顶管施工引起邻近地下管线附加荷载的分析

魏纲1,朱奎2

(1. 浙江大学城市学院 土木工程系,浙江 杭州 310015; 2. 浙江大学 岩土工程研究所,浙江 杭州 310027)

摘要:利用弹性力学的 Mindlin 解,推导得到顶管掘进机与土体之间的摩擦力和后续管道与土体之间的摩擦力引起的土体附加应力计算公式。假定土体为 Winkler 模型,推导得到土体损失引起的垂直向土体附加应力计算公式。研究了顶管施工在邻近垂直交叉地下管线上引起的附加荷载分布规律。研究结果表明:附加荷载的变化规律与地下管线和掘进机的相对位置密切相关,是一个三维问题;随着地下管线与顶管之间距离的减小,附加荷载急剧增大;在正常施工时,竖直方向引起的附加荷载值最大,顶进方向其次,垂直于管壁方向最小。 关键词:隧道工程;顶管;地下管线;附加荷载;土体损失

中图分类号: U 45 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000 - 6915(2007)增 1 - 2724 - 06

ANALYSIS OF ADDITIONAL LOAD ON ADJACENT UNDERGROUND PIPELINE INDUCED BY PIPE JACKING CONSTRUCTION

WEI Gang¹, ZHU Kui²

Department of Civil Engineering, Zhejiang University City College, Hangzhou, Zhejiang 310015, China;
 Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310027, China)

Abstract: The computing formulas of soil additional stress induced by force of friction between shield and soil, and the force of friction between follow-up pipes and soil are derived from Mindlin solution in elastic mechanics. By assuming the soil as the Winkler model, the vertical soil additional stress formula caused by ground loss is derived. The distribution regularity of total additional load on perpendicularly crossing buried pipeline induced by pipe jacking construction is studied. The analytical results show that the distribution regularity of additional load is closely related with the relative position of underground pipeline and shield, and it is a three-dimensional problem. The value of additional load increases rapidly with the decreased distance of underground pipeline and pipe. The value of additional load toward vertical direction is the maximum, that toward the pipe jacking direction condition. **Key words:** tunneling engineering; pipe jacking; underground pipeline; additional load; ground loss

1 引 言

顶管施工不可避免地会对周围土体产生扰动, 引起地面和地下土体的移动。由于城市地下空间的 限制以及各已建地下管线的存在,与地下管线近距 离的顶管施工已成为不可回避的课题。由于顶管埋 深较浅,施工会对邻近地下管线产生较大危害。吴 修锋^[1]利用弹性力学的 Mindlin 解求得顶管正面附 加推力引起的土体附加应力计算公式,并对其分布 规律进行了分析。胡 昕和黄宏伟^[2]分析了顶管正面 附加推力在相邻水平平行管道上引起的附加荷载分 布规律。目前关于盾构施工对邻近地下管线影响的 研究较多^[3~5],魏 纲等^[6]采用有限元模拟顶管施工

收稿日期: 2006 - 04 - 12; 修回日期: 2006 - 05 - 31

作者简介:魏 纲(1977-),男,博士,2000年毕业于宁波大学建筑工程专业,主要从事顶管、盾构施工技术及其对周边环境影响等方面的研究工作。 E-mail: weig@zucc.edu.cn

引起的邻近地下管线移动。但是关于顶管施工在邻 近地下管线上引起的附加荷载及分布规律的研究还 比较缺乏。

本文利用弹性力学的 Mindlin 解,推导得到顶 管掘进机和后续管道与土体之间的摩擦力引起的土 体附加应力计算公式。假定土体为 Winkler 模型, 推导得到土体损失引起的垂直向土体附加应力计算 公式。研究了顶管施工在邻近垂直交叉地下管线上 引起的附加荷载大小及其分布规律。

2 顶管推进的力学模型及假定

顶管施工引起地面变形的因素主要有:正面附加推力、掘进机与土体之间的摩擦力、后续管道与 土体之间的摩擦力以及土体损失^[7]。因此,在研究顶 管施工对邻近地下管线影响时必须考虑以上这几个 因素的共同作用。当地下管线与隧道开挖方向垂直 时其受力情况是最不利的,本文对此进行研究。 图 1(a)为力学计算模型^[8],图中*D*为掘进机外直径 (m);*L*为擂进机长度(不包括刀盘长度,m);*L*,为 后续管道总长度(m)。图 1(b)为相对位置示意图。





文中规定使地下管线产生远离顶管方向的力为 压力,用正号表示;反之则为拉力,用负号表示。 假定:(1)顶管是在正常固结软土中沿直线顶进, 不考虑掘进机偏斜和注浆压力;(2)土体为均质线 弹性半无限体;(3)顶管的推进面为荷载作用面, 将正面附加推力近似为圆形均布荷载^[2];(4) 掘进 机和后续管道与土体之间的摩擦力均匀分布;(5) 掘进机的推进仅为空间位置上的变化,不考虑时间 效应;(6)不考虑地下管线本身刚度对附加荷载传 递的影响;(7)地下管线是连续的弹性体,且其截 面保持不变;(8)地下管线与土体始终互相接触。

3 顶管施工引起的土体附加应力计算

3.1 正面附加推力引起的附加应力

计算所取坐标系见图 1,在图中荷载作用圆截 面内取微分面积 rdrd θ ,利用 Mindlin 弹性解^[9],直 接积分得到圆形均布荷载作用下土体中任一点 (x, y, z)处的附加应力 $\sigma_{x1}, \sigma_{y1}, \sigma_{z1}, 其中\sigma_{x1}$ 的 计算公式可参见吴修锋^[1]的研究成果, σ_{y1} 参见魏 纲和魏新江^[8]的研究成果, σ_{z1} 为

$$\sigma_{z1} = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{D/2} \frac{Px}{8\pi(1-\mu)} \Biggl\{ \frac{-1+2\mu}{M_{1}^{3}} + \frac{1-2\mu}{N_{1}^{3}} + \frac{3(z-h+r\sin\theta)^{2}}{M_{1}^{5}} + \frac{3(3-4\mu)(z+h-r\sin\theta)^{2}}{N_{1}^{5}} - \frac{6(h-r\sin\theta)}{N_{1}^{5}} \Biggl[h-r\sin\theta + (1-2\mu)(z+h-r\sin\theta) + \frac{5z(z+h-r\sin\theta)^{2}}{N_{1}^{2}} \Biggr] \Biggr\} r dr d\theta$$
(1)

式中: µ为土的泊松比; P 为掘进机正面附加推力 (kPa),在正常施工中 P 一般控制在-20~20 kPa^[10]; *M*₁, *N*₁可表示为

$$M_1 = \sqrt{x^2 + (y + r\cos\theta)^2 + (z - h + r\sin\theta)^2}$$
$$N_1 = \sqrt{x^2 + (y + r\cos\theta)^2 + (z + h - r\sin\theta)^2}$$

3.2 掘进机与土体之间的摩擦力引起的附加应力

计算所取坐标系见图 1,采用极坐标,取掘进 机壳体表面的微分面积 $Rd/d\theta$,利用 Mindlin 弹性 解^[9],通过直接积分得到掘进机与土体之间的摩擦 力作用下土体中任一点(x,y,z)处的附加应力 σ_{x2} , σ_{y2} , σ_{z2} ,其中 σ_{y2} 的计算公式可参见魏 纲 和魏新江^[8]的研究成果, σ_{x2} , σ_{z2} 分别为

$$\sigma_{x2} = \frac{Rp}{8\pi(1-\mu)} \int_0^{2\pi} \int_0^L (x+l) \left\{ \frac{1-2\mu}{M_2^3} - \frac{(1-2\mu)(5-4\mu)}{N_2^3} + \frac{1-2\mu}{N_2^3} +$$

$$\frac{3(x+l)^2}{M_2^5} + \frac{3(3-4\mu)(x+l)^2}{N_2^5} + \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{N_2(N_2+z+h-R\sin\theta)^2} \cdot \left[3 - \frac{(x+l)^2(3N_2+z+h-R\sin\theta)}{N_2^2(N_2+z+h-R\sin\theta)}\right] - \frac{6(h-R\sin\theta)}{N_2^5} \cdot \left[3(h-R\sin\theta) - (3-2\mu)(z+h-R\sin\theta) + \frac{5(x+l)^2z}{N_2^2}\right]\right] dld\theta$$

$$(2)$$

$$\sigma_{z2} = \frac{Rp}{8\pi(1-\mu)} \int_0^{2\pi} \int_0^L (x+l) \left\{\frac{-1+2\mu}{M_2^3} + \frac{1-2\mu}{N_2^3} + \frac{1-2\mu}{N_2^3}\right\} dld\theta$$

$$\frac{3(z-h+R\sin\theta)^2}{M_2^5} + \frac{3(3-4\mu)(z+h-R\sin\theta)^2}{N_2^5} - \frac{6(h-R\sin\theta)}{N_2^5} \left[h-R\sin\theta + (1-2\mu)(z+h-R\sin\theta) + \frac{5z(z+h-R\sin\theta)^2}{N_2^2}\right] dld\theta$$
(3)

式中: *R* 为掘进机半径(m); *p* 为掘进机与土体之间 单位面积的摩擦力(kPa),取值可参考魏 纲等^[7]的研 究成果; *M*,, *N*,可表示为

$$M_{2} = \sqrt{(x+l)^{2} + (y+R\cos\theta)^{2} + (z-h+R\sin\theta)^{2}}$$
$$N_{2} = \sqrt{(x+l)^{2} + (y+R\cos\theta)^{2} + (z+h-R\sin\theta)^{2}}$$

3.3 后续管道与土体之间的摩擦力引起的附加应力

计算所取坐标系见图 1,采用极坐标,取管道 表面的微分面积 R_1 d/d θ ,利用 Mindlin 弹性解^[9], 通过直接积分得到后续管道与土体之间的摩擦力作 用下土体中任一点(x,y,z)处的附加应力 σ_{x3} , σ_{y3} , σ_{z3} ,其中 σ_{y3} 的计算公式可参见魏 纲和魏新 江^[8]的研究成果, σ_{x3} , σ_{z3} 分别为

$$\sigma_{x3} = \frac{R_1 p_1}{8\pi (1-\mu)} \int_0^{2\pi} \int_L^{L+L_1} (x+l) \left\{ \frac{1-2\mu}{M_3^3} - \frac{(1-2\mu)(5-4\mu)}{N_3^3} + \frac{1-2\mu}{N_3^3} + \frac{1-$$

$$\frac{3(x+l)^2}{M_3^5} + \frac{3(3-4\mu)(x+l)^2}{N_3^5} + \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{N_3(N_3+z+h-R_1\sin\theta)^2} \cdot \left[3 - \frac{(x+l)^2(3N_3+z+h-R_1\sin\theta)}{N_3^2(N_3+z+h-R_1\sin\theta)}\right] - \frac{6(h-R_1\sin\theta)}{N_3^5} \cdot \frac{6(h-R_1\sin\theta)}{N_3^5} \cdot \frac{1}{N_3^5} + \frac{1}{N_3^5} \cdot \frac{1}{N_3^5} + \frac{1}{N_3^5} \cdot \frac{1$$

$$\left[3(h-R_{1}\sin\theta)-(3-2\mu)(z+h-R_{1}\sin\theta)+\frac{5(x+l)^{2}z}{N_{3}^{2}}\right]dld\theta$$
(4)

$$\sigma_{z3} = \frac{R_{1}p_{1}}{8\pi(1-\mu)} \int_{0}^{2\pi} \int_{L}^{L+L_{1}} (x+l) \left\{ \frac{-1+2\mu}{M_{3}^{3}} + \frac{1-2\mu}{N_{3}^{3}} + \frac{3(z-h+R_{1}\sin\theta)^{2}}{M_{3}^{5}} + \frac{3(3-4\mu)(z+h-R_{1}\sin\theta)}{N_{3}^{5}} - \frac{6(h-R_{1}\sin\theta)}{N_{3}^{5}} \left[h-R_{1}\sin\theta + (1-2\mu)(z+h-R_{1}\sin\theta) + \frac{5z(z+h-R_{1}\sin\theta)^{2}}{N_{3}^{2}} \right] \right\} dld\theta$$
(5)

式中: R_1 为后续管道的外半径(m); p_1 为后续管道 与土体之间单位面积的摩擦力(kPa),取值可参考魏 纲等^[7]的研究成果; M_3 , N_3 可表示为

$$M_{3} = \sqrt{(x+l)^{2} + (y+R_{1}\cos\theta)^{2} + (z-h+R_{1}\sin\theta)^{2}}$$
$$N_{3} = \sqrt{(x+l)^{2} + (y+R_{1}\cos\theta)^{2} + (z+h-R_{1}\sin\theta)^{2}}$$

式(1)~(5)很难直接积分计算,可采用以下方法: (1)利用 Fortran 编程进行计算; (2)令 $\theta = \pi + \pi t$, $t \in [-1, 1]$, 对式(1)~(5)进行积分变换, 然后采用定积分和 Gauss-Legendre 数值积分^[11]相结合的方法进行求解,本文不具体展开。

3.4 土体损失引起的 z 方向附加应力

P. B. Attewell 等^[12]假定土体为 Winkler 模型, 对隧道开挖对邻近地下管线的影响进行了研究。由 于土体损失引起的土体附加应力计算非常困难,目 前对这方面的研究较少,还没有可以计算由土体损 失引起的土体中任一点处附加应力的计算公式。

假定土体为 Winkler 模型,参考 Attewell 的方法,利用笔者提出的可计算由土体损失引起的土体中任一点(*x*, *y*, *z*)处沉降的通用经验公式^[13],推导得到由土体损失引起的土体中任一点(*x*, *y*, *z*)处产生的*z*方向的附加应力为

$$\sigma_{z4} = -kS(x, y, z) = -k \frac{V_{\text{loss}}}{\sqrt{2\pi i}} \left\{ \Phi \left[\frac{x - x_i}{i(1 - z/h)^{0.3}} \right] - \Phi \left[\frac{x - x_f}{i(1 - z/h)^{0.3}} \right] \right\}.$$

$$\left(1 - \frac{z}{h} \right)^{-0.3} \exp \left[-\frac{y^2}{2i^2(1 - z/h)^{0.6}} \right]$$
(6)

式中: x 为顶进方向离开挖面的水平距离(m); y 为 离顶管轴线的水平距离(m); z 为离地面的竖向距离 (m),以向下为正; V_{loss} 为隧道单位长度土体损失量 (m³/m),且 $V_{loss} = \eta R^2$,其中, η 为土体损失百分 率; x_i 为顶管推进起始点位置(m); x_f 为当前隧道 开挖面的位置(m); ϕ 为函数,可由标准正态分布 函数表查得; i 为地面沉降槽宽度系数(m); k 为地 基反力系数(MN/m³),且k = K/b,其中b 为基础宽 度(m),K 为集中基床系数(MPa),且 $K = 1.2E_0/(1 - \mu^2)^{[14]}$, E_0 为土的变形模量(MPa),K也可通过载 荷试验确定,在黏性土中可假设K值与深度无关^[15]。

3.5 共同作用引起的附加应力

由于无法得到土体损失引起的 *x*, *y* 方向的土体 附加应力计算公式, 对于 *x*, *y* 方向, 本文只研究正 面附加推力、掘进机和后续管道与土体之间的摩擦 力的共同作用。将土中任一点(*x*, *y*, *z*)处产生的附 加应力叠加,得到顶管施工引起的总的附加应力计 算公式为

$$\sigma_{x} = \sigma_{x1} + \sigma_{x2} + \sigma_{x3}$$

$$\sigma_{y} = \sigma_{y1} + \sigma_{y2} + \sigma_{y3}$$

$$\sigma_{z} = \sigma_{z1} + \sigma_{z2} + \sigma_{z3} + \sigma_{z4}$$
(7)

4 算例分析

作一顶管施工算例分析(采用注浆减摩)。由于 在顶管推进过程中地下管线受到附加荷载的作用面 是变化的,为便于分析,视地下管线为一弹性杆件, 附加荷载承受点为地下管线轴线处。当地下管线直 径较小时,该假定带来的误差较小。坐标系见图 1, 计算参数取值如下: D=2 m, $D_1=1.98$ m, h=6 m, L=3.4 m, $L_1=50$ m, P=20 kPa, p=18 kPa, $p_1=$ 4 kPa, $\mu=0.35$, $\eta=1\%$, i=3.091 m, $E_s=5$ MPa, K=4.26 MPa,地下管线的计算长度取 40 m。

4.1 x 方向地下管线附加荷载分布

如图 2 所示,在 x 方向当掘进机离地下管线距 离较远时地下管线就开始受到压力作用,产生朝顶 进方向的移动;随着掘进机的靠近,附加荷载值不 断增大,在 x = 1 m 时达到最大值,曲线峰值出现在 顶管轴线正上方处,最大值为 5.37 kN/m,地下管线 两端的附加荷载值较小。因此顶管轴线正上方处的 地下管线部位容易受损。随着掘进机的继续前进, 附加荷载值开始减小;当开挖面通过后约 2 m 时, 靠近顶管轴线附近处的地下管线开始出现拉力,并 随掘进机的前进而增大; 当 x = -4 m 时, 顶管轴线 附近处的地下管线产生较大的拉力, 两端则受到压 力, 使地下管线受到剪力作用, 有可能使地下管线 产生横向裂缝。由图 2 可知, x 方向的附加荷载影 响范围较大, 基本上在±10 m 范围内, 在±10 m 以 外的地下管线受到的附加荷载较小。





如图 3 所示,随着地下管线与顶管距离的减小, 附加荷载急剧增大,其最大值随地下管线与顶管距 离减小近似呈指数函数增大。因此在设计顶管轴线 时,应尽可能地增大与地下管线的距离。

4.2 y方向地下管线附加荷载分布

如图 4 所示,随着掘进机的通过前后,地下管 线先是主要承受压力,随后变为主要承受拉力。附 加荷载曲线形状与 x 方向相差较大,靠近顶管轴线 附近处的地下管线部位受到的附加荷载方向与两端





Fig.3 Distribution of additional load along *x*-direction with different values *z*



图 4 y 方向的附加荷载分布 Fig.4 Distribution of additional load along y-direction

相反。附加荷载曲线关于顶管轴线对称,先呈"M" 形分布,后呈"W"形分布。附加荷载的影响范围 较大,基本上在±15m范围内,产生的最大附加荷 载值(0.88 kN/m)较小。y方向产生的附加荷载主要 会对地下管线产生拉拔和挤压作用,过大的拉伸或 压缩会造成管线接头松动导致渗漏甚至于脱开。

4.3 z方向地下管线附加荷载分布

如图 5 所示,随着掘进机的通过前后,在 z 方 向地下管线均承受拉力,产生向下的移动。顶管施 工引起的 z 方向的附加荷载较大,最大值达到 25.2 kN/m。由于正面附加推力、掘进机和后续管道与土 体之间的摩擦力均为水平向作用力,引起的 z 方向 附加荷载较小,因此 z 方向的附加荷载主要由土体 损失引起。在开挖面前方,顶管施工引起的附加荷 载逐渐减小;在开挖面上方,附加荷载约为最大值









的 50%;在开挖面后方,附加荷载沿 x 轴的反方向 逐渐增大,到一定距离(约 x = -h)后逐渐稳定。

如图 6 所示,附加荷载曲线峰值出现在顶管轴 线相对应处,并向两端减小。z 方向的附加荷载影 响范围较小,基本上在±7 m 范围内,在此以外附 加荷载近乎为 0。分析结果表明,随着地下管线与 顶管距离的减小,附加荷载也呈急剧增大的趋势。

4.4 地下管线位移分析

对于柔性地下管线,其安全性判别方法可以采 用张角判别法,即地下管线是否破坏并不由应力决 定,应由位移大小控制。根据管节长度、管线外径 和管线接头允许接缝张开值可以求得管线允许曲率 半径[*R*]。若实际计算所得的曲率半径大于[*R*],则管 线会因变形过大而产生破裂,或在接头处因接缝张 开过大而漏水或漏气;反之则安全。

由前面分析可知,当顶管开挖面通过一段距离 后(约*x*=-*h*),在*z*方向顶管轴线正上方处地下管线 受到附加荷载作用最大,主要由土体损失引起。当 考虑柔性管线时,假定管线与土体不脱离,即地下 管线的位移等于同一位置处的土体位移。采用笔者 提出的由土体损失引起的土体沉降通用经验公式^[13], 本算例中可计算得到地下 2 m 处地下管线的最大沉 降约为 7.2 mm,地下 4 m 处最大沉降约为 8.9 mm。 地下管线的变形量与土体损失呈线性关系。当 η =4%时,地下 4 m 处最大沉降可达到 35.5 mm。

5 结 论

顶管施工对地下管线的影响是一个三维过程,

当地下管线与顶管垂直交叉时,地下管线受到的附 加荷载变化规律与地下管线和掘进机的相对位置密 切相关;与顶管距离越接近,地下管线受到的附加 荷载越大;靠近顶管轴线附近处的地下管线部位最 容易受到损害;在垂直方向地下管线受到的附加荷 载最大。在顶管施工时一方面应尽量避免掘进机偏 斜和纠偏,保持与地下管线的距离,避免掘进机向 土体施加额外的侧向压力;另一方面应通过精心施 工和合理注浆来尽可能地减小土体损失的产生。

本文方法适用于较柔软的地下管线,对于刚度 较大的地下管线,可通过折减的方法进行求解。文 中假定土体为均质线弹性半无限体,可能与实际情 况有所偏差。可在本文基础上进一步考虑由于土体 损失、纠偏和注浆压力引起的地下管线附加荷载。

参考文献(References):

- 吴修锋.顶管施工引起的地层移动与变形控制研究[硕士学位论 文][D].南京:南京工业大学,2004.(WU Xiufeng. Study on the stratum movement and deformation control induced by pipe jacking construction[M. S. Thesis][D]. Nanjing : Nanjing University of Technology, 2004.(in Chinese))
- [2] 胡 昕,黄宏伟.相邻平行顶管推进引起附加荷载的力学分析[J]. 岩土力学,2001,22(1): 75 - 77.(HU Xin, HUANG Hongwei. Mechanical analysis of additional load introduced by propulsion of adjacent parallel pipe[J]. Rock and Soil Mechanics, 2001, 22(1): 75 - 77.(in Chinese))
- [3] VORSTER T E B, KLAR A, SOGA K, et al. Estimating the effects of tunneling on existing pipelines[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2005, 131(11): 1 399 - 1 401.
- [4] 彭基敏,张孟喜. 盾构法施工引起邻近地下管线位移分析[J]. 工业 建筑, 2005, 35(9): 50 - 53.(PENG Jimin, ZHANG Mengxi. Analysis of the displacements of underground pipelines caused by shield construction[J]. Industrial Construction, 2005, 35(9): 50 - 53.(in Chinese))
- [5] 姜忻良,赵志民,李 园. 天津地铁盾构施工对邻近工程设施影响 的动态模拟[J]. 天津大学学报,2006,39(2):188-193.(JIANG Xinliang, ZHAO Zhimin, LI Yuan. Dynamic simulation of the effects of shield tunneling in Tianjin subway project on neighboring job facilities[J]. Journal of Tianjin University, 2006, 39(2):188-193.(in Chinese))
- [6] 魏 纲,余振翼,徐曰庆.顶管施工中相邻垂直交叉地下管线变形

的三维有限元分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(15): 2 523 - 2 527.(WEI Gang, YU Zhenyi, XU Riqing. 3D FEM analysis of deformation of perpendicularly crossing buried pipeline in pipe jacking[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(15): 2 523 - 2 527.(in Chinese))

- [7] 魏 纲,黄志义,徐日庆,等.顶管施工引起地面变形的计算方法研究[J]. 岩石力学与工程学报,2005,24(增2):5808-5815.
 (WEI Gang, HUANG Zhiyi, XU Riqing, et al. Study on calculation methods of ground deformation induced by pipe jacking construction[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(Supp.2): 5808-5815.(in Chinese))
- [8] 魏 纲,魏新江. 相邻水平平行顶管推进引起的附加荷载分析[J]. 岩土力学,2006,27(11): 1992 - 1996.(WEI Gang, WEI Xinjiang. Analysis of superimposed load induced by propulsion of adjacent level parallel pipe-jacking[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(11): 1992 - 1996.(in Chinese))
- [9] MINDLIN R D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid[J].
 Physics, 1936, 7(5): 195 201.
- [10] 余彬泉,陈传灿.顶管施工技术[M].北京:人民交通出版社,1998:
 117 119.(YU Binquan, CHEN Chuancan. Technology of pipe jacking construction[M]. Beijing: China Communications Press, 1998: 117 119.(in Chinese))
- [11] 沈永欢,梁在中,许履瑚,等. 实用数学手册[M]. 北京:科学出版 社,2003: 721 - 725.(SHEN Yonghuan, LIANG Zaizhong, XU Luhu, et al. Manual of practical mathematics[M]. Beijing: Science Press, 2003: 721 - 725.(in Chinese))
- [12] ATTEWELL P B, YEATES J, SELBY A R. Soil movements induced by tunneling and their effects on pipelines and structures[M]. London: Blackie and Son., 2002.
- [13] 魏 纲. 顶管工程土与结构的性状及理论研究[博士学位论文][D].
 杭州:浙江大学, 2006.(WEI Gang. Theoretical study on behavior of soil and structure during pipe jacking construction[Ph. D. Thesis][D].
 Hangzhou: Zhejiang University, 2006.(in Chinese))
- [14] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算[M]. 北京:中国水利水电出版社, 1996: 414 - 430.(QIAN Jiahuan, YIN Zongze. Principles and calculation methods in geotechnical engineering[M]. Beijing: China Water Power Press, 1996: 414 - 430.(in Chinese))
- [15] SELVADURAL A P S. 土与基础互相作用的弹性分析[M]. 范文田
 译. 北京:中国铁道出版社, 1984.(SELVADURAL A P S. The elastic analysis of the soil and the foundation[M]. Translated by FAN Wentian.
 Beijing: China Railway Press, 1984.(in Chinese))