

## 一种基于折线逼近的对数似然比简化算法

闫涛 茹乐 杜兴民  
(空军工程大学工程学院 西安 710038)

**摘要:** 针对 16QAM 信号的对数似然比计算, 该文提出一种新颖的折线逼近简化算法, 采用分段的折线逼近 16QAM 信号的对数似然比曲线, 进而使用简单的线性运算替代原标准 LLR 算法中复杂的非线性运算, 仿真结果表明, 该算法可以理想地逼近标准 LLR 算法的计算结果, 在 BITCM 系统中应用不会带来系统的性能折损。

**关键词:** 16QAM; 对数似然比算法; 折线逼近; BITCM

中图分类号: TN919

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)08-1832-04

## A Simplified Log-Likelihood Ratio Algorithm with Broken Line Analysis

Yan Tao Ru Le Du Xing-min

(Engineering Institute, Air force Engineering University, Xi'an 710038, China)

**Abstract:** In this paper, a novel simplified algorithm with broken line analysis is proposed for the log-likelihood ratio calculation of 16QAM signals. In this novel algorithm several line segments are introduced to approach the LLR curves of 16QAM signals, which results that the complicated nonlinear computations in the optimum algorithm are replaced with simple linear one. The simulation show that the algorithm in this paper can be a perfect approach to the optimum LLR algorithm in calculation results; and the performance will not degrade when it is applied in BITCM systems.

**Key words:** 16QAM; Log-likelihood ratio algorithm; Broken line analysis; BITCM

### 1 引言

近年来, 随着各种通信业务的日益增加, 有限的频谱资源显得愈加珍贵, 因此提高系统的频带利用率, 实现高效的数据传输成为目前通信领域的研究热点。

基于高阶调制的通信系统通常需要较大的 SNR 才能获得理想的系统性能, 将 Turbo 码<sup>[1]</sup>等性能优越的新型信道编码技术与高阶调制结合可以克服这一缺陷, 文献[2-4]分别提出了称之为 PCTCM, T-TCM 和 BITCM 的 Turbo 编码调制方案, 获得了优异的性能, 其中比特交织 Turbo 编码调制(BITCM)方案以其系统设计灵活、实现简单、通用性较强一直备受关注。

BITCM将标准Turbo编码器输出的编码比特经过交织后映射到调制信号星座的信号点, 接收端通过软输出解调算法得到编码比特的“软信息”, 经相应的解交织后输入至标准Turbo译码器。软输出解调算法对BITCM系统性能的好坏起着关键性作用, 通常采用基于最大后验概率准则的对数似然比(Log-Likelihood Ratio, LLR)算法计算高阶调制信号的软输出解调信息, 由于算法涉及指数与对数运算, 复杂度较高, 实现起来非常困难。已经提出的简化算法大多是根据雅

可比对数公式将标准的对数似然比算法进行改进得到的<sup>[5-7]</sup>, 文献[4]不加推导的给出一组简单的递推计算公式, 但仿真结果表明, 该算法带来的性能损失比较明显。针对Gray映射方式下的16QAM信号的对数似然比计算, 本文提出了一种全新的折线逼近方法, 该方法使用简单的线性运算替代标准算法中复杂的非线性运算, 大大降低了LLR计算的复杂度, 并且能够理想地逼近标准对数似然比算法的计算结果, 基于BITCM系统的仿真结果表明, 该简化算法不会带来性能损失。

### 2 16QAM 信号星座及其对数似然比算法

正交幅度调制(QAM)是一种不拓展频带带宽的多进制调制技术, 由于其综合了脉冲幅度调制(PAM)与相位键控(PSK)两种调制方式的优点, 因此在各类无线通信系统中得到了广泛的应用。16QAM 是使用最为广泛的 M-QAM 调制方式之一, 其信号星座结合不同的相位与幅度组合共有 16 个信号点, 在进行符号映射时, 通常采用 Gray 映射方式。图 1 为其中一种 Gray 映射方式下的 16QAM 信号星座图, 图中每个信号点可以使用 4 个元素的比特向量( $b_1, b_2, b_3, b_4$ )来表征, 其中,  $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \{0,1\}$ 。从星座图可以看出,  $b_1$  与  $b_2$  决定了 16QAM 信号的同相分量,  $b_3$  与  $b_4$  则决定了信号的正交分量, 由于信号星座 I、Q 两路的对称性,  $b_1$  与  $b_3, b_2$  与  $b_4$  具有同样的判决边界, 因此在考察映射比特

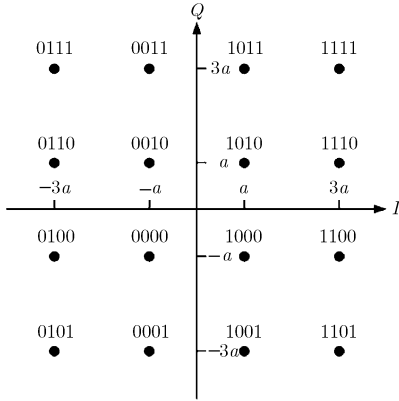


图 1 Gray 映射下的 16QAM 星座图

的对数似然比计算时只选择同相分量即  $b_1, b_2$  进行分析即可。

考虑 16QAM 信号在 AWGN 信道中的传输。设  $s_i (i=1, 2, \dots, 16)$  表示需要传输的 16QAM 信号, 则通过 AWGN 信道受噪声污染后的接收信号可表示为

$$r = s_i + n \tag{1}$$

这里  $r = r_I + jr_Q$ ,  $n = n_I + jn_Q$  分别表示接收信号与噪声, 噪声  $n$  的同相分量  $n_I$  与正交分量  $n_Q$  是相互独立的零均值高斯随机变量, 且  $E[n_I^2] = E[n_Q^2] = \sigma^2$ 。

基于最大后验概率准则, 映射比特  $b_i$  的对数似然比定义为

$$\text{LLR}(b_i) = \ln \left( \frac{\Pr(b_i = 1 | r)}{\Pr(b_i = 0 | r)} \right) \tag{2}$$

为了便于分析, 将图 1 中信号星座的幅度  $a$  设为 1, 根据 I、Q 两路信号的独立性, 按照定义式(2),  $b_1, b_2$  的 LLR 计算公式分别为

$$\text{LLR}(b_1) = \ln \left[ \frac{e^{-K(r_I-3)^2} + e^{-K(r_I-1)^2}}{e^{-K(r_I+3)^2} + e^{-K(r_I+1)^2}} \right] \tag{3}$$

$$\text{LLR}(b_2) = \ln \left[ \frac{e^{-K(r_I-3)^2} + e^{-K(r_I+3)^2}}{e^{-K(r_I-1)^2} + e^{-K(r_I+1)^2}} \right] \tag{4}$$

其中  $K = 1/2\sigma^2$ 。可以看出, 标准的对数似然比算法需要进行复杂的指数与对数运算, 这在工程应用中是不可取的。

### 3 采用折线逼近的 16QAM 对数似然比简化算法

#### 3.1 标准对数似然比函数的曲线特征

为了表述及研究的方便, 本文使用函数  $y = F_1(x)$ ,  $y = F_2(x)$  分别表示式(3)与式(4)中  $b_1, b_2$  的对数似然比与接收的污染符号同相分量之间的函数关系, 其中  $x$  表示 I 支路的接收信息,  $y$  表示对数似然比 LLR。不难验证,  $F_1, F_2$  均为连续函数, 且  $F_1$  为奇函数,  $F_2$  为偶函数。由于  $F_1, F_2$  比较复杂, 加之  $x$  与参量  $K$  存在一定的关联, 若从理论上分析两个函数的规律是极为复杂的。本文结合蒙特卡罗仿真研究对数似然比  $y$  与受噪声污染的接收信息  $x$  之间的关系, 亦即函数  $y = F_1(x)$  与  $y = F_2(x)$  的曲线特征。仿真的方法如下: 随

机产生 16QAM 信号并模拟 AWGN 信道按指定的 SNR 进行噪声叠加, 由接收的污染信号提取同相分量  $x$ , 按照式(3)与式(4)分别计算  $b_1, b_2$  的对数似然比  $y$ , 根据计算结果使用软件画出  $F_1, F_2$  在不同 SNR 下的曲线图即函数  $F_1, F_2$  的曲线族。

在各种信噪比下通过大量的数据模拟, 发现  $F_1, F_2$  的函数曲线具有一定的特点与规律, 为了更好地进行说明, 本文选取了几种 SNR 下的  $y = F_1(x)$  与  $y = F_2(x)$  函数曲线进行示意, 分别如图 2 和图 3 可以看出。

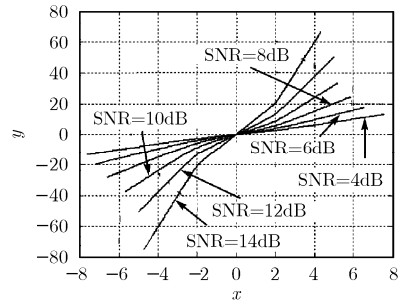


图 2 函数  $y = F_1(x)$  的曲线图

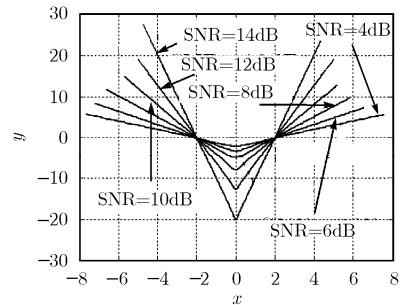


图 3 函数  $y = F_2(x)$  的曲线图

(1)不同 SNR 下的  $F_1$  函数曲线均通过定点(0,0), 这一特征由式(3)很容易验证; 而函数  $F_2$  的每条曲线均在(-2,0)与(2,0)两点附近穿过。

(2)两个函数的曲线均呈现近似的线性特征,  $F_1$  在  $x = \pm 2$  两点处比较明显的折变现象, 而  $x = 0$  是函数  $F_2$  的转折点。

#### 3.2 折线逼近的对数似然比简化算法

根据  $F_1, F_2$  曲线族的特点与规律, 考虑使用折线对两个函数的曲线进行逼近, 以获得对数似然比  $y$  关于接收信息  $x$  的简洁表达形式。

先对  $F_1$  进行分析。由图 2,  $F_1$  的每条曲线可以按“折变点”  $x = \pm 2$  分为 3 段:  $x < -2$ ,  $-2 \leq x \leq 2$  和  $x > 2$ , 因此对于每条曲线考虑使用 3 段折线分别进行逼近, 由于  $F_1$  为奇函数, 这里只需分析  $x > 0$  的情况即可。为了确切的描述折线方程, 除了定点(0,0)外, 还需要至少另外两个“动点”(即  $y$  值随 SNR 变化的点)的坐标, 折变点  $x_1 = 2$  是相邻两段曲线的分界点, 因此是作为一个“动点”的最佳选择。另外一个“动

点”参考噪声污染后的接收数据范围选取  $x_2 = 4$ ，下面阐述两个“动点”  $y$  值的计算与简化。

将  $x = 2$  代入函数  $y = F_1(x)$ ，经过化简得：

$$y_1 = \ln \left[ \frac{2e^{-K}}{e^{-25K} + e^{-9K}} \right] \quad (5)$$

由于  $K > 0$ ，相对于  $e^{-9K}$ ， $e^{-25K}$  的值很小，将分母中的  $e^{-25K}$  忽略不计，式(5)的计算结果为  $y_1 \approx 8K + \ln 2$ 。使用同样的简化方法可以计算出对应  $x_2$  的  $y_2$  值，约为  $24K$ 。

根据(0,0)， $(x_1, y_1)$ 及 $(x_2, y_2)$ 3 点的坐标并结合曲线的对称性，可以完整地描述 3 段进行逼近的折线，即得到映射比特  $b_1$  的对数似然比计算简化公式：

$$\text{LLR}(b_1) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} \ln 2 + 4K\right)r_I, & -2 \leq r_I \leq 2 \\ \left(8K - \frac{1}{2} \ln 2\right)r_I + (8K - 2 \ln 2), & r_I < -2 \\ \left(8K - \frac{1}{2} \ln 2\right)r_I - (8K - 2 \ln 2), & r_I > 2 \end{cases} \quad (6)$$

对函数  $y = F_2(x)$  的曲线进行折线逼近相对简单，由图 3 可以看出， $x = 0$  将  $F_2$  不同 SNR 下的各条曲线分为对称的两部分， $x$  负半轴的各部分均通过点(-2,0)附近，而正半轴的各部分均通过(2,0)附近，因此选择(-2,0)与(2,0)分别作为进行逼近的两条折线的定点，而把  $x = 0$  作为描述两段折线所必需的另外一个公共的“动点”。为了得到“动点”的坐标，将  $x = 0$  代入  $y = F_2(x)$  得到  $y$  的值为  $-8K$ 。根据 3 点的坐标确定折线方程，从而  $b_2$  的对数似然比简化计算公式最终可以表示为

$$\text{LLR}(b_2) = 4K(|r_I| - 2) \quad (7)$$

### 3.3 简化算法与标准算法下的对数似然比逼近情况分析

从式(6)、式(7)可以看出，基于折线逼近的对数似然比简化算法只涉及到乘法与加法运算，因而大大降低了对数似然比计算的复杂度。为了考察这种简化算法的有效性，本文基于 AWGN 信道在不同的 SNR 下进行了仿真，模拟产生了一组大样本的 16QAM 随机信号，经过噪声污染后在接收端提取信号的同相分量，分别使用标准算法与简化算法进行对数似然比计算，计算的结果对比如图 4 和图 5，这里只选取了 SNR 为 4dB、8dB 和 12dB 的对数似然比曲线进行示意。

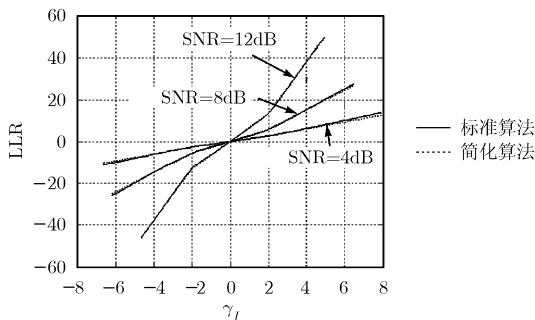


图 4 标准算法与简化算法下的 LLR( $b_1$ ) 比较

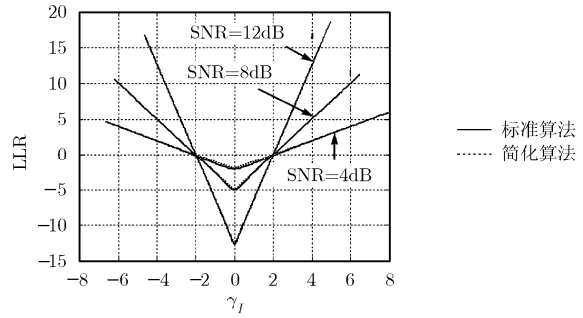


图 5 标准算法与简化算法下的 LLR( $b_2$ ) 比较

由图 4 和图 5 可以看出，本文提出的基于折线逼近的对数似然比简化算法可以理想地逼近标准对数似然比算法的计算结果，并且随着 SNR 的增大，简化算法与标准算法的计算结果误差将逐渐减小。

## 4 基于 BITCM 系统的 LLR 简化算法性能分析

为进一步验证本文提出的简化 LLR 算法的可靠性，分别使用标准的对数似然比算法和基于折线逼近的简化算法在 BITCM 系统中进行 BER 性能仿真，采用的 BITCM 系统结构如图 6 所示，图中的 Turbo 编码器包含了对成员编码器校验比特的删余操作，而 Turbo 译码器则包含了对接收信息的解复接与删除校验比特的补零处理。

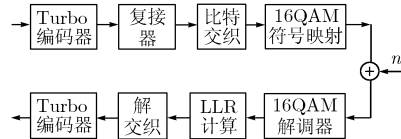


图 6 BITCM 的系统结构

仿真中，采用 RSC(23, 35)作为 Turbo 码的两个成员码，编译码内部的交织及系统中的比特交织均选用随机交织器，Turbo 码的信息帧长为 1200，码率为 3/4，分量译码器采用 Log-MAP 译码算法<sup>[8]</sup>，迭代译码 5 次。分别使用标准 LLR 算法与本文提出的折线逼近 LLR 简化算法对 BITCM 系统进行蒙特卡罗仿真，AWGN 信道中两种条件下的系统 BER 性能曲线如图 7。可以看出，简化 LLR 算法下的 BITCM 系

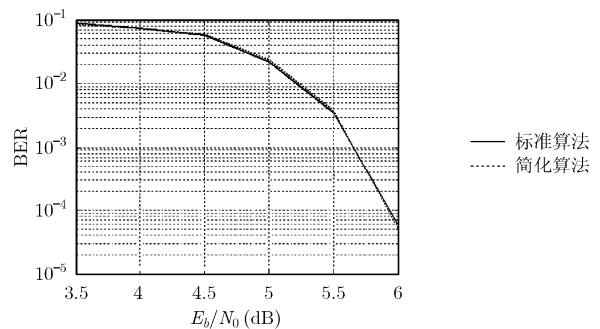


图 7 基于不同 LLR 算法的 BITCM 系统性能

统性能与采用标准算法的系统相比并没有折损, 这是预料之中的, 该仿真结果也进一步验证了本文提出的折线逼近对数似然比简化算法的可行性与可靠性。

## 5 结束语

本文从分析 16QAM 信号的对数似然比曲线入手, 基于曲线族的特点与规律提出了一种全新的折线逼近简化算法, 该算法采用分段的折线逼近 16QAM 信号的对数似然比曲线, 进而使用简单的线性运算代替原标准 LLR 算法中复杂的非线性运算; 仿真结果表明, 本文所提出的简化算法可以理想地逼近标准 LLR 算法的计算结果, 在 BITCM 系统中应用不会带来系统的性能折损。

## 参 考 文 献

- [1] Berrou C, Glavieux A, and Thitimajshima P. Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-codes[C]. IEEE International Conference on Communication, Geneva, 1993: 1064-1070.
  - [2] Benedetto S, Divsalar D, Montorsi G, and Pollara F. Bandwidth efficient parallel concatenated coding schemes[J]. *Electronics Letters*, 1995, 31(24): 2067-2069.
  - [3] Robertson P and Woerz T. A novel bandwidth efficient coding scheme employing turbo codes[C]. in Proc. IEEE International Conference on Communications, Dallas, Texas, USA, 1996: 962-967.
  - [4] Goff S Le, Glavieux A, and Berrou C. Turbo-codes and high spectral efficiency modulation[C]. in Proc. ICC'94, New Orleans, 1994: 645-649.
  - [5] Fagervik K and Jeans T G. Low complexity bit by bit soft output demodulator [J]. *IEEE Electronics Letters*, 1996, 32(11): 985-987.
  - [6] Raju M S, Ramesh A, and Chockaingam A. BER analysis of QAM with transmit diversity in Rayleigh fading channel[C]. IEEE GLOBECOM'03, San Francisco, USA, 2003: 641-645.
  - [7] Hyun K and Yoon D. Bit metric generation for Gray coded QAM signals [J]. *IEEE Proceedings Communications*, 2005, 152(6): 1134-1138.
  - [8] Robertson P, Hoehner P, and Villebrum E. Optimal and sub-optimal maximum a posteriori algorithms suitable for turbo decoding [J]. *European Trans. on Telecomm*, 1997, 8(2): 119-125.
- 闫 涛: 男, 1979 年生, 博士生, 从事保密通信与抗干扰技术研究。  
茹 乐: 男, 1978 年生, 博士, 副教授, 研究方向为宽带无线通信技术。  
杜兴民: 男, 1941 年生, 教授, 研究领域为信息安全与对抗技术。