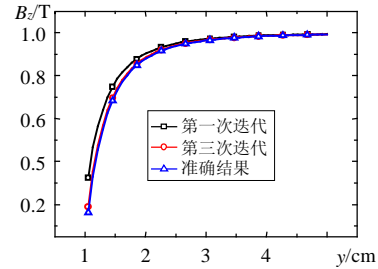


图 6 球外校验直线上磁感应强度  $z$  方向分量  
Fig. 6 Magnetic flux density along the checking line outside the sphere

表 1 各次迭代误差

Tab. 1 Error of each mesh refinement

迭代次数	添加节点比例/%	单元平均误差/%
1	23	9.5
2	15	3.2
3	3	0.9

了网格在球面上分布，使网格近似关于  $z$  轴对称，从而改善计算精度。

### 3.2 算例 2: 长方体铁心线圈自感和互感的计算

铁路列车位置传感器由长方体磁芯和感应线圈组成，其通过接收铁轨上传来的载频信号实现与机车控制中心的信息传递。传感器结构示意图如图 7(a)和 7(b)所示。图 7(a)是长方体铁心和线圈剖视图，图 7(b)为侧视图。其相应几何尺寸已标示在图中，图中各量单位为 mm。铁心由厚度为 0.1mm 的硅钢片叠制而成，传感器工作频率小于 1kHz，考虑硅钢片透入深度，该磁芯磁场计算可按静磁场处理。线圈由  $F0.81mm$  铜线绕制，分 3 层，共 316 匝。如图 7(c)所示，改变线圈 A 和线圈 B 中心线之间的距离  $d$ ，分别计算不同  $d$  情况下线圈的自感和互感。自感基本不受  $d$  的影响，其计算值和测量值分别为 31.0mH 和 31.3mH，以测量值为基准，计算误差为 0.96%。不同  $d$  情况下，线圈间互感计算结果、测量结果和相应误差如表 2 所示。从表中可见，计算结果和测量结果相比，误差在 1% 左右。对于

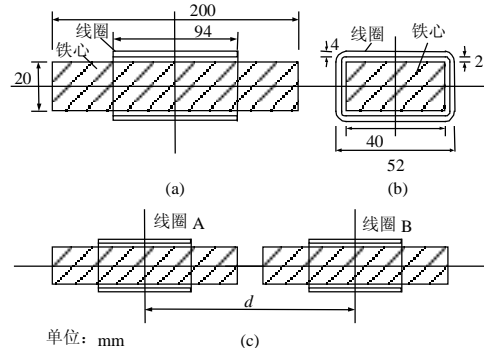


图 7 长方体铁心和线圈结构示意图  
Fig. 7 Configurations of the cubic iron and coils



表2 线圈互感计算值和测量值的比较

Tab. 2 Comparisons of the mutual inductance between the calculated and measured results

$d/\text{mm}$	测量值/mH	计算值/mH	误差/%
200	17.6	17.5	-0.57
210	15.8	15.9	0.63
220	14.4	14.3	-0.69
230	12.6	12.7	1.11
240	11.6	11.5	-0.35
250	10.2	10.3	0.98

长方体磁芯, 存在角点和边点几何奇异性问题, 若直接将匹配点选在节点上, 则角点和边点处需特殊处理, 而采用本文方法, 所有匹配点均在单元内, 无几何奇点问题。采用本文自适应算法, 可自动在角点和边点处布置较多单元, 而在其它位置单元相对较少。

#### 4 结论

本文讨论了自适应 Galerkin 间接边界法计算三维静磁场若干问题。给出了基于磁荷模型 Galerkin 离散的具体格式, 提出了自适应计算的判据和步骤。对于系数矩阵的求解, 在自适应计算的基础上, 提出了磁荷方程组的局部求解方法, 有效地降低了迭代过程中方程组的求解规模。

#### 参考文献

- [1] Zhou P B. Numerical analysis of electromagnetic fields[M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag Press, 1993.
- [2] 王泽忠, 王炳革, 卢斌先, 等. 三维开域涡流场 A-V 位有限元与边界元耦合方法分析[J]. 中国电机工程学报, 2000, 20(5): 1-4. Wang Zezhong, Wang Bingge, Lu binxian, et al. FE-BE coupling method of 3D open boundary eddy current fields in potential A-V [J]. Proceedings of the CSEE, 2000, 20(5): 1-4.
- [3] 姜保军, 孙力, 李波. 电磁检测中的开域电磁场数值计算[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(8): 156-160. Jiang Bojun, Sun Li, Li Bo. Study of numerical computation of open boundary field in electromagnetic detection[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(8): 156-160.
- [4] 赵志斌, 崔翔, 张波, 等. 多层土壤中含有不同电阻率块状媒质时的接地网分析[J]. 中国电机工程学报, 2004, 24(9): 218-223. Zhao Zhibin, Cui Xiang, Zhang Bo, et al. Analysis of grounding systems in multi-layer soil with finite volumes of different resistivity[J]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(9): 218-223.
- [5] 吴立建, 王群京, 杜世俊, 等. 磁场积分法在永磁步进球形电动机场分析中的应用[J]. 中国电机工程学报, 2004, 24(9): 192-197.

- Wu Lijian, Wang Qunjing, Du Shijun, et al. Integral equation method for simulation of magnetic field of permanent magnetic spherical steppe[J]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(9): 192-197.
- [6] 郑勤红, 盛剑霓, 解福瑶, 等. 用二阶矢量位计算三维矢量磁位静磁场问题的多极理论[J]. 中国电机工程学报, 1998, 18(4): 279-282. Zheng Qinghong, Shen Jianni, Xie Fuyao, et al. Multipole theory for 3D magnetic vector potential magnetostatic field problems using the second order vector potential[J]. Proceedings of the CSEE, 1998, 18(4): 279-282.
- [7] Lindholm D A. Notes on boundary integral equations for three dimensional magnetostatics[J]. IEEE Trans.on Magn, 1980, 16(6): 1409-1413.
- [8] Peng J P, Salon S, Chari V K. A comparison of finite element and boundary element formulations for three dimensional magnetostatic problem[J]. IEEE Trans.on Magn, 1984, 20(5): 1950-1952.
- [9] Rucker W M, Richter K R. Three dimensional magnetostatic field calculation using boundary element method[J]. IEEE trans. on Magn, 1988, 24(1): 23-26.
- [10] Babic S, Skyel C, Gavrilovic M M. Calculation improvement of 3D linear magnetostatic field based on fictitious magnetic surface charge[J]. IEEE Trans. on Magn, 2000, 36(5): 3125-3127.
- [11] Kim D H, Park I H, Park M C et al. 3D magnetostatic field calculation by a single layer boundary integral equation method using a difference field concept[J]. IEEE Trans. on Magn, 2000, 36(5): 3134-3136.
- [12] Brebbia C A, Aliabadi M H. Adaptive finite and boundary element methods[M]. London NewYork: Elsevier Applied Science, 1993.
- [13] Ashtiani B H, Krahenbuhl L, Nicolas A. Adaptive meshing for the boundary integral equation method: definition and test of an error estimator[J]. IEEE trans. on Magn, 1998, 34(5): 3443-3446.
- [14] Spasojevic M, Levin P L. On adaptive refinement for boundary integral methods in electrostatics[J]. IEEE Trans. on dielectrics and electrical insulation, 1994, 1(6): 963-974.
- [15] Brebbia C A, Telles J C F, Wrobel L C. Boundary element techniques, theory and applications in engineering[M]. Berlin: Springer Verlag, 1984.
- [16] Shen J, Sterz O. A mixed Galerkin and collocation approach for treating edge and corner problems in the boundary element method [J]. IEEE trans. on Magn, 1998, 34(5): 3296-3299.
- [17] Jackson J D. Classical electrodynamics[M]. NewYork: Wiley, 1962.

收稿日期: 2005-11-29。

作者简介:

邹军(1971-), 男, 湖北人, 博士, 副教授, 研究方向为电磁场数值计算;

何金良(1966-), 男, 湖南人, 博士, 教授, 研究方向为电磁环境技术、电介质材料及配电自动化;

于海玉(1979-), 女, 山东人, 博士研究生, 研究方向为电磁场数值计算。

(责任编辑 云爱霞)