第32卷 第16期 计 算 机 工 程 2006年8月
Vol.32 № 16 Computer Engineering August 2006
·多媒体技术及应用· 文章编号：1000—3428(2006)16—0207—03 文献标识码：A 中图分类号：TP391.72

基于高斯曲率的曲面光顺方法研究

王秀丽，宁正元
（福建农林大学计算机与信息学院，福州 350002）

摘 要：在交互设计系统中曲率(包括高斯曲率和平均曲率)评价是分析曲线曲面质量的重要工具。对于B样条曲线的光顺算法已经比较成熟。但对于如何基于曲率（包括高斯曲率和平均曲率）的曲面光顺算法则还有许多工作要做。该文提出了一种基于最小二乘的曲面优化算法，可以得到比较好的结果。该光顺算法主要包括两个步骤：依据曲率光顺准则修改曲面的曲率和修改后的曲率基于原曲面优化反向求出新的控制顶点。

关键词：高斯曲率；最小二乘法；高斯-牛顿法

Research on Fairing Algorithm Based on Gaussian Curvature

WANG Xiuli, NING Zhengyuan
(College of Computer and Information, Agriculture and Forestry University of Fujian, Fuzhou 350002)

【Abstract】Assessment of curvature is an important tool for the analysis of curves and surface in the interactive design system. The fairing algorithm by curvature for B-spline curves has been perfect. But fairing algorithm by curvature (including Gaussian and mean curvature)for B-spline surface is no more maturity. This paper presents a new algorithm based on the least square optimal method. That should lead to a desired result. This algorithm includes two steps: modifying the curvature of surface by curvature criterion of fairing surface, a new surface obtained by utilizing the least square optimal method based on result of the first step.

【Key words】Gaussian curvature; Least square; Gaussian-Newton method

1 概述

在基于事物数字化的曲面造型中，由于缺乏必要的特征信息（如连续性要求信息），以及存在数字化误差，曲面光顺变得尤为重要。曲面光顺方法有最小二乘法、能量法、圆率法、磨光法等[4,5,7]。为评价自由曲面的光顺性，就要寻找一种检验的方法。曲率的实质是曲面上点附近的形状质量的表现。曲面上某点的高斯曲率能较好地反映其邻域内曲面的形状，例如曲面上某点高斯曲率为其两主曲率的点积，当高斯曲率大于0时此点为椭圆点；等于0时为抛物点；小于0时为双曲点，所以曲面上高斯曲率值相等的点构成的等高斯曲率线的形状与分布状况可以反映曲面的变化规律，若等高斯曲率线形状光滑、分布均匀，则认为曲面是光顺的。因此，可用曲面上的等高斯曲率线来检验曲面的光顺性。

在曲线的光顺评价中，曲率图方法的研究比较多，算法也比较成熟[2,3]。在以高斯曲率作为曲面光顺的评价工具之后，就引入了一个问题，即曲面的高斯曲率修改之后如何反馈到曲面点上。其实也是一个已知一个曲面上每一点的高斯曲率，曲面点的高斯曲率修改之后，在原曲面的基础上反求曲面的问题。一个通用的以一点沿法线方向移动为基础的高斯曲率方法[1,6]已经提出，方法存在问题是其中的偏导数的计算成为了一个主要障碍。

本文通过对B样条曲面的高斯曲率的分析处理为设计者提供了一种形状控制的方法，可以使设计者摆脱复杂的处理过程，直接对曲面点的高斯曲率进行修改，达到对曲面光顺的目的，为利用高斯曲率的修改对B样条曲面进行光顺处理提供了基础算法。

对曲面点来说如果其高斯曲率与附近点的高斯曲率比较变化小则说明该点的光顺状况比较好；反之光顺状况较差。寻找到曲面上状况最差的点。将其高斯曲率依据一定的规则进行修改。例如将点 $p_{i,j}$ 的高斯曲率 $k[i][j]$ 作如下修改：

$$k^*[i][j]=\left(k[i+1][j]+k[i-1][j]+k[i][j+1]+k[i][j-1]\right)/4$$

根据本文中的具体算法可以求出新的曲面的控制顶点。

2 B样条曲面

2.1 高斯曲率的基础

对B样条曲面 $r(u,v)$，在每一点法曲率存在的最大点和最小点是方程 $k^2+2Hk+K=0$ 的根：

$$K=k_{\min}\cdot k_{\max}\quad;\quad H=\frac{1}{2}(k_{\min}+k_{\max})$$

其中K为高斯曲率，H为平均曲率。则

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}\tag{1}$$

其中 $E=r_u\cdot r_u$；$F=r_u\cdot r_v$；$G=r_v\cdot r_v$；$L=n\cdot r_{uu}$；$M=n\cdot r_{uv}$；$N=n\cdot r_{vv}$。那么

$$K(u,v)=\frac{n\cdot r_{uu}\cdot n\cdot r_{vv}-(n\cdot r_{uv})^2}{r_u\cdot r_u\cdot r_v\cdot r_v-(r_u\cdot r_v)^2}\tag{2}$$

2.2 B样条曲面的各阶偏导数的计算

对控制顶点为 $d_{i,j}\ (i=0,1,\ldots,m;j=0,1,\ldots,n)$ 的 $k\times l$ 次B样条曲面的点R处的 u，v 偏导数 $r_u,r_v,r_{uu},r_{vv},r_{uv}$，存在插值序列(e,f)对应的(u,v)值为 (u^*,v^*)，插值序列对应的节点序列为 (s,t)，

基金项目：国家自然科学基金资助项目（30271057）
作者简介：王秀丽(1963—)，女，副教授，主研方向：数字媒体与图形图像技术；宁正元，教授
收稿日期：2005-08-23 **E-mail：**nzyfn@126.com

且 $u^* \in [u_s, u_{s+1}] \subset [u_k, u_{k+m+1}]$，$v^* \in [v_t, v_{t+1}] \subset [v_l, v_{l+n+1}]$。

$$r(u,v) = \sum_{i=e-k}^{e} \sum_{j=f-l}^{f} p_{i,j} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v);$$

$u \in [u_s, u_{s+1}] \subset [u_k, u_{m+1}]$；

$v \in [v_t, v_{t+1}] \subset [v_l, v_{n+1}]$。

偏导如下：

$$r_u = \sum_{i=s-k}^{s-1} \sum_{j=t-l}^{t} d_{i,j}^{(1,0)} N_{i,k-1}(u) N_{j,l}(v);\ d_{i,j}^{(1,0)} = k\frac{d_{i+1,j} - d_{i,j}}{u_{i+k+1} - u_{i+1}};$$

$$r_v = \sum_{i=s-k}^{s} \sum_{j=t-l}^{t-1} d_{i,j}^{(0,1)} N_{i,k}(u) N_{j,l-1}(v);\ d_{i,j}^{(0,1)} = l\frac{d_{i,j+1} - d_{i,j}}{v_{j+l+1} - v_{j+1}};$$

$$r_{uu} = \sum_{i=s-k}^{s-2} \sum_{j=t-l}^{t} d_{i,j}^{(2,0)} N_{i,k-2}(u) N_{j,l}(v);\ d_{i,j}^{(2,0)} = (k+1)k\frac{d_{i+1,j}^{(1,0)} - d_{i,j}^{(1,0)}}{u_{i+k+1} - u_{i+2}};$$

$$r_{vv} = \sum_{i=s-k}^{s} \sum_{j=t-l}^{t-2} d_{i,j}^{(0,2)} N_{i,k}(u) N_{j,l-2}(v);\ d_{i,j}^{(0,2)} = (l+1)l\frac{d_{i,j+1}^{(0,1)} - d_{i,j}^{(0,1)}}{v_{j+l+1} - v_{j+2}};$$

$$r_{uv} = \sum_{i=s-k}^{s-1} \sum_{j=t-l}^{t-1} d_{i,j}^{(1,1)} N_{i,k-1}(u) N_{j,l-1}(v);\ d_{i,j}^{(1,1)} = l\frac{d_{i,j+1}^{(1,0)} - d_{i,j}^{(1,0)}}{v_{j+l+1} - v_{j+1}}。$$

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial u^p \partial v^q} r(u,v) = \sum_{i=0}^{n-p} \sum_{j=0}^{m-q} N_{i,k-p}(u) N_{j,l-q}(v) d_{i,j}^{(p,q)} \quad (3)$$

其中，

$$\begin{cases} N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & u_i \le u < u_{i+1} \\ 0 & else \end{cases} \\ N_{i,k}(u) = \dfrac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \dfrac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) \\ \dfrac{0}{0} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

同理可得 $N_{j,l}(v)$。

从定义可知在子矩形域 $u_s \le u \le u_{s+1}, v_t \le v \le v_{t+1}$ 上的那块 B 样条曲面仅和控制点阵中的部分顶点 $p_{i,j}(i = s-k, s-k+1, \ldots, s; j = t-l, t-l+1, \cdots, t)$ 有关，与其余顶点无关。

曲面点的法向量可以如下式求得

$$\vec{n} = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} \quad (5)$$

3 基于 B 样条曲面的高斯曲率光顺算法过程

对一个张量积的B样条曲面存在插值序列 (e,f) 对应的 (u,v) 值为 (u^*,v^*)，插值序列对应的节点序列为 (s,t)，且 $u^* \in [u_s, u_{s+1}] \subset [u_k, u_{k+m+1}]$，$v^* \in [v_t, v_{t+1}] \subset [v_l, v_{l+n+1}]$，故可以得到方程组：

$$k_{e,f}^{s,t}(u^*, v^*) = k_{e,f}$$

即 $k_{e,f}^{s,t}(u^*, v^*) - k_{e,f} = 0$ (6)

上式左边带入式（3），右边 $k_{e,f}$ 与对应的 (u^*,v^*) 为已知量，曲面的边界点为已知。将各阶偏导代入，未知的量为控制顶点 $d_{i,j}$。一组 (e,f) 对应一个方程。因为作为插值序列的 (e,f) 肯定大于 (m,n)。将各阶偏导数代入上式，得到的方程组的个数 $e \times f$ 要大于未知量控制顶点的个数 $m \times n$，故为最小二乘问题。

基于最小二乘法的求解方法目标函数为

$$\min F(X) = \min \sum_{s=1,t=1,k=0}^{m,n,K} f_{s\times t,k}^2(x) \quad (7)$$

其中：m, n 为控制顶点序列，k 为控制顶点的坐标序列。

式（7）可以看作对非线性最小二乘问题的无约束极小化的特殊情形，也是解线性方程组

$$f_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m \quad (8)$$

其中：$f_i(x)$ 称为残量函数。当 $m \succ n$ 时，方程组为超定方程组；当 $m = n$ 时，方程组为确定方程组。

由于目标函数具有特殊结构，因此对一般的无约束最优化方法进行改造，可以得到更有效的特殊方法。

设 $J(x)$ 是 $f(x)$ 的 Jacobi 矩阵，则

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (9)$$

则 $F(x)$ 的梯度为

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x) \nabla f_i(x) = J(x)^T f(x)$$

$F(x)$ 的 Hesse 矩阵为

$$G(x) = \sum_{i=1}^{m} (\nabla f_i(x) \nabla f_i(x)^T + f_i(x) \nabla^2 f_i(x) = J(x)^T J(x) + S(x)$$

其中 $S(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x) \nabla^2 f_i(x)$。

因此，目标函数 $F(x)$ 的二次模型为

$$m_k(x) = F(x_k) + g(x_k)^T (x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^T G(x_k)(x - x_k)$$
$$= \frac{1}{2} f(x_k)^T f(x_k) + (J(x_k)^T f(x_k))^T (x - x_k)$$
$$+ \frac{1}{2}(x - x_k)^T (J(x_k)^T J(x_k) + S) x_k)(x - x_k)$$

从而解目标函数的 Gauss-Newton 法为

$$x_{k+1} = x_k - (J(x_k)^T J(x_k) + S(x_k))^{-1} J(x_k)^T f(x_k)$$

假设该方法对高斯曲率只是微调，故 $f_i(x)$ 接近 0。$S(x_k)$ 可以忽略，为小残量问题。

从而上式变为

$$x_{k+1} = x_k - (J(x_k)^T J(x_k))^{-1} J(x_k)^T f(x_k) = x_k + s_k \quad (10)$$

其中：$s_k = -(J(x_k)^T J(x_k))^{-1} J(x_k)^T f(x_k)$。

针对目前具体问题，做以下定义：

(1) $-(J(x_k)^T J(x_k))^{-1} J(x_k)$ 是与 Jacobi 矩阵有关的系数矩阵，及每一个确定的 B 样条曲面均有一个矩阵与之对应，是曲面的本质之一。对同一曲面形状是相同的，故称其为固有系数矩阵 Ω。

(2) $f(x_k)$ 其实是对每一个曲面点修改前后的高斯曲率的变化量。故称其为修改矩阵 Δ。

4 具体计算

设有 $m \times n$ 个控制顶点，故

$$x_1 = d_{0,0,0}, x_2 = d_{0,0,1}, x_3 = d_{0,0,2}, \ldots, x_{3\cdot n\cdot m-2}$$
$$= d_{m-1,n-1,0}, x_{3\cdot n\cdot m-1} = d_{m-1,n-1,1}, x_{3\cdot n\cdot m} = d_{m-1,n-1,2} \quad (11)$$

针对

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}=\frac{\partial f_1(x)}{\partial d_{0,0,0}}=\frac{\partial(k_{0,0}-k^0_{0,0})}{\partial d_{0,0,0}}=\frac{\partial k_{0,0}}{\partial d_{0,0,0}} \tag{12}$$

有通式如下：

$$\frac{\partial k}{\partial d_{i,j,k}}=(\frac{\partial(LN-M^2)}{\partial d_{i,j,k}}\cdot(EG-F^2)-\frac{\partial(EG-F^2)}{\partial d_{i,j,k}}\cdot(LN-M^2))\cdot\frac{1}{(EG-F^2)^2} \tag{13}$$

对其中的偏导有：设 $\mathbf{e}_k, k=0,...,2$ 表示 3 维空间向量，

$\mathbf{e}_0=(1,0,0)^T$ ， $\mathbf{e}_1=(0,1,0)^T$ ， $\mathbf{e}_2=(0,0,1)^T$ 。

上式偏导表示如下：

$$\frac{\partial\Delta^{1,0}\mathbf{b}_{i^*,j^*}}{\partial b_{i,j,k}}=\begin{cases}-\mathbf{e}_k, i=i^*, j=j^*; & i^*=0,...,m-1\\ \mathbf{e}_k, i=i^*+1, j=j^*; & j^*=0,...,n\\ 0,\ ortherwise; & k=0,1,2\end{cases} \tag{14}$$

$$\frac{\partial\Delta^{2,0}\mathbf{b}_{i^*,j^*}}{\partial b_{i,j,k}}=\begin{cases}\mathbf{e}_k, i=i^*, j=j^*; & i^*=0,...,m-2\\ -2\mathbf{e}_k, i=i^*+1, j=j^*; & j^*=0,...,n\\ \mathbf{e}_k, i=i^*+2, j=j^*; & k=0,1,2\\ 0, ortherwise;\end{cases} \tag{15}$$

$$\frac{\partial\Delta^{1,1}\mathbf{b}_{i^*,j^*}}{\partial b_{i,j,k}}=\begin{cases}\mathbf{e}_k, i=i^*, j=j^*;\\ -\mathbf{e}_k, i=i^*+1, j=j^*; & i^*=0,...,m-1\\ -\mathbf{e}_k, i=i^*, j=j^*+1; & j^*=0,...,n-1\\ \mathbf{e}_k, i=i^*+1, j=j^*+1; & k=0,1,2\\ 0, orthe rwise;\end{cases} \tag{16}$$

故可以求得以下结果：

$$\frac{\partial p_u}{\partial d_{i,j,0}}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}(N_{i+1,k-1}(u)-N_{i,k-1}(u))N_{j,l}(v)$$

$$\frac{\partial p_v}{\partial d_{i,j,0}}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}(N_{j+1,l-1}(v)-N_{j,l-1}(v))N_{i,k}(u)$$

$$\frac{\partial p_{uu}}{\partial d_{i,j,0}}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}(N_{i+2,k-2}(u)+N_{i,k-2}(u)-2N_{i+1,k-2}(u))N_{j,l}(v)$$

$$\frac{\partial p_{vv}}{\partial d_{i,j,0}}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}(N_{j+2,l-2}(v)+N_{j,l-2}(v)-2N_{j+1,l-2}(v))N_{i,k}(u)$$

$$\frac{\partial p_{uv}}{\partial d_{i,j,0}}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}(N_{i,k-1}(u)N_{j,l-1}(v)+N_{i+1,k-1}(u)N_{j+1,l-1}(v)-N_{i+1,k-1}(u)N_{j,l-1}(v)-N_{i,k-1}(u)N_{j+1,l-1}(v))$$

将以上各式代入式(13)，对与 $f_1(x)$ 对应的 (u,v) x_1 对应的控制顶点坐标为 $d_{0,0,0}$ 有

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}=((\frac{\partial L}{\partial d_{0,0,0}}\cdot N+\frac{\partial N}{\partial d_{0,0,0}}\cdot L-2M\cdot\frac{\partial M}{\partial d_{0,0,0}})\cdot(EG-F^2)-(\frac{\partial E}{\partial d_{0,0,0}}\cdot G+\frac{\partial G}{\partial d_{0,0,0}}\cdot E-2F\cdot\frac{\partial F}{\partial d_{0,0,0}})\cdot(LN-M^2))\cdot\frac{1}{(EG-F^2)^2}$$

$$\begin{aligned}D_1=(((&N_{i+2,k-2}(u)+N_{i,k-2}(u)-2N_{i+1,k-2}(u))N_{j,l}(v)\cdot p_{1,1,uu,0}\cdot n_{1,0}^2\\&+(N_{j+2,l-2}(v)+(N_{j,l-2}(v)-2N_{j+1,l-2}(v))N_{i,k}(u)\cdot p_{1,1,vv,0}\cdot n_{1,0}^2\\&-2p_{1,1,uv,0}\cdot(N_{i,k-1}(u)N_{j,l-1}(v)+N_{i+1,k-1}(u)N_{j+1,l-1}(v)\\&-N_{i+1,k-1}(u)N_{j,l-1}(v)-N_{i,k-1}(u)N_{j+1,l-1}(v)))(EG-F^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_2=2((&N_{i+1,k-1}(u)-N_{i,k-1}(u))N_{j,l}(v)\cdot p_{1,1,v,0}^2\cdot p_{1,1,u,0}+(N_{j+1,l-1}(v)\\&-N_{j,l-1}(v))N_{i,k}(u)\cdot p_{1,v,0}\cdot p_{1,u,0}^2-2\cdot p_{1,1,u,0}\cdot p_{1,1,v,0}(p_{1,1,v,0}\cdot(N_{i+1,k-1}(u)\\&-N_{i,k-1}(u))N_{j,l}(v)+p_{1,1,u,0}\cdot(N_{j+1,l-1}(v)-N_{j,l-1}(v))N_{i,k}(u))\end{aligned}$$

同样对与 $f_m(x)$ 对 x_1 求导对应的 (u,v) x_1 对应的控制顶点坐标为 $d_{0,0,0}$ 有

$$\frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1}=((\frac{\partial L}{\partial d_{0,0,0}}\cdot N+\frac{\partial N}{\partial d_{0,0,0}}\cdot L-2M\cdot\frac{\partial M}{\partial d_{0,0,0}})\cdot(EG-F^2)-(\frac{\partial E}{\partial d_{0,0,0}}\cdot G+\frac{\partial G}{\partial d_{0,0,0}}\cdot E-2F\cdot\frac{\partial F}{\partial d_{0,0,0}})\cdot(LN-M^2))\cdot\frac{1}{(EG-F^2)^2}$$

$$\begin{aligned}D_1=(((&N_{i+2,k-2}(u)+N_{i,k-2}(u)-2N_{i+1,k-2}(u))N_{j,l}(v)\cdot p_{m,1,uu,0}\cdot n_{m,0}^2\\&+(N_{j+2,l-2}(v)+(N_{j,l-2}(v)-2N_{j+1,l-2}(v))N_{i,k}(u)\cdot p_{m,1,vv,0}\cdot n_{m,0}^2\\&-2p_{m,1,uv,0}\cdot(N_{i,k-1}(u)N_{j,l-1}(v)+N_{i+1,k-1}(u)N_{j+1,l-1}(v)\\&-N_{i+1,k-1}(u)N_{j,l-1}(v)-N_{i,k-1}(u)N_{j+1,l-1}(v)))(EG-F^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_2=2((&N_{i+1,k-1}(u)-N_{i,k-1}(u))N_{j,l}(v)\cdot p_{m,1,v,0}^2\cdot p_{m,1,u,0}+\\&(N_{j+1,l-1}(v)-N_{j,l-1}(v))N_{i,k}(u)\cdot p_{m,1,v,0}\cdot p_{m,1,u,0}^2\\&-2\cdot p_{m,1,u,0}\cdot p_{m,1,v,0}(p_{m,1,v,0}\cdot(N_{i+1,k-1}(u)-N_{i,k-1}(u))N_{j,l}(v)\\&+p_{m,1,u,0}\cdot(N_{j+1,l-1}(v)-N_{j,l-1}(v))N_{i,k}(u))\end{aligned}$$

同样对与 $f_m(x)$ 对 x_n 求导对应的 (u,v) x_n 对应的控制顶点坐标为 $d_{s,t,0}$ 有

$$\frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n}=((\frac{\partial L}{\partial d_{s,t,0}}\cdot N+\frac{\partial N}{\partial d_{s,t,0}}\cdot L-2M\cdot\frac{\partial M}{\partial d_{s,t,0}})\cdot(EG-F^2)-(\frac{\partial E}{\partial d_{s,t,0}}\cdot G+\frac{\partial G}{\partial d_{s,t,0}}\cdot E-2F\cdot\frac{\partial F}{\partial d_{s,t,0}})\cdot(LN-M^2))\cdot\frac{1}{(EG-F^2)^2}$$

$$\begin{aligned}D_1=(((&N_{i+2,k-2}(u)+N_{i,k-2}(u)-2N_{i+1,k-2}(u))N_{j,l}(v)\cdot p_{m,n,uu,0}\cdot n_{m,0}^2\\&+(N_{j+2,l-2}(v)+(N_{j,l-2}(v)-2N_{j+1,l-2}(v))N_{i,k}(u)\cdot p_{m,n,vv,0}\cdot n_{m,0}^2\\&-2p_{m,n,uv,0}\cdot(N_{i,k-1}(u)N_{j,l-1}(v)+N_{i+1,k-1}(u)N_{j+1,l-1}(v)\\&-N_{i+1,k-1}(u)N_{j,l-1}(v)-N_{i,k-1}(u)N_{j+1,l-1}(v)))(EG-F^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_2=2((&N_{i+1,k-1}(u)-N_{i,k-1}(u))N_{j,l}(v)\cdot p_{m,n,v,0}^2\cdot p_{m,n,u,0}\\&+(N_{j+1,l-1}(v)-N_{j,l-1}(v))N_{i,k}(u)\cdot p_{m,n,v,0}\cdot p_{m,n,u,0}^2\\&-2\cdot p_{m,n,u,0}\cdot p_{m,n,v,0}(p_{m,n,v,0}\cdot(N_{i+1,k-1}(u)-N_{i,k-1}(u))N_{j,l}(v)\\&+p_{m,n,u,0}\cdot(N_{j+1,l-1}(v)-N_{j,l-1}(v))N_{i,k}(u))\end{aligned}$$

$p_{m,n,vv,0}$ 各个变量表示的意义如下：

m：方程 $f_m(x)$ 的序号，与曲面上的点对应；n：控制顶点 $d_{i,j}$ 坐标序列 x_k；vv：v 方向的二阶偏导；0：x 坐标；1：y 坐标；2：z 坐标。

$n_{m,0}$ 的两个下标变量表示的意义如下：

m：方程 $f_m(x)$ 的序号，与曲面上的数据点对应；0：x 坐标；1：y 坐标；2：z 坐标。

从而可以求出 Jacobi 矩阵 J，将 x_k 代入可得 $J(x_k)$，然后计算可得 Ω，如果已知修改矩阵 Δ，有如下迭代结果：

$$x_{k+1}=x_k-\Omega\cdot\Delta$$

可以得到修改后的曲面的控制顶点，达到对曲面进行光顺处理的目的。

5 算例

将以上算法应用于曲面的光顺评价中可以得到如下结果：图 1(a)为光顺前曲面的等高斯曲率线图；图 1(b)为光顺

(下转第 220 页)