04104-106通信原理II第五讲

March 27, 2007

1 信道容量

对于信道$X \to Y$，如果转移概率$P(Y|X)$给定，这个信道就已经给定。我们关心的是，通过这个信道最多可以传送多少信息。

发送X，接收方观察到Y。接收方依据Y去猜测X，所能猜出的程度是互信息$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=H(Y)-H(Y|X)$。因此，给定信道时，接收端所能获得的信息将不会超过$I(X;Y)$。如果信道是理想的，$I(X;Y)=H(X)$，收端依据Y可以完全猜出X是什么；如果信道不理想，则$I(X;Y)<H(X)$，表明由于信道引入了一些不确定性，使得我们观察到Y后，不能完全说出X是什么，但能猜出一些东西来（比如说出一个范围）。例如BPSK信道，发送1万个二进制符号，总共有2^{10000}种不同的可能性，如果信道的互信息是$I(X;Y)=0.5$bits/symbol，那么观察到1万个Y后获得的信息量是5000bit。每1bit信息能使我们排除一半的可能性。5000bit的信息将使我们能够把全部2^{10000}种发送序列$(X_1,X_2,\cdots,X_{10000})$的可能结果划分成$2^{5000}$个小范围，然后排除其中的$2^{5000}-1$个小范围，指出发送序列具体在哪一个小范围内，但不能进一步说出是这个小范围内的具体哪一个。假如发送的时候并不是2^{10000}种可能结果都有机会发，而是挑出其中的$M=2^{5000}$个。所有发送向量必然是这M个中的一个。收端知道这M个可能的发送向量都是些什么，只是不知道每次发送的具体是哪个。那么依刚才的讨论，收端观察到一万个Y后应该能够准确地猜出发送的是M个可能性中的哪一个。这种情况下就发端来说，发送的信息量是$\log_2 M=5000$bits，实际发送的符号数是1万个，平均每个符号携带了0.5bit 的信息。把原始信息加载到信道符号序列$\{X_i\}$上的技术，以及从观察结果$\{Y_i\}$识别出发送内容的技术属于“信道编码”的范畴（第9章）。

上面这个例子显示出，能够通过信道传送的信息量是$I(X;Y)$(bits/symbol)。不过，“给定信道”（即给定$P(Y|X)$）这个条件并没有给定互信息$I(X;Y)$，它还与$P(X)$有关：

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y|X)=-\sum_{Y}P(Y)\ln P(Y)+\sum_{X,Y}P(X,Y)\ln P(Y|X)$$

其中的$P(Y,X)=P(Y|X)P(X)$，$P(Y)=\sum_X P(X,Y)=\sum_X P(Y|X)P(X)$，可见$I(X;Y)$的值还与信道符号$X$的分布特性有关。既然我们关心的是“给定信道时，最多能传多少”，那么这个量就应该是

$$C=\max_{P(X)} I(X;Y)$$

这个结果叫做“信道容量”或者仙农容量（Shannon Capacity）。

2 Binary symmetrical channel

二元对称信道（BSC）的输入$X \in \{0,1\}$，输出$Y \in \{0,1\}$，信道转移概率具有对称性$P(Y=1|X=1)=P(Y=0|X=0)$，$P(Y=1|X=0)=P(Y=0|X=1)=\mu$，$\mu$就是这个二元信道的误比特率。根据作业，此信道的容量是

$$C = 1 - h_2(\mu) = 1 + \mu \log_2 \mu + (1-\mu)\log_2(1-\mu) \quad \text{bits/symbol}$$

达到这个容量时，信道输入X必须是等概的。

3 Gaussian channel

高斯信道也叫做AWGN信道，其信道输出y是信道输入x叠加了0均值的高斯噪声z：$y = x + n$ (我们会混用大小写来表示随机变量，并无特别的意思，只是习惯而已)。x和n相互独立。假设发送功率是$S = E[x^2]$，信噪比是$\text{SNR} = \frac{E[x^2]}{E[n^2]} = \frac{S}{\sigma^2}$。信道的转移概率是

$$p(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}}$$

若v是连续随机变量，其熵定义为$H(v) = -E[\ln p(v)]$，这个定义严格说叫“差分熵”。因为连续随机变量真正的熵是无穷大：熵的定义是$-E[\log P]$，连续随机变量的概率是$P(v) = p(v)dv$，而$-\ln P = -\ln p(v) - \ln dv = \infty$。但为了使问题变得有意义，我们使用了定义$H(v) = -E[\ln p(v)]$。$dv$这个无限小在计算互信息时将被约去：$I(u;v) = H(u) - H(u|v) = E[-\ln p(u)du] - E[-\ln p(u|v)du] = E[-\ln p(u)] - E[-p(u|v)]$。

高斯信道的互信息是$I(x;y) = E[-\ln p(y)] - E[-\ln p(y|x)]$。其中$-\ln p(y|x) = \frac{1}{2}\ln 2\pi\sigma^2 + \frac{n^2}{2\sigma^2}$，其数学期望是$\ln\sqrt{2\pi\sigma^2} + \frac{1}{2} = \ln\sqrt{2\pi e\sigma^2}$。因此$I(x;y) = H(y) + \ln\sqrt{2\pi e\sigma^2}$。欲互信息最大，必须$H(y)$最大。$y$是两个独立随机变量的和，由于噪声的均值为0，所以$y$的功率$S_y$是$x$和$n$的功率之和：$S_y = S + \sigma^2$。有办法证明，给定平均功率$E[v^2]$时，0均值正态随机变量的熵最大。因此使$H(y)$最大的$y$必然是0均值的高斯随机变量，其熵为$\ln\sqrt{2\pi e(S+\sigma^2)}$。因此信道容量（最大的互信息）是（转换为bit单位）：

$$C = \log_2\sqrt{2\pi e(S+\sigma^2)} - \log_2\sqrt{2\pi e\sigma^2} = \frac{1}{2}\log_2(1+\text{SNR}) \quad \text{bits/symbol} \tag{1}$$

达到这个容量的信道输入也必然是0均值的高斯随机变量。

4 限带的AWGN信道

对于连续时间的AWGN信道，信道输入是$x(t)$，输出是$y(t) = x(t) + n(t)$。如果信道带宽是B，那么噪声$n(t)$就是一个带限白噪声，其功率谱密度在$-B \le f \le B$范围内是常数$\frac{N_0}{2}$，噪声总功率是$\sigma^2 = N_0 B$。$x(t)$和$y(t)$也都是带宽限制在$|f| \le B$的随机过程。$y(t)$中的信噪比是$\text{SNR} = \frac{S}{\sigma^2}$。

给定带宽为B时，最高的无ISI传输速率是$R_s = 2B$，码元间隔是$T_s = \frac{1}{R_s} = \frac{1}{2B}$。发送信号可表示为$x(t) = \sum_k x_k \text{sinc}(\frac{t-kT_s}{T_s})$。由于$\text{sinc}(\frac{t-kT_s}{T_s})$的能量是$T_s$，且两两正交，故发送信号的每符号能量是$E_s = E[x_k^2]T_s$，又因为$E_s = ST_s$，所以$E[x_k^2] = S$。接收端用匹配滤波器$h_{\text{MF}}(t) = \frac{1}{T_s}\text{sinc}(\frac{t}{T_s})$接

收后，最佳采样时刻的输出是$y_k = x_k + n_k$，其中噪声分量n_k的均值为0，方差是$\frac{N_0}{2T_s} = N_0B = \sigma^2$。$y_k$中的信噪比是$\frac{E[x_k^2]}{E[n_k^2]} = \frac{S}{\sigma^2}$。根据前面的结果，信道$x_k \to y_k$的容量是$\frac{1}{2}\ln(1+\frac{S}{\sigma^2})$。就是说平均每个$x_k$可以携带的信息量是$\frac{1}{2}\ln(1+\frac{S}{\sigma^2})$，而每秒钟时间内可以传$2B$个符号，于是每秒钟内可传输的信息量就是$2B \times \frac{1}{2}\ln(1+\frac{S}{\sigma^2})$，这就是著名的仙农公式：

$$C = B\log_2(1+\mathrm{SNR}) \quad \mathrm{bps} \tag{2}$$

注意式(1)的单位是bits/symbol，式(2)的单位是bits/second。这两个单位都可称之为“速率”。它们都是单位时间内的信息量，前者的单位时间是symbol，后者是秒。

5 信道复用

对于时间连续的信道，利用它同时传送多个用户的信号的技术属于信道复用。考虑两个用户，在$0 \le t < T$时间内用户1 和用户2各自需要传送一个符号，分别是b_1和b_2（它们可能是有限状态的数字符号，也可能是模拟信号的采样值）。若用户1发送信号$b_1s_1(t)$，用户2发送信号$b_2s_2(t)$，于是叠加后的信道输入为$x(t) = b_1s_1(t) + b_2s_2(t)$。我们现在首要关心的是如何从混合信号$x(t)$中分离出各自的信息，故暂且不考虑噪声。

$s_1(t), s_2(t)$是事先设计的，因此收端知道它是什么，收端不知道的只是b_1, b_2。为了分离数据，一种方法是将收到的$x(t)$分别对$s_1(t)$和$s_2(t)$做相关：

$$\begin{aligned} r_1 &= \int_0^T x(t)s_1(t)dt = b_1E_1 + b_2E_{12} \\ r_2 &= \int_0^T x(t)s_2(t)dt = b_2E_2 + b_1E_{21} \end{aligned}$$

其中$E_1 = \int_0^T s_1^2(t)dt$和$E_2 = \int_0^T s_2^2(t)dt$分别是$s_1(t)$和$s_2(t)$的能量，$E_{12} = E_{21} = \int_0^T s_1(t)s_2(t)dt$与两信号的相关系数$\rho \triangleq \frac{\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt}{\sqrt{E_1E_2}}$有关。

从r_1, r_2复原出b_1, b_2是一个求解线性方程组的问题。只要$s_1(t)$和$s_2(t)$线性不相关（即排除$s_1(t) \neq Ks_2(t)$的情形，K是任意常数），根据r_1, r_2就能唯一复原出b_1, b_2。实际当中人们更为喜欢的设计是正交设计（$\int_0^T s_1(t)s_2(t) = 0$），它在性能、复杂度等方面都有好处。此时$r_1 = b_1E_1$只和$b_1$有关，$r_2 = b_2E_2$只和$b_2$有关。

推广到任意N个用户的情形就是：用任意N个线性不相关的脉冲$s_i(t), i = 1\cdots N$作为各用户的成形脉冲，就可以让它们在同一信道上传输而保证收端可以将其分离。线性不相关的意思是：任何一个$s_i(t)$都不是其他$s_j(t), j \neq i$ 的线性组合。实际当中常用的是正交复用，即$\{s_i(t)\}$两两正交。

有无穷多种构造两两正交信号集的方法。最为常用的方法是：(1)频率正交，FDM；(2)时间正交，TDM。此外还有码正交CDM（第十章讲）。