

文章编号:1000-6893(2008)06-1531-07

Legendre-Gauss 拟谱法求解最优控制问题

童科伟, 周建平, 何麟书

(北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100191)

Legendre-Gauss Pseudospectral Method for Solving Optimal Control Problem

Tong Kewei, Zhou Jianping, He Linshu

(School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

摘要: 提出一种新的求解基于常微分方程(ODE)和微分代数方程(DAE)的最优控制问题的数值方法。本方法基于直接配置法,通过 Legendre-Gauss 拟谱法同时离散化状态变量和控制变量把最优控制问题转化为一个非线性规划问题。与传统的直接转换法相比,本方法具有精度高、计算量小、结构简单的特点,而且可以求解最优控制“多相”问题。数值结果表明,本方法是一种通用的精度较高的最优控制直接数值求解法,可用于求解 ODE/DAE 最优控制问题。

关键词: 最优控制; 非线性规划; 直接转换法; 拟谱法; 常微分方程; 微分代数方程

中图分类号: O232 **文献标识码:** A

Abstract: A novel numerical method for solving optimal control problems based on ordinary differential equations (ODE) and/or differential-algebra equations (DAE) is proposed. This method is based on the direct transcription method that converts an optimal control problem into a nonlinear programming problem using Legendre-Gauss pseudospectral method via simultaneous state and control discretization. Compared with other standard direct transcription methods, the scheme has the advantages of higher precision and lower computational effort with a simpler structure which can also be used for the so-called optimal control multi-phase problems. Numerical results show the approach is a general purpose higher precision optimal control direct transcription method which can be used for solving ODE/DAE optimal control problems.

Key words: optimal control; nonlinear programming; direct transcription method; pseudospectral method; ordinary differential equation; differential-algebra equation

最优控制问题的数值求解方法通常分为两种:非直接转换法(Indirect Transcription Method)和直接转换法(Direct Transcription Method)。直接转换法把连续时间最优控制问题直接转化为一个有限维非线性规划问题(NLP),不需要另外推导一组最优条件。此 NLP 问题可以利用目前成熟的非线性规划算法(如序列二次规划(SQP)、内点法或罚函数法等)数值求解,通常非线性规划问题通过满足一组 KKT(Karush-Kuhn-Tucker)条件转化为一个线性规划子问题求解。由于不需要推导一阶最优必要条件,直接转换法可以求解大量复杂的问题,而且对于初始估计的要求也远没有非直接法的高。但是目前大多数直接转换法的求解精度要比非直接转换法的精度差,而且直接转换法求得的解不一定满足一阶最优必要条件,拟谱法(Pseudospectral Method)就是为了克服这些缺点而发展出来的。最早应用

于直接求解最优控制问题始于 2000 年,由 Fahroo 和 Ross 提出^[1-3]。

1 拟谱法

拟谱法源于有限元法,它利用全局正交多项式离散化特定时间点(节点)的状态和控制。最早由 Fahroo 用于最优控制问题的求解。这类基于正交配置的拟谱法的最大优点在于可以利用相对较少的离散点得到极高精度的拟合近似解。一般的拟谱法的拟合精度为节点数的指数精度($O(e^{-N})$),这个特性通常称为拟谱法的谱精度^[4],正是这个特性使得拟谱直接转换法的精度比其他直接转换法如基于低次多项式(一般为常数、一次或二次)的有限元配置法的精度高得多。

目前常用的拟谱法有 Legendre 法和 Chebyshev 法,分别利用 Legendre 插值多项式和 Chebyshev 插值多项式。两种方法都是基于拉格朗日插值原理^[4]。目前拉格朗日插值的最大缺点在于其计算量为 $O(n^2)$,而牛顿插值法的计算量为

$O(n)$ 。因此很多文献评价拉格朗日插值多项式“仅是理论推导工具,只具有理论意义,不适用于数值计算”。为了克服传统拉格朗日插值方法的缺点,本文采用拉格朗日重心公式,文献[5]指出,重心公式的计算量仍为 $O(n)$,极大地减少了计算量,克服了传统拉格朗日插值法的不足。拉格朗日重心公式为

$$p(x) = \frac{\sum_{j=0}^n \frac{\omega_j}{x-x_j} f_j}{\sum_{j=0}^n \frac{\omega_j}{x-x_j}} \quad (1)$$

式中: $\omega_j = \frac{1}{\prod_{k \neq j} (x_j - x_k)}$, $j=0, \dots, n$

本文主要考虑 Legendre 法。目前常用的有 LGL (Legendre-Gauss-Lobatto), LGR (Legendre-Gauss-Radau) 和 LG (Legendre-Gauss) 等^[4]。本文选用的方法为 Legendre-Gauss 拟谱法 (Legendre-Gauss Pseudo-spectral Method, LGPSM)。

2 最优控制

2.1 连续 Bolza 问题的最优控制

确定控制 $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 使得 Bolza 性能泛函 J 取最小值:

$$J = \Phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (2)$$

动力学方程

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_f] \quad (3)$$

边界条件

$$\varphi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f) = \mathbf{0} \quad (4)$$

不等式路径约束

$$C(x(t), u(t), t) \leq \mathbf{0} \quad t \in [t_0, t_f] \quad (5)$$

方程式(1)~式(5)称为最优控制问题的连续 Bolza 问题^[7-8]。

Bolza 问题定义在区间 $t \in [t_0, t_f]$, 而许多数值方法如拟谱法等需要定义固定的时间区间 $[-1, 1]$, 因此定义变换^[7-8]

$$\tau = \frac{2t}{t_f - t_0} - \frac{t_f + t_0}{t_f - t_0} \quad (6)$$

以上变换同样满足初始时间自由和终端时间自由的情形。此时 Bolza 性能泛函成为

$$J = \Phi(x(\tau_0), t_0, x(\tau_f), t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau, t_0, t_f) d\tau \quad (7)$$

约束成为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{t_f - t_0}{2} f(x(\tau), u(\tau), \tau; t_0, t_f) \\ \varphi(x(\tau_0), t_0, x(\tau_f), t_f) &= \mathbf{0} \\ C(x(\tau), u(\tau), \tau, t_0, t_f) &\leq \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

2.2 LGPSM 离散化连续 Bolza 问题

拟谱法利用拉格朗日插值多项式估计状态、控制和协态。特别是 LGPSM 利用 $K+1$ 个状态点组成拉格朗日基函数

$$x(\tau) \approx \mathbf{X}(\tau) = \sum_{i=0}^K \mathbf{X}(\tau_i) L_i(\tau),$$

$$L_i(\tau) = \prod_{j=0, j \neq i}^K \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (9)$$

式中: $i=0, \dots, K$ 。这 $K+1$ 个基准点 τ_j ($j=0, \dots, K$) 为区间 $[-1, 1]$ 上的 K 个 LG 点以及初始点 $\tau_0 = -1$, 对上面的拉格朗日插值多项式微分, 得到

$$\dot{x}(\tau) \approx \dot{\mathbf{X}}(\tau) = \sum_{i=0}^K \mathbf{X}(\tau_i) \dot{L}_i(\tau) \quad (10)$$

上面 $K+1$ 个拉格朗日多项式在 K 个 LG 点的导数组成一个微分矩阵 $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{K \times K+1}$, 微分矩阵 \mathbf{D} 的元素为: $D_{ki} = \dot{L}_i(\tau_j)$, LG 点及其 LG 权以及微分矩阵的具体定义见文献[4], 具体的数值计算方法见文献[6]。

同样控制变量也在 K 个 LG 点离散化, 可以利用拉格朗日插值或者样条插值, 本文主要考虑拉格朗日插值。

$$u(\tau) \approx \mathbf{U}(\tau) = \sum_{i=1}^K \mathbf{U}(\tau_i) \tilde{L}_i(\tau) \quad (11)$$

利用微分矩阵, 动力学方程在 LG 点全局配置, 其残差方程为

$$\mathbf{R}_k = \sum_{i=0}^K D_{ki} \mathbf{X}_i - \frac{t_f - t_0}{2} f(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \tau_k, t_0, t_f) = \mathbf{0},$$

$$(k = 1, \dots, K) \quad (12)$$

利用高斯积分的定义, 终端状态可离散化为

$$\mathbf{X}_f = \mathbf{X}_0 + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^K \omega_k f(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \tau_k, t_0, t_f) \quad (13)$$

同样, 利用高斯积分, 性能泛函成为

$$J = \Phi(\mathbf{X}_0, t_0, \mathbf{X}_f, t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^K \omega_k g(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \tau_k, t_0, t_f) \quad (14)$$

路径约束在 LG 点离散化为

$$C(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \tau_k, t_0, t_f) \leq \mathbf{0} \quad (k = 1, \dots, K) \quad (15)$$

边界约束没有变化, 同式(4)。

最后通过如上变换,连续 Bolza 最优控制问题直接转化为一个 NLP 问题。利用非线性优化软件如 MATLAB 优化工具箱,可以求解这一 NLP 问题。

文献[7-8]证明了 NLP 问题的 KKT 条件与连续 Bolza 问题一阶最优必要条件存在对应关系,从而从理论上证明了 NLP 问题与 Bolza 问题在本质上是一致的。根据其结论,得到了 KKT 乘子 $\tilde{\Lambda}$ 和协态 λ 的对应关系,称为协态映射定理,结论如下

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k &= \frac{\tilde{\Lambda}_k}{\omega_k} + \tilde{\Lambda}_F \\ \lambda(t_0) &= \tilde{\Lambda}_0 \\ \lambda(t_i) &= \tilde{\Lambda}_F \quad k = 1, \dots, K \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

协态映射定理从理论上证明了 LGPSM 的最优解一定满足原始最优控制问题的一阶最优必要条件,这就克服了其他的直接转换法所求得的最优解不一定满足一阶最优必要条件的缺点。

此外 KKT 乘子有如下关系

$$\tilde{\Lambda}_0 = \tilde{\Lambda}_F - \sum_{i=1}^K D_{x_0} \tilde{\Lambda}_i \quad (17)$$

由于动力学约束只与 $X_k (k=1, \dots, K)$ 及 X_F 有关,因此只能得到 KKT 乘子 $\tilde{\Lambda}_k (k=1, \dots, K)$ 和 $\tilde{\Lambda}_F$,由上式则可以得到全部的 KKT 乘子,从而由协态映射定理得到全部的协态。最后由拉格朗日插值多项式得到连续的协态近似关系式

$$\lambda(\tau) = \sum_{i=1}^{K+1} \lambda(\tau_i) L^*(\tau) \quad (18)$$

式中: $L^*(\tau) = \prod_{j=1, j \neq i}^{K+1} \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}$, 以及初始协态 $\lambda_0 = \lambda(t_0)$ 。

由上可见,拟谱法没有直接求出初始点和终止点的边界控制,目前常用的计算边界控制的方法为外插法,利用插值多项式(如拉格朗日或者样条插值)外插得到的初始或者终端控制,缺陷在于外插得到的控制不一定满足路径约束条件,文献[9]提出一种基于 NLP 的边界控制计算算法。通过定义一个特殊的哈密顿算子,把初始或终端的约束最优控制问题转化为一个 NLP 问题。此边界控制算法完全满足路径约束条件,避免了外插法的缺陷。

2.3 多相最优控制问题

最优控制的多相(Multi-phase)问题最早由 Betts 提出,并应用于商业软件 SOCS。简单地

说,多相问题就是指整个动力学轨道可以由几段子轨道拼接而成,每一段有独立的性能函数、动力学模型、边界条件、路径约束等,这些多段轨道通过连接条件(Linkage)组成一个完整的轨道,其中总的性能泛函为各分段性能泛函之和。Rao 基于 Betts 的理论提出了一种实用的基于拟谱 Legendre 法的多相连接法,此方法把整个轨道基于时间变量分为几段,其中各段必须是时间连续的,即必须要求 $t_i = t_0^{i+1}$,其中 t_i 为第 i 相的终端时刻, t_0^{i+1} 为第 $i+1$ 相的初始时刻^[10]。考虑到许多实际最优控制问题是时间不连续的,如航天器的双脉冲变轨问题,只有开始时刻施加一个加速脉冲,终端时刻再施加一个减速脉冲,而在其他时间处于无控段。考虑这些情况,改进 Rao 的连接条件,本文的方法进一步允许连接条件不基于时间连续,即允许 $t_i \leq t_0^{i+1}$ 。本方法的优点在于可以避免无意义的优化无控段,节省寻优时间。

此时多相问题的性能泛函为

$$J = \sum_{p=1}^P J^{(p)} \quad (19)$$

连接条件

$$\left. \begin{aligned} t_i &= t_0^{i+1} \text{ 或 } t_i < t_0^{i+1} \\ L_i(x_j^i, t_j^i, x_0^i, t_0^i) &= \mathbf{0}, i = 1, \dots, P-1 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中: L_i 为第 i 相和第 j 相的连接条件; P 为相的个数。

最后基于 MATLAB 环境,编制了通用的最优控制计算软件 LGPSM。

2.4 常微分方程(ODE)最优控制实例

考虑实例,卫星姿态控制系统:动力学方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), x_1(0) = -1, x_1(t_f) = 0 \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), x_2(0) = 2, x_2(t_f) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

控制约束: $-1 \leq u \leq 1$

性能指标: $J = \min t_f$

这是一个终端自由有约束最优控制问题,属于 Bang-Bang 控制问题,理论最优控制率为

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 3 \leq t \leq 4 \\ 1, & 2.22 \leq t \leq 4 \end{cases} \quad (22)$$

利用 LGPSM,取 40 个节点,状态和控制的初始估计都为 0,得到的最终时间为 $t_f = 4.002$,计算得到的最优控制如图 1 所示。

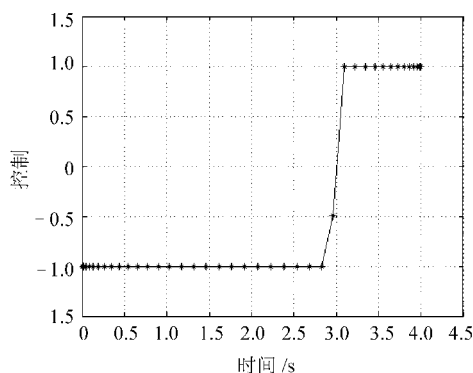


图 1 单相 Bang-Bang 控制

Fig. 1 Single-phase Bang-Bang control

由图 1 可见,误差主要出现在转换点 $t=3$ 。

如果预先知道转换点,可以利用 LGPSM 的多相处理能力,第 1 相为 $t \in [0, 3]$,第 2 相为 $t \in [3, t_f]$,其中 t_f 未知,连接条件为 $x_1^1 = x_0^2$ 即第 1 相的终端状态与第 2 相的初始状态连续。此时得到最优时间 $t_f=4$ 。结果如图 2 所示。

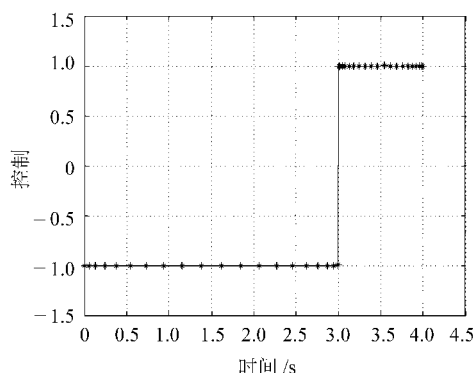


图 2 多相 Bang-Bang 控制

Fig. 2 Multi-phase Bang-Bang control

3 微分代数方程(DAE)最优控制问题

3.1 DAE 最优控制问题转化

更一般地,许多动力学系统还可以表示 DAE 系统和线性微分代数方程(Linear DAE)。

普通 DAE 系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}(t) &= f(z(t), y(t), u(t), p) \\ g(z(t), y(t), u(t), p) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

以及线性 DAE 系统

$$\left. \begin{aligned} A\dot{z}(t) &= f(z(t), y(t), u(t), p) \\ g(z(t), y(t), u(t), p) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

二者可化成统一形式,其动力学方程为

$$M\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), p, t) \quad (25)$$

式中: $x = \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}$; M 为质量矩阵, $M = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

此时动力学约束成为

$$R_k = M \sum_{i=0}^K D_{ki} X_i - \frac{t_i - t_0}{2} f(X_k, U_k, \tau_k, t_0, t_i) = 0 \quad (26)$$

积分约束成为

$$R_f = MX_f - MX_0 - \frac{t_f - t_0}{2} \cdot \sum_{k=1}^K \omega_k f(X_k, U_k, \tau_k, t_0, t_f) = 0 \quad (27)$$

其他条件不变。

3.2 DAE 最优控制实例

考虑一个化学反应的最优控制问题,连续反应 $A > B > C$

$$\max_{u(t)} J = x_2(t_f) \quad (28)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 x_1^2, & x_1(0) &= 1 \\ \dot{x}_2 &= k_1 x_1^2 - k_2 x_2, & x_2(0) &= 0 \\ k_1 - 4000e^{(-2500/T)} &= 0 \\ k_2 - 620000e^{(-5000/T)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$t_f=1$, 温度 $T \in [298, 398]$ 为控制变量。

定义: $x = [x_1 \ x_2 \ k_1 \ k_2]^T$,

$$\text{质量矩阵 } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

注意:本例可以很容易地转化为 ODE 系统,本处仅用来作为 DAE 系统的实例。

本实例取自开放软件 DYNOPT^[11], DYNOPT 是基于 Legendre-Gauss 有限元配置法的直接转化法,可以求解单相最优控制问题。本处作为与 LGPSM 对比。

利用 LGPSM,取 15 个节点,状态和控制的初始估计任意, MATLAB 优化工具箱的 SQP 迭代 257 次,得到最大值 0.610 82,计算时间为 10.9 s。取同样的初始条件和期望精度,利用 DYNOPT, SQP 迭代 295 次,得到 0.610 589,计算时间为 18.6 s。显然, LGPSM 的寻优精度要高于 DYNOPT, 而计算量要远小于 DYNOPT。这主要是由于 LGPSM 利用了拟谱法的谱精度特性:利用若干拟合点可以获得拟合的指数精度。而 DYNOPT 基于低次分段近似,抛弃了拟谱法

的这一最重要的优点。

4 戈达德火箭最优上升问题

最后考虑一个实际的例子: 戈达德火箭问题^[12]: 火箭垂直上升, 控制推力满足动压约束条件使得火箭飞得尽可能高, 终端时间 T 自由。这是一个终端时间自由的有约束最优控制问题 (OCP), 其寻优目标是使火箭的高度最大, 约束条件为固定的燃料质量以及火箭的动压约束。

本问题属于终端自由、有路径约束的奇异最优控制问题。非直接法利用变分法和庞特里亚金极值原理, 需要极其复杂的推导才能得到这个问题的最优必要条件。因为它的解包含有奇异子弧段, 这在利用变分法求解时会带来困难, 需要采用特殊方法处理, 具体介绍见文献^[12]。但利用 Legendre-Gauss 拟谱法直接处理不存在以上困难。问题如下

$$\max_{u, T} J(u, T) = h(T) \quad (30)$$

动力学约束

$$\dot{v} = \frac{1}{m}[u - D(h, v)] - \frac{1}{h^2}, v(0) = 0 \quad (31)$$

式中: $D(h, v) = \frac{1}{2} C_D A \rho_0 v^2 e^{\beta(1-h)}$; $\dot{h} = v, h(0) = 1$;

$1; \dot{m} = -\frac{1}{c} u, m(0) = 1; m(T) = 0.6$ 。

推力约束: $0 \leq u(t) \leq 3.5, \forall t \in [0, T]$;

式中: $\beta = 500; C_D = 0.05; A \rho_0 = 12\ 400; v$ 为垂直速度; h 为径向高度 (在地表, $h = 1$); m 为火箭质量; u 为推力; c 为比冲 (单位质量的脉冲, $c = 0.5$); ρ 为空气密度, $\rho = \rho_0 e^{\beta(1-h)}$; q 为动压 ($q = \frac{1}{2} \rho v^2$); D 为阻力。

终端约束 $m(T) = 0.6$ 指最终火箭没有任何燃料, 此外还有一个约束与动压有关, 即

$$Aq(t) \leq 10, \quad \forall t \in [0, T] \quad (32)$$

即在探空火箭上升段动压必须小于 10。

上述各物理量都经过了归一化处理, 如质量都除以初始质量, 高度都除以地球半径等^[12]。

利用 LGPSM, 取 45 个节点, 初始条件任意, 迭代 116 次, 计算得到的最大高度为 1.012 64, CPU 计算时间为 30 s。

计算结果如图 3 所示。

上升段的动压约束如图 4 所示。

基于一个直觉, 在初始段, 期望火箭以最大加速度垂直上升, 达到某点以后动压达到约束, 此时

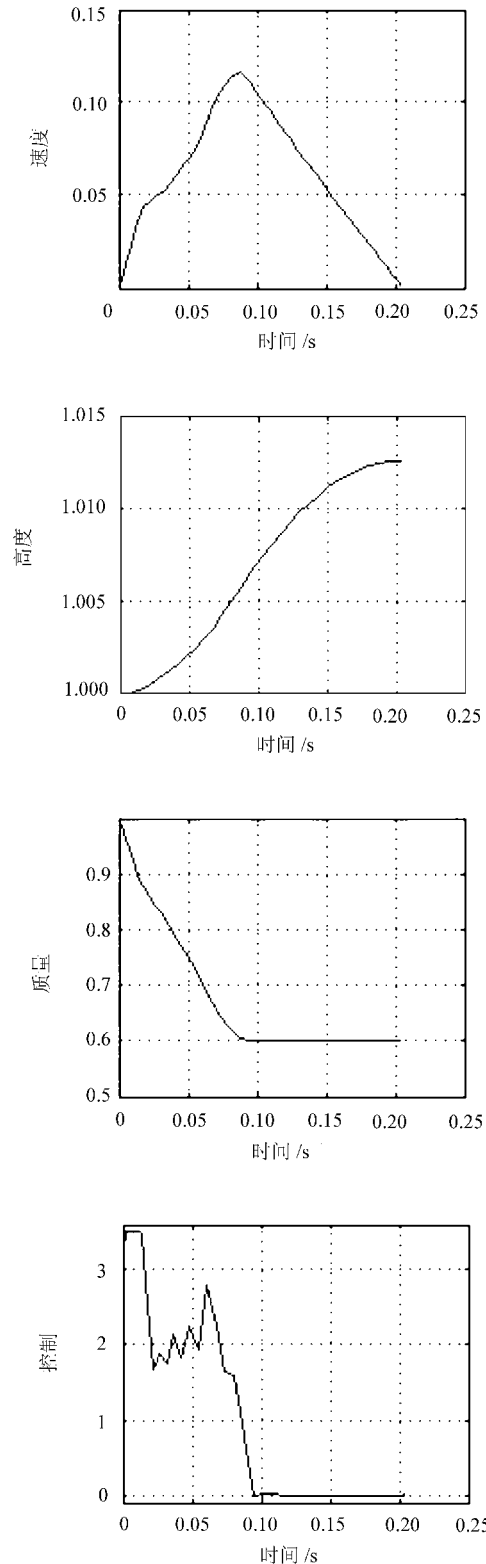


图 3 单相戈达德火箭最优控制
Fig. 3 Single-phase Goddard rocket optimal control

推力必须减小以满足最大动压的约束, 直到最后推力消失, 因此本问题可以转化为一个三相最优控制问题: 第 1 相推力 $u = 3.5$, 以最大加速度上升; 第 2 相 $u < 3.5$, 直到燃料耗尽; 第 3 相 $u = 0$,

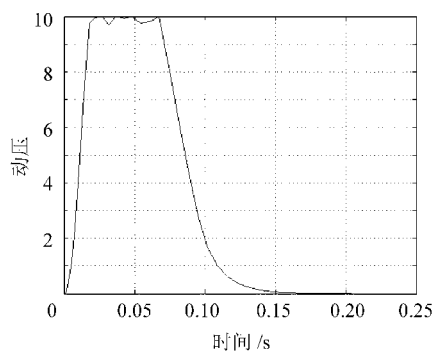


图 4 戈达德火箭动压约束

Fig. 4 Dynamic pressure constraint of Goddard rocket

直到速度为 0。此三相都面临动压约束条件。本问题 $t_1^i, t_1^j, t_1^k = t_f$ 未知 (t_1^i 指第 i 相的终端时刻)。利用 LGPSM, 选取三相的节点数分别为 10, 15, 10, 迭代 10 次, 得到的最大高度为 1.012 68, CPU 处理时间为 53 s。结果如图 5 所示。

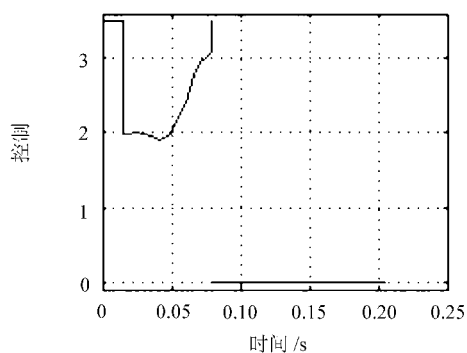
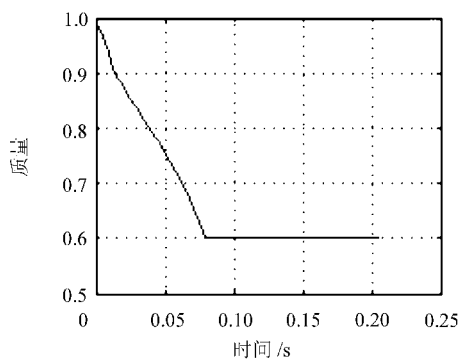
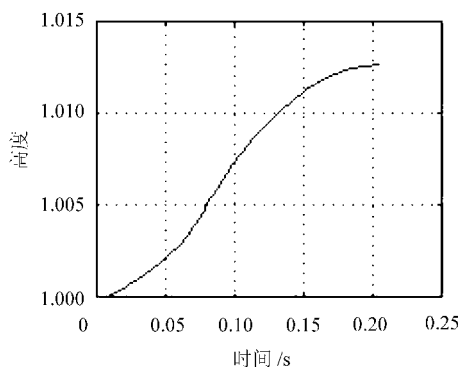
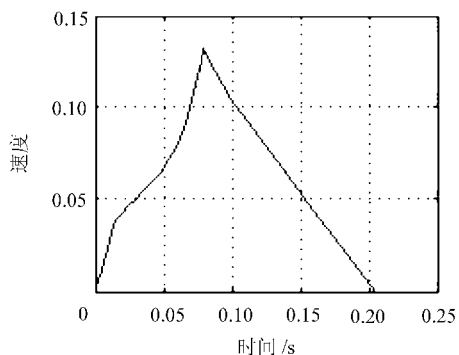


图 5 多相戈达德火箭最优控制

Fig. 5 Multi-phase Goddard rocket optimal control

动压约束如图 6 所示。

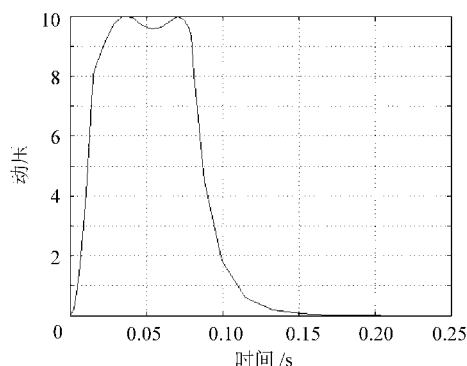


图 6 戈达德火箭动压约束

Fig. 6 Dynamic pressure constraint of Goddard rocket

由本例可以看出,对于传统变分法较难处理的奇异最优控制问题,利用 LGPSM 可以极其方便地求解。整个求解过程由于利用直接转换法也显得更加直观,避免了非直接法中利用变分法和庞特里亚金极值原理进行复杂的推导。而且 LGPSM 对于最优控制问题的初值不敏感(直接法中,打靶法对于初值最为敏感,收敛半径很小。而配置法的收敛半径要稍大一些)。但是缺陷是 LGPSM 把最优控制问题转化为非线性规划问题,因此非线性规划算法的好坏决定了最优控制问题的计算精度(由于 MATLAB 优化工具箱的 SQP 算法比较简单,本例求得的最优值较差,这可以从动压约束图 6 中看出:在中段,理想情形应该是控制推力使得动压达到最大值,而求得的结果并不能处处满足此条件)。此外,由于所有状态和控制都同时离散为一组未知参数,使得非线性规划问题的未知量数目较多。但考虑到拟谱法可以利用少量的节点而获得“谱精度”,因此在获得同等精度条件下, LGPSM 的未知量的个数要远小于基于有限元配置的直接法,使得 LGPSM 的

计算速度和计算精度都要优于传统的基于有限元配置的直接法。

5 结 论

拟谱法对于连续函数的逼近精度可以达到谱精度,利用此优点,本文基于 LGPSM 求解 ODE 最优控制问题,并进一步推广到求解 DAE 最优控制问题。利用拉格朗日重心公式改进传统拉格朗日插值法计算量过大的缺点。针对实际最优控制问题有可能是由有控段和无控段组成,本文提出改进的多相最优控制处理方法,避免对无控段做无谓的寻优,减少计算量。最后本文基于 LG-PSM 编制了通用的最优控制数值计算软件 LG-PSM。各种算例表明,本方法适于求解多种 (ODE 和 DAE) 最优控制问题,是一种具有广泛适用性的通用的最优控制计算方法。最后应用于奇异最优控制戈达德火箭最优上升问题,结果表明本方法对于奇异最优控制问题的求解也非常容易。目前本方法的主要缺点在于 SQP 算法是局部寻优算法,因此可能无法找到全局最优解。可能的改进方向如采用并行的遗传算法或进化策略等。此外由于拟谱法自身的特点,状态和控制都在节点处同时离散,使得未知量的个数随着节点数的增加而快速增加,这是本方法的另一缺点。

参 考 文 献

- [1] Rao A V, Clarke K A. Performance optimization of a maneuvering re-entry vehicle via a legendre pseudospectral method[R]. AIAA-2002-4885, 2002.
- [2] Fahroo F, Ross I M. Costate estimation by a legendre pseudospectral method[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2001, 24(2): 270-277.
- [3] Fahroo F, Ross I M. A spectral patching method for direct trajectory optimization[J]. Journal of the Astronautical Sciences, 2000, 48(2-3): 269-286.
- [4] Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A, et al. Spectral

methods in fluid dynamics[M]. Berlin: SpringerVerlag, 1988.

- [5] Berrut J P, Trefethen L N. Barycentric lagrange interpolation[J]. SIAM Review, 2004, 46(3): 501-517.
- [6] Weideman J A C, Reddy S C. A MATLAB differentiation matrix suite[J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 2000, 26(4): 465-519.
- [7] Benson D A. A Gauss pseudospectral transcription for optimal control[D]. Cambridge: School of Aeronautics and Astronautics, MIT, 2005.
- [8] Benson D A, Huntington G T, Thorvaldsen T P, et al. Direct trajectory optimization and costate estimation via an orthogonal collocation method[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2006, 29(6): 1435-1440.
- [9] Huntington G T, Benson D A, How J P. Computation of boundary controls using a gauss pseudospectral method [C]//2007 Astrodynamics Specialist Conference. 2007.
- [10] Rao A V. Extension of a pseudospectral legendre method to non-sequential multiple-phase optimal control problems [R]. AIAA-2003-5634, 2003.
- [11] Fikar M, Čížniar M. DYNOPT[EB/OL]. (2007-06-15) [2007-06-19]. <http://www.kirp.chtf.stuba.sk/moodle/course/view.php?id=187>.
- [12] Seywald H, Cliff E M. Goddard problem in presence of a dynamic pressure limit[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1993, 16(4): 776-781.

作者简介:

童科伟(1982—) 男,博士研究生。主要研究方向:载人航天。
Tel: 13810171459
E-mail: tongkewei@126.com

周建平(1957—) 男,教授,博士生导师。主要研究方向:载人航天工程总体设计。
Tel: 010-66350913
E-mail: 13331020818@m165.com

何麟书(1938—) 男,教授,博士生导师。主要研究方向:航天器总体设计。
Tel: 010-82316719
E-mail: helinshu@sina.com

(责任编辑:李铁柏)