

## 信号源功率不一致对 MUSIC 算法分辨性能的影响

程正东<sup>①</sup> 罗景青<sup>①</sup> 樊祥<sup>②</sup> 马东辉<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(合肥电子工程学院 合肥 230037)

<sup>②</sup>(中国科学技术大学六系 合肥 230027)

**摘要:** 该文首先定义了用以度量 MUSIC 算法分辨性能的平均信噪比分辨门限, 并给出它的表达式。然后通过数据模拟得知, 功率不一致会降低 MUSIC 算法的分辨能力; 在一定条件下, 功率不一致对 MUSIC 算法分辨性能的相对影响与其他参量无关。该文还讨论了功率不一致对阵元数、快拍数和两信号源方位参数绝对差的影响。

**关键词:** 信号处理; MUSIC 算法; 分辨性能; 平均信噪比分辨门限

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)05-1088-04

## Effect of Power Difference of Two Signal Sources on Resolving Performance of MUSIC Algorithm

Cheng Zheng-dong<sup>①</sup> Luo Jing-qing<sup>①</sup> Fan Xiang<sup>②</sup> Ma Dong-hui<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(Electronic Engineering Institute of Hefei, Hefei 230037, China)

<sup>②</sup>(University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China)

**Abstract:** This paper defines the mean SNR's resolving threshold which can measure the resolving performance of MUSIC algorithm, and deduces the expression of the resolving threshold. The data simulation show that the power difference of the two signal sources can reduce the resolving ability of MUSIC algorithm, that the relative effect of the power difference on the resolving performance of MUSIC algorithm has nothing with other parameters under certain condition. This paper also discusses the effect of the power difference on the number of array element, the number of snap shot and the absolute subtract of the two signal sources' orientation parameter.

**Key words:** Signal processing; MUSIC algorithm; Resolving performance; Mean SNR's resolving threshold

### 1 引言

MUSIC 算法是阵列信号处理中特征结构算法之一, 是一种高分辨性能的参数估计方法。一个算法的分辨性能是指当两个信号源的方向靠得很近时, 该算法将这两个信号源方向分辨出来的能力。算法的分辨性能一般与信噪比有关, 此处的信噪比是指信号的功率与噪声的方差之比。在两信号源不相关的情况下, 当两信号源功率一致时, 文献[1]定义了 MUSIC 算法和最小模算法的信噪比分辨门限, 用以度量这两种算法的分辨性能, 文献[2]给出了各种特征结构算法的信噪比分辨门限的近似表达式。对于两信号源功率不一致情形, 文献[1]虽有提及, 但未深入讨论。当两信号源功率不一致时, 本文类似文献[1]定义了 MUSIC 算法分辨性能的度量——平均信噪比分辨门限, 并给出了精确程度很高的分辨门限表达式。通过数据模拟定量讨论了信号源功率不一致对 MUSIC 算法分辨性能的影响。

### 2 MUSIC 算法分辨性能的度量

#### 2.1 MUSIC 算法的零谱估计的均值

考虑  $L$  元均匀间距线性阵列只接收 2 个信号源的观测模

型<sup>[3]</sup>

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

其中  $\mathbf{y}(t)$  为  $L$  维观测数据,  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2))$  为  $L \times 2$  矩阵,  $\theta_1, \theta_2$  为两信号源的方位参数, 向量  $\mathbf{a}(\theta_i) = (1, e^{j\theta_i}, \dots, e^{j(L-1)\theta_i})^T$  ( $i = 1, 2$ ),  $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), s_2(t))^T$  为 2 维信号向量,  $\mathbf{n}(t)$  为  $L$  维测量噪声。

设测量噪声与信号不相关, 且相对于各个阵元独立同分布, 协方差阵为  $\sigma^2 \mathbf{I}$ , 则  $\mathbf{y}(t)$  的协方差阵和样本协方差阵分别为

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t)\} = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (2)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{y}(t_n)\mathbf{y}^H(t_n) \quad (3)$$

其中  $\mathbf{R}_s = E\{\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)\}$  为信号协方差阵,  $N$  为快拍数。分别对  $\mathbf{R}$  和  $\hat{\mathbf{R}}$  作特征值分解, 并记  $\mathbf{R}$  的特征值和相应的特征向量为  $\lambda_k, \mathbf{e}_k$  且  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$ , 记  $\hat{\mathbf{R}}$  的特征值和相应的特征向量为  $\hat{\lambda}_k, \hat{\mathbf{e}}_k$  且  $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_L \geq 0$  ( $k = 1, 2, \dots, L$ )。

令  $\hat{\mathbf{E}}_n = (\hat{\mathbf{e}}_3, \dots, \hat{\mathbf{e}}_L)$ , 则 MUSIC 算法的零谱的估计表达式为

$$\hat{D}(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{E}}_n\hat{\mathbf{E}}_n^H\mathbf{a}(\theta) \quad (4)$$

当  $N \gg 1$  时, 零谱估计的均值  $D(\theta) = E\{\widehat{D}(\theta)\}$  的近似表达式为<sup>[2,4]</sup>

$$D(\theta) = \left[1 - \frac{\sigma^2}{N}(\gamma_1 + \gamma_2)\right] \left[L - |\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{e}_1|^2 - |\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{e}_2|^2\right] + \frac{\sigma^2(L-2)}{N} \left(\gamma_1 |\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{e}_1|^2 + \gamma_2 |\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{e}_2|^2\right) \quad (5)$$

近似程度达到  $o(1/N)$ 。式中  $\mathbf{a}(\theta) = (1, e^{j\theta}, \dots, e^{j(L-1)\theta})^T$ , 且  $\gamma_k = \lambda_k/(\lambda_k - \sigma^2)^2$ ,  $k = 1, 2$  (6)

## 2.2 平均信噪比分辨门限的定义

由于两信号源功率不一致, 导致他们的信噪比也不一致, 因而不能像文献[1]那样定义信噪比分辨门限, 但可用类似方法定义平均信噪比分辨门限。

**定义 1** 设有两个信号, 其到达方向的方位参数分别为  $\theta_1$  和  $\theta_2$  ( $|\theta_2 - \theta_1|$  很小), 其功率分别为 1 和  $r$  ( $r > 0$ ), 定义两信号的平均信噪比为  $\xi = (1+r)/(2\sigma^2)$ , 则满足下式

$$D\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \geq \frac{D(\theta_1) + D(\theta_2)}{2} \quad (7)$$

的最小的  $\xi$  称为 MUSIC 算法的平均信噪比分辨门限, 记为  $\xi_T$ 。

显然,  $\xi_T$  越小, MUSIC 算法将两信号源分辨出来所需的最小信噪比就越小, 从而 MUSIC 算法的分辨性能就越强, 这说明平均信噪比分辨门限  $\xi_T$  可以作为 MUSIC 算法分辨性能的度量。

## 2.3 平均信噪比分辨门限的表达式

设阵列只接收到两个方位参数分别为  $\theta_1, \theta_2$  的不相关信号, 它们的功率不一致, 即可设信号的协方差阵为

$$\mathbf{R}_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad (8)$$

式中  $r > 0$ 。于是式(2)右边的第 1 项

$$\mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H = \mathbf{a}(\theta_1)\mathbf{a}^H(\theta_1) + r\mathbf{a}(\theta_2)\mathbf{a}^H(\theta_2) \quad (9)$$

由于  $\theta_1 \neq \theta_2$ , 所以  $L$  阶方阵  $\mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H$  只有两个特征值非零。记  $\mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H$  的非零特征值为  $\mu_1, \mu_2$ , 相应的特征向量为  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , 并记  $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}(\theta_i)$  ( $i = 1, 2$ ), 则有

$$\mu_{1,2} = \frac{L(1+r) \left[1 \pm \sqrt{1 - 4r(1 - \rho_1^2)/(1+r)^2}\right]}{2} \quad (10)$$

$$\mathbf{e}_{1,2} = [L\rho_1 e^{j\varphi} \mathbf{a}_1 + (\mu_{1,2} - L)\mathbf{a}_2] / c_{1,2} \quad (11)$$

其中

$$\rho_1 = \left[\sin \frac{L}{2}(\theta_2 - \theta_1)\right] / \left[L \sin \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)\right] \quad (12)$$

$$\varphi = [(L-1)/2](\theta_2 - \theta_1) \quad (13)$$

$$c_{1,2}^2 = (\mu_{1,2} - L)^2 L + (2\mu_{1,2} - L)L^2 \rho_1^2 \quad (14)$$

记  $\theta_m = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$ ,  $\mathbf{a}_m = \mathbf{a}(\theta_m)$ , 经计算可得

$$|\mathbf{a}_i^H \mathbf{e}_i|^2 = \mu_i^2 L^2 \rho_1^2 / c_i^2, \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

$$|\mathbf{a}_2^H \mathbf{e}_i|^2 = \mu_i^2 (\mu_i - L)^2 / (r^2 c_i^2), \quad i = 1, 2 \quad (16)$$

$$|\mathbf{a}_m^H \mathbf{e}_i|^2 = L^2 \rho_2^2 [L\rho_1 + (\mu_i - L)]^2 / c_i^2, \quad i = 1, 2 \quad (17)$$

其中

$$\rho_2 = \left[\sin \frac{L}{4}(\theta_2 - \theta_1)\right] / \left[L \sin \frac{1}{4}(\theta_2 - \theta_1)\right] \quad (18)$$

在定义 1 中, 令  $2D_1(\theta_m) = D_1(\theta_1) + D_1(\theta_2)$ , 并由式(5), 式(6)和式(10)~式(18), 可得 MUSIC 算法的平均信噪比分辨门限表达式:

$$\xi_T = (1+r) \left[ (\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2) + \sqrt{(\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2)^2 + 8d_0(d_1 + d_2)} \right] / (8d_0) \quad (19a)$$

$$\text{其中 } d_0 = L - |\mathbf{a}_m^H \mathbf{e}_1|^2 - |\mathbf{a}_m^H \mathbf{e}_2|^2 \quad (19b)$$

$$d_1 = \frac{1}{N\mu_1^2} \left[ (L-2) \left( |\mathbf{a}_1^H \mathbf{e}_1|^2 + |\mathbf{a}_2^H \mathbf{e}_1|^2 \right) - 2(L-1) |\mathbf{a}_m^H \mathbf{e}_1|^2 + 2L - 2 |\mathbf{a}_m^H \mathbf{e}_2|^2 \right] \quad (19c)$$

$$d_2 = \frac{1}{N\mu_2^2} \left[ (L-2) \left( |\mathbf{a}_1^H \mathbf{e}_2|^2 + |\mathbf{a}_2^H \mathbf{e}_2|^2 \right) - 2(L-1) |\mathbf{a}_m^H \mathbf{e}_2|^2 + 2L - 2 |\mathbf{a}_m^H \mathbf{e}_1|^2 \right] \quad (19d)$$

## 3 功率不一致对 MUSIC 算法分辨性能的影响

显然, 式(8)中的  $r$  体现了两信号源功率的不一致, 但为了讨论的方便, 可令  $\gamma = 10 \lg r$ , 这样做的原因之一是  $\gamma$  的单位为分贝(dB)。下面皆以  $\gamma$  作为描述信号源功率不一致的度量。

### 3.1 功率不一致对平均信噪比分辨门限的影响

由式(19)可知,  $\xi_T$  除了与  $r$  (即  $\gamma$ ) 有关外, 还与阵元数  $L$ 、快拍数  $N$  以及两信号方位参数绝对差  $\Delta\theta = |\theta_1 - \theta_2|$  有关, 因此可记  $\xi_T = \xi_T(\gamma, L, N, \Delta\theta)$ 。从定义 1 不难理解,  $\xi_T(\gamma, L, N, \Delta\theta)$  应关于  $\gamma$  对称, 即

$$\xi_T(\gamma, L, N, \Delta\theta) = \xi_T(-\gamma, L, N, \Delta\theta) \quad (20)$$

这一点也可由式(19)理论证明。于是只需讨论  $\gamma \geq 0$  的情形。

由于  $L, N, \Delta\theta$  对  $\xi_T$  都有影响, 为了便于讨论  $\gamma$  对  $\xi_T$  的影响, 固定  $L = 30$ ,  $N = 1000$  和  $\Delta\theta = 0.03$ 。模拟数据见表 1。

由表 1 可见, 随着  $\gamma$  的增加,  $\xi_T$  也增加, 而且当  $\gamma$  较大时,  $\xi_T$  增加得非常快。这说明当两信号源功率不一致时, MUSIC 算法的分辨性能会下降, 功率差异越大, 分辨性能越差。之所以如此, 是因为当信号源功率不一致时, 往往比较容易检测出功率大的那一个, 而不太容易检测出功率小的那一个。当差异很大时, 功率小的那一个信号源几乎检测不出, 从而导致分辨性能急速下降。

### 3.2 功率不一致对平均信噪比分辨门限的相对影响

为进一步讨论功率不一致对分辨性能的影响, 引入比值函数:

$$k(\gamma, L, N, \Delta\theta) = \frac{\xi_T(\gamma, L, N, \Delta\theta)}{\xi_T(0, L, N, \Delta\theta)} \quad (21)$$

显然  $k(\gamma, L, N, \Delta\theta)$  体现了  $\gamma$  对门限  $\xi_T$  的相对影响。虽然  $k(\gamma, L, N, \Delta\theta)$  仍然是  $L, N, \Delta\theta$  的函数, 但由数据模拟发现,

$N$  对  $k(\gamma, L, N, \Delta\theta)$  几乎没有影响, 而当

$$\left. \begin{aligned} 3 \leq L \leq 100 \\ 0.001 \leq \Delta\theta \leq 0.1 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

时,  $L, \Delta\theta$  对  $k(\gamma, L, N, \Delta\theta)$  也几乎没有影响(见表 2)。

这说明在式(22)的条件下,  $k(\gamma, L, N, \Delta\theta)$  完全反映了信号源功率不一致对 MUSIC 算法平均信噪比分辨门限的影响程度, 因此可称  $k(\gamma, L, N, \Delta\theta)$  为功率不一致对 MUSIC 算法分辨性能的影响函数, 并将其记为  $k(\gamma)$ 。图 1 通过拟合得到影响函数  $k(\gamma)$  的变化曲线, 它  $k(\gamma)$  是功率不一致对 MUSIC 算法分辨性能的影响曲线。

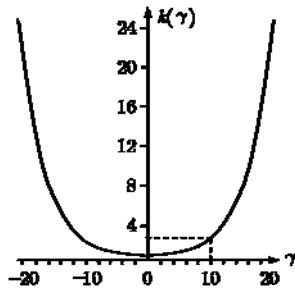


图 1  $k(\gamma)$  的变化曲线 ( $\Delta\theta = 0.03, L = 30, N = 1000$ )

由图 1 可见, 功率差异越大对平均信噪比分辨门限的影响程度越高。不难发现, 当  $|\gamma| \leq 10$  时,  $\gamma$  对  $\xi_T$  的影响不太大; 但当  $|\gamma| > 10$  时,  $\gamma$  对  $\xi_T$  的影响非常大。

由式(21)可得

$$\xi_T(\gamma, L, N, \Delta\theta) = k(\gamma)\xi_T(L, N, \Delta\theta) \quad (23)$$

其中  $\xi_T(L, N, \Delta\theta) = \xi_T(0, L, N, \Delta\theta)$ 。即在式(22)的条件下,  $\xi_T(\gamma, L, N, \Delta\theta)$  对于变量  $\gamma$  具有可分离性。

当  $L > 100, \Delta\theta > 0.1$  时,  $k(\gamma, L, N, \Delta\theta)$  的值通常会增大, 但这不是表明分辨性能下降, 而是说明  $\gamma$  对  $\xi_T$  的影响增大。

#### 4 功率不一致对其他参量的影响

实际上, 阵元数  $L$ 、快拍数  $N$  和方位参数差  $\Delta\theta$  都是影响 MUSIC 算法分辨性能的重要参量, 因此有必要讨论  $\gamma$  对

$L, N, \Delta\theta$  的影响。

##### 4.1 $\gamma$ 对 $\Delta\theta$ 的影响

当  $L, N$  固定时, 考虑以  $\gamma$  为自变量、 $\Delta\theta$  为因变量的隐函数

$$\xi_T(\gamma, L, N, \Delta\theta) = c \quad (c \text{ 为某一常数}) \quad (24)$$

它反映了  $\Delta\theta$  随  $\gamma$  的变化情况。由于  $\xi_T(\gamma, L, N, \Delta\theta)$  是  $\gamma$  的增函数, 是  $\Delta\theta$  的减函数, 所以  $\gamma$  增加会导致  $\Delta\theta$  的增加(见表 3 第 2 行)。由于参量  $\Delta\theta$  直接反映了 MUSIC 算法的分辨率, 所以  $\Delta\theta$  增加意味着分辨率的降低。

##### 4.2 $\gamma$ 对 $L$ 的影响

为避免降低分辨率, 可以调整阵元数  $L$ 。固定式(24)中的  $\Delta\theta, N$ , 即得  $\gamma$  与  $L$  的函数关系式。由此关系式不难看出,  $\gamma$  增加会导致的  $L$  增加(见表 3 第 3 行)。但由于客观条件的限制, 阵元数不能增加太多, 特别对于已投入使用的阵列天线, 阵元数是不能改变的。

##### 4.3 $\gamma$ 对 $N$ 的影响

若阵元数不能增加, 又不能降低分辨率, 则只能调整快拍数  $N$ 。固定式(24)中的  $\Delta\theta, L$ , 即是  $\gamma$  与  $N$  的函数关系式。显然  $\gamma$  增加会导致的  $N$  增加(见表 3 第 4 行)。但当  $\gamma$  较大时, 通过增加快拍数来保证分辨率是不现实的。

综上所述, 由  $\gamma$  的增加引起的分辨性能的改变, 单纯通过  $L, N, \Delta\theta$  中某一个参量来修正 是困难的, 需要综合考虑。首先在制造阵列天线时, 在条件允许的情况下, 尽可能增加阵元数。阵元数确定后, 尽可能增加快拍数。但实际条件往往不能提供更多的数据, 这时只能降低分辨率。

另外, 固定式(24)中的  $\gamma, L$ , 可得  $\Delta\theta$  与  $N$  的关系式, 由此关系式可得  $N$  随  $\Delta\theta$  的变化情况(见表 4 第 2 行); 固定式(24)中的  $\gamma, N$ , 可得  $\Delta\theta$  与  $L$  的关系式, 由此关系式可得  $L$  随  $\Delta\theta$  的变化情况(见表 4 第 3 行)。

可见, 当  $\Delta\theta < 0.03$  时,  $\Delta\theta$  的微小变化会引  $N, L$  的剧烈变化, 因此当信噪比较小时, 通过增加阵元数和快拍数来提高分辨率是不易实现的。

表 1 固定  $L, N, \Delta\theta$  时  $\gamma$  对  $\xi_T$  的影响

$\gamma$	0	2	4	6	8	10	12	15	20
$\xi_T$	8.936	9.418	10.969	13.922	18.917	27.031	40.014	75.182	227.883

表 2  $k(\gamma, L, N, \Delta\theta)$  的模拟数据

$k(\gamma, L, N, \Delta\theta)$	$\gamma = 0$	$\gamma = 2$	$\gamma = 4$	$\gamma = 6$	$\gamma = 8$	$\gamma = 10$	$\gamma = 12$
$\Delta\theta = 0.06, L = 10, N = 500$	1	1.054	1.227	1.558	2.117	3.025	4.478
$\Delta\theta = 0.06, L = 20, N = 500$	1	1.054	1.228	1.558	2.117	3.025	4.478
$\Delta\theta = 0.03, L = 20, N = 500$	1	1.054	1.227	1.558	2.117	3.025	4.478
$\Delta\theta = 0.03, L = 30, N = 1000$	1	1.054	1.227	1.558	2.117	3.025	4.478

表 3  $\gamma$  对  $\Delta\theta, L, N$  的影响

$\gamma$	0	5	10	15	20
$L = 30, N = 1000, c \approx 8.95$	$\Delta\theta = 0.03$	$\Delta\theta = 0.0325$	$\Delta\theta = 0.04$	$\Delta\theta = 0.0526$	$\Delta\theta = 0.0713$
$\Delta\theta = 0.03, N = 1000, c \approx 8.7$	$L = 30$	$L = 33$	$L = 40$	$L = 52$	$L = 69$
$\Delta\theta = 0.03, L = 30, c = 8.936$	$N = 1000$	$N = 1421$	$N = 3650$	$N = 14780$	$N = 89280$

表 4  $\Delta\theta$  对  $N, L$  的影响( $\gamma = 0$ )

$\Delta\theta$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
$L = 30, c \approx 8.925$	$N = 148860$	$N = 5776$	$N = 1000$	$N = 297$	$N = 116$
$N = 1000, c \approx 8.7$	$L = 89$	$L = 45$	$L = 30$	$L = 22$	$L = 18$

### 5 结束语

本文通过平均信噪比分辨门限讨论了两信号源功率不一致时对 MUSIC 算法分辨性能的影响。功率差异越大, 平均信噪比分辨门限就越高, 对阵元数  $L$ 、快拍数  $N$  和方位参数差  $\Delta\theta$  影响也越大。

本文只讨论了两个信号源不相关的情形, 对于相关情形, 有待进一步讨论。

### 参 考 文 献

[1] Kaveh M and Barabell A J. The statistical performance of the MUSIC and minimum-norm algorithms in resolving plane waves in noise. *IEEE Trans. on ASSP*, 1986, 34(2): 331-341.  
 [2] 罗景青, 保铮. 特征结构法的分辨性能. *电子科学学刊*, 1991, 13(2): 337-344.

[3] 罗景青. 阵列信号处理基本理论与应用. 解放军出版社, 2007, 2.  
 [4] Farrier D R, Jeffries D J, and Mardani R. Theoretical performance prediction of the MUSIC algorithm. *IEE Proc. F.*, 1988, 135(3): 216-224.

程正东: 男, 1972 年生, 博士生, 研究方向为信号与信息处理、图像处理。  
 罗景青: 男, 1957 年生, 博士生导师, 研究方向为雷达对抗信号与信息处理、空间信息对抗。  
 樊 祥: 男, 1963 年生, 博士生导师, 研究方向为光电对抗、红外信息处理。  
 马东辉: 男, 1973 年生, 讲师, 研究方向为光电对抗、红外图像处理。