第 23 卷 第 5 期 电子与信息学报 Vol.23 No.5
2001 年 5 月 JOURNAL OF ELECTRONICS AND INFORMATION TECHNOLOGY May 2001

平面相交法时差定位 [1]

张正明　　杨绍全

(西安电子科技大学电子对抗研究所　西安　710071)

摘　要　该文介绍了一种基于时差定位的平面相交定位算法，它具有算法紧凑，不要迭代，定位精度高的优点，讨论了一种减少运算量的修正方法，给出了模拟结果．

关键词　时差，定位，平面相交

中图号　TN971.3

1 引　言

对辐射源的无源定位在航空、宇航、侦察和地球物理学中具有极其重要的作用，辐射源的无源定位，主要是用一个或一组传感器接收辐射源信号，对其进行相关处理，获取信号的到达角度、到达时间差或相位信息，利用这些信息确定辐射源的位置．近年来，由于时差测量技术和精度的不断提高，利用时差信息来定位成为该领域的热点 [1] ，已经在传感器最佳配置、定位精度等方面作了大量的工作，但对有效定位算法的研究却较少 [2] ．本文介绍了平面相交法时差定位公式，讨论了存在测量噪声情况下，减小时差定位误差和计算花费的方法，最后给出了模拟结果，说明了该方法的有效性．

传统的时差定位，实际上是反“罗兰”系统，两个传感器之间接收信号的时差，确定一个双曲面，多个传感器之间的时差确定了多个双曲面，这些双曲面的交点就是辐射源的位置．这种定位方法，对噪声相当敏感，且容易出现多个虚假定位．平面相交定位法由任意三个传感器得到一组时差，三个传感器位于这组时差所决定的锥面上，而辐射源位于经过该锥面轴线的平面上，多个这样的平面相交，就可以得到辐射源的位置．

2 平面相交时差定位法

给定 N 个传感器，其位置矢量分别为 $\boldsymbol{P}_i(i=1,2,\cdots,N)$ ，直角坐标为 (x_i,y_i,z_i) ，假设辐射源位置矢量为 $\boldsymbol{P}$，直角坐标为 (x,y,z) ．传感器 i 和辐射源之间的距离 $r_i=\|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_i\|$ ，传感器 i,j 到辐射源的距离差 $d_{ij}=r_j-r_i$ ，距离和 $s_{ij}=r_j+r_i$ 。其中 $i,j=1,2,\cdots,N$ 。

$$s_{ij}d_{ij}=r_j^2-r_i^2=\|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_j\|^2-\|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_i\|^2=\|\boldsymbol{P}_j\|^2-\|\boldsymbol{P}_i\|^2-2(\boldsymbol{P}_j-\boldsymbol{P}_i)\boldsymbol{P} \tag{1}$$

由此可以得到

$$s_{ij}=\frac{\|\boldsymbol{P}_j\|^2-\|\boldsymbol{P}_i\|^2}{d_{ij}}-\frac{2(\boldsymbol{P}_j-\boldsymbol{P}_i)}{d_{ij}}\boldsymbol{P} \tag{2}$$

同理，传感器 j,k 间存在类似关系

$$s_{jk}=\frac{\|\boldsymbol{P}_k\|^2-\|\boldsymbol{P}_j\|^2}{d_{jk}}-\frac{2(\boldsymbol{P}_k-\boldsymbol{P}_j)}{d_{jk}}\boldsymbol{P} \tag{3}$$

$$d_{ki}=r_i-r_k=(r_j+r_i)-(r_k+r_j)=s_{ij}-s_{jk} \tag{4}$$

将 (2) 、 (3) 式代入 (4) 式整理得

$$d_{ij}d_{jk}d_{ki}=-[d_{ij}\|\boldsymbol{P}_k\|^2+d_{jk}\|\boldsymbol{P}_i\|^2+d_{ki}\|\boldsymbol{P}_j\|^2]+2[d_{ij}\boldsymbol{P}_k+d_{jk}\boldsymbol{P}_i+d_{ki}\boldsymbol{P}_j)]\boldsymbol{P} \tag{5}$$

[1] 1999-07-22 收到， 2000-01-09 定稿

如果传感器 i, j, k 位于三维空间，则上述方程确定一个辐射源所在的平面，即

$$A_{ijk}x + B_{ijk}y + C_{ijk}z = D_{ijk} \tag{6}$$

其中 $A_{ijk} = [x_i\ x_j\ x_k] \cdot [d_{jk}\ d_{ki}\ d_{ij}]^T$ ， $B_{ijk} = [y_i\ y_j\ y_k] \cdot [d_{jk}\ d_{ki}\ d_{ij}]^T$ ， $C_{ijk} = [z_i\ z_j\ z_k] \cdot [d_{jk}\ d_{ki}\ d_{ij}]^T$ ， $D_{ijk} = (d_{ij}d_{jk}d_{ki} + d_i^2 d_{jk} + d_j^2 d_{ki} + d_k^2 d_{ij})/2$ ， $d_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ 。

如果有 $N(N \geq 3)$ 个传感器就可以得到 C_N^3 个类似 (6) 式的方程，组成方程组：

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{D} \tag{7}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{123} & B_{123} & C_{123} \\ & \vdots & \\ A_{ijk} & B_{ijk} & C_{ijk} \\ & \vdots & \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} D_{123} \\ \vdots \\ D_{ijk} \\ \vdots \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

通过对这组线性非齐次方程组求解就可以得到辐射源的坐标位置 (x, y, z) 。

在没有噪声的情况下，上述方程组具有唯一确定解，即辐射源的位置被唯一准确地确定。然而实际情况通常是存在测量噪声的，这样一来，上述方程组就是矛盾方程组，没有合适的解适合每一个方程，但是我们可以采用广义逆的概念，求解上述方程组的极小范数最小二乘解 [3] ，即

$$\min_{\min \|\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{D}\|} \|\boldsymbol{X}\| \tag{8}$$

解得

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{D} \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{A}^{+}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 广义逆，这个解是唯一的，它距离每一个平面的平均距离最短。上述求解方法也适用于无噪声情况。

3 修正的平面相交定位法

当 N 值较大时，求 $\mathrm{C}_N^3 \times 3$ 维矩阵的伪逆不是一件容易的事，其实，从（ 7 ）式可以知道，在无测量噪声情况下， C_N^3 个方程中只有 $N-2$ 个是独立的，比如 i, j, k 组合为 123 ，124 ， $\cdots$ ， $12N$ 的情况，其他的方程均可以由这 $N-2$ 个方程导出，仅提供了一些冗余信息。如果能够从这 $N-2$ 个方程求解出最佳定位解，则可以大大地降低计算上的花费。

在没有测量噪声时，对任意三个一组的传感器 i, j, k 来说， $d_{ij} + d_{jk} + d_{ki} \equiv 0$ ，由此可以准确确定辐射源所在的位置平面。然而，当存在测量噪声时，上式不再成立。因此，我们寻找一种方法使得这一组距离差所确定的平面离真正的辐射源最近。

如果将 d_{ij} 按照字典次序排列，且 $1 \leq i < j \leq N$ ，根据距离差的定义可以写出下式 (以 $N = 3$ 为例)：

$$\boldsymbol{D}_3 = \begin{cases} d_{12} = r_2 - r_1 \\ d_{13} = r_3 - r_1 \\ d_{23} = r_3 - r_2 \end{cases} \tag{10}$$

写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{D}_3 = \boldsymbol{E}_3\boldsymbol{R}_3 \tag{11}$$

其中

$$\boldsymbol{D}_3=\begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{13} \\ d_{23} \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{R}_3=\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

当有 N 个传感器时，可以得到

$$\boldsymbol{D}_N=\boldsymbol{E}_N\boldsymbol{R}_N \tag{12}$$

其中， $\boldsymbol{E}_N$ 为 $C_N^2\times N$ 维矩阵，可以通过下式迭代得到：

$$\boldsymbol{E}_N=\begin{bmatrix} -\boldsymbol{1}_{N-1} & \boldsymbol{I}_{N-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_{N-1} \end{bmatrix} \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{1}_{N-1}$ 表示所有元素均为 1 的 $N-1$ 行列向量； $\boldsymbol{I}_{N-1}$ 表示 $(N-1)\times(N-1)$ 的单位矩阵．只有当测量距离差 $\boldsymbol{D}_N$ 在 $\boldsymbol{E}$ 所张成的距离空间上时， $\boldsymbol{D}_N$ 才有可能对应一个真正的辐射源，因此，我们将 $\boldsymbol{D}_N$ 在 $\boldsymbol{E}$ 所张成空间上进行投影．

$$\tilde{\boldsymbol{D}}_N=\boldsymbol{P}_E\boldsymbol{D}_N \tag{14}$$

其中投影矩阵：

$$\boldsymbol{P}_E=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{E}^T=\frac{1}{N}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T \tag{15}$$

将 (14) 式所得结果 $\tilde{\boldsymbol{D}}_N$ 以距离差 $\boldsymbol{D}_N$ 代入 (7) 式，并选择其中的 $N-2$ 个非相关方程，即可求解．

4 模拟结果

对辐射源的定位将产生定位偏差 m 及其方差 σ^2 ，这里，我们采用均方根定位误差作为衡量的标准．

$$\sigma_{\mathrm{rms}}=\sqrt{m^2+\sigma^2} \tag{16}$$

为了直观起见，我们考虑辐射源和传感器在同一平面内的情况．传感器位置坐标 $(10,-10)$ ， $(10,10)$ ， $(-10,-10)$ ， $(-10,10)$ ， $(0,0)$ ；辐射源 1 位置： $(100,173.2)$，辐射源 2 位置： $(-173.2,-100)$ ．为比较性能，我们将未修正的 $N-2$ 个方程的解 (方法 1) ，未修正的 C_N^3 个方程的解 (方法 2) ，修正后的 $N-2$ 个方程的解 (方法 3) ，修正后的 C_N^3 个方程的解 (方法 4) 分别列在表 1 中．

从表 1 可以看出，在同样条件下，简单地抽取 $N-2$ 个独立方程 (方法 1) 所得到的均方根误差最大，由 C_N^3 个全部方程 (方法 2) 所得到的均方根误差最小；采用改进方法后，由 C_N^3 个全部方程 (方法 4) 所得到的均方根误差与方法 2 相同．

本文导出的由 $N-2$ 个修正后的独立方程 (方法 3) 所得到的均方根误差与方法 2 结果近似相等，但该方法的运算量要小得多．比如当 $N=6$ 时，用方法 2 要计算一个 20×3 维矩阵的伪逆，而用方法 3 只要计算一个 4×3 维矩阵的伪逆．

对于传感器定位误差所引起的辐射源定位误差的情况，本文所讲述的方法同样适用．

对于传感器独立测量到达时间的情况，平面相交定位方法同样实用，只是要寻找其他的修正方法，以减小定位误差．

表 1 平面相交法定位模拟结果

辐射源位置 (km)	距离差方差 (km)	方法	$\sigma_x$rms (km)	$\sigma_y$rms (km)	σrms/R_0 (%)
(100,173.2)	0.1	1	25.5076	42.3711	24.8
		2	8.6330	14.8537	8.6
		3	8.6897	14.9836	8.7
		4	8.6132	14.8369	8.6
	0.001	1	0.2343	0.3904	0.23
		2	0.0897	0.1560	0.09
		3	0.0920	0.1602	0.09
		4	0.0898	0.1563	0.09
(−173.2, −100)	0.1	1	31.1628	18.5042	18.1
		2	15.2310	8.8307	8.8
		3	15.8380	9.2083	9.2
		4	15.4683	8.9914	8.8
	0.001	1	0.2687	0.1585	0.16
		2	0.1525	0.0881	0.09
		3	0.1586	0.0918	0.09
		4	0.1526	0.0881	0.09

参 考 文 献

[1] J. O. Smith, J. S. Abel, Closed-form least-squares source location estimation from range-difference measurements, IEEE Trans. on ASSP 1987, 35(12), 1661–1669.

[2] R. Schmitd, Least squares range difference location, IEEE Trans. on AES, 1996, 32(1), 234–241.

[3] 程云鹏主编，矩阵论，西安，西北工业大学出版社， 1989, 360–371.

TDOA LOCATION USING PLANE INTERSECTION

Zhang Zhengming Yang Shaoquan

(*Research Institute of Electronic Countermeasures, Xidian University, Xi'an* 710071 China)

Abstract An algorithm of TDOA location using plane intersection is introduced. Its advantages are closed-form, no need of iteration and high accuracy. A modified algorithm is given also to save computation with simulation results.

Key words TDOA, Location, Plane intersection

张正明： 男， 1966 年生，副教授，博士生，目前主要研究方向为电子战信号仿真与处理，信息对抗.

杨绍全： 男， 1938 年生，教授，博士生导师，目前主要研究方向为电子战理论，电子系统设计.