第 24 卷 第 5 期 电子与信息学报 Vol.24 No.5
2002 年 5 月 JOURNAL OF ELECTRONICS AND INFORMATION TECHNOLOGY May 2002

宽带方位估计的波束域 Root-MUSIC 算法 [1]

智婉君 严胜刚 李志舜

(西北工业大学航海工程学院 西安 710072)

摘 要 高分辨算法的实现是一个受到普遍重视的问题。为降低运算量，提高估计性能，便于工程应用，该文深入研究宽带波束域 Root-MUSIC 算法，根据波束域处理的空间滤波特性，将波束域求根多项式的根划分在不同的区域，从而基于子阵分解对求根多项式进行降阶处理，仿真实验讨论了不同波束形成矩阵的估计性能，证明了降阶处理的可行性。

关键词 宽带，方位估计，波束域，高分辨

中图号 TN911.23

1 引 言

在过去的三十年中，高分辨方位估计一直是传感器阵列信号处理的一个研究方向，但是一般的高分辨方法分辨门限高，运算量大，工程应用受到限制。近年来，算法的性能分析和实现问题受到普遍重视，波束域方法和求根的 MUSIC 方法就是为降低运算量，提高计算性能而提出的两类算法。在等间距线阵情况下，谱峰搜索可代以多项式求根，这就导致求根形式的 MUSIC(即 Root-MUSIC) 方法，该方法计算简化，而且分辨力有所改善。波束域方法通过波束形成，把基阵输出的 $M\times 1$ 维阵元空间变为 $K\times 1$ 维波束空间 (K 为波束数目，应选择大于声源数而小于阵元数目 M)。当 $M>>K$ 时，矩阵分解的计算量大大降低，同时在波束域处理也改善了分辨门限，提高了估计性能，降低了算法对空间噪声相关性和基阵流形误差的敏感性。

针对宽带水声系统的实际需求，本文研究宽带波束域 Root-MUSIC 算法，首先给出宽带波束域处理的基本模型，其次根据波束域的空间滤波特性，对求根多项式进行了降阶处理，最后进行了仿真实验，分析了波束选择对估计和分辨性能的影响，并给出结论。

2 宽带波束域处理的数学模型

考虑 D 个远场源的情况，并假设阵元噪声为不相关的高斯白噪声，噪声功率为 σ^2 。有阵列输出数据向量

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}s+\boldsymbol{n} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 为阵方向矩阵， $\boldsymbol{s}$ 为信号向量， $\boldsymbol{n}$ 为噪声向量。

对宽带信号，采用频域模型，有阵列输出向量 $\boldsymbol{X}(f_j)$ 和空间互谱密度矩阵 $\boldsymbol{R}(f_j)$ 分别为

$$\boldsymbol{X}(f_j)=\boldsymbol{A}(f_j)\boldsymbol{S}(f_j)+\boldsymbol{N}(f_j) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{R}(f_j)=E\{\boldsymbol{X}(f_j)\boldsymbol{X}^H(f_j)\}=\boldsymbol{A}(f_j)\boldsymbol{R}_s(f_j)\boldsymbol{A}^H(f_j)+\sigma^2\boldsymbol{I} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{R}_s(f_j)=E\{\boldsymbol{S}(f_j)\boldsymbol{S}^H(f_j)\}$ 。

如果对每一个频率，有转换矩阵 $\boldsymbol{B}(f_j)(M\times K$ 维) ， $\boldsymbol{B}(f_j)$ 的每一列形成一个波束，并且假设 $\boldsymbol{B}(f_j)^H\boldsymbol{B}(f_j)=\boldsymbol{I}$ ，则有波束输出向量

$$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{B}}(f_j)=\boldsymbol{B}(f_j)^H\boldsymbol{X}(f_j) \tag{4}$$

[1] 2000-07-03 收到， 2000-12-06 定稿

波束域互谱密度矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R_B}(f_j) &= E\{\boldsymbol{X_B}(f_j)\boldsymbol{X_B}(f_j)^H\} = \boldsymbol{B}(f_j)^H\boldsymbol{R}(f_j)\boldsymbol{B}(f_j)\\ &= \boldsymbol{B}(f_j)^H\boldsymbol{A}(f_j)\boldsymbol{R}_s(f_j)\boldsymbol{A}(f_j)^H\boldsymbol{B}(f_j)+\sigma^2\boldsymbol{I}\end{aligned} \tag{5}$$

如果有

$$\boldsymbol{B}(f_j)^H\boldsymbol{A}(f_j) = \boldsymbol{B}(f_0)^H\boldsymbol{A}(f_0) \tag{6}$$

那么

$$\boldsymbol{R_B} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\boldsymbol{R_B}(f_j) = \boldsymbol{B}(f_0)^H\boldsymbol{A}(f_0)(\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\boldsymbol{R}_s(f_j))\boldsymbol{A}(f_0)^H\boldsymbol{B}(f_0)+\sigma^2\boldsymbol{I} \tag{7}$$

对 $\boldsymbol{R_B}$ 进行特征分解，有

$$\boldsymbol{R_B} = \sum_{i=1}^{K}\mu_i\boldsymbol{t}_i\boldsymbol{t}_i^H \tag{8}$$

其中 $\mu_i > \sigma^2, (i = 1, 2, \cdots D)$; $\mu_i = \sigma^2, (i > D)$ 。那么

$$(\boldsymbol{B}(f_0)^H\boldsymbol{a}(f_0,\theta_i))^H\boldsymbol{t}_j = 0, \quad i = 1,2,\cdots,D, \quad j > D \tag{9}$$

(9) 式所体现的正交性是宽带波束域特征结构类方法的依据，由此可以构成空间谱

$$P(\theta) = \frac{1}{\|(\boldsymbol{B}(f_0)^H\boldsymbol{a}(f_0,\theta))^H\boldsymbol{E_N}\|^2} \tag{10}$$

式中 $\boldsymbol{E_N}$ 是噪声特征向量矩阵， $P(\theta)$ 的峰值所对应的角度为信号方位。

在宽带波束域处理中，计算满足 (6) 式的 $\boldsymbol{B}$ 是关键，可以基于恒定束宽的概念求得 [1] 。

3 宽带波束域 Root-MUSIC 算法

3.1 宽带波束域 Root-MUSIC 算法

对于均匀线列阵，谱估计的 MUSIC 方法可以由多项式求根 MUSIC(即 Root-MUSIC) 方法完成，已证明 Root-MUSIC 具有更好的估计和分辨性能 [2] 。令

$$z = e^{j2\pi f_0(d/c)\sin(\theta)}$$
$$a(Z) = [1 \quad Z\cdots Z^{M-1}]^T$$

则宽带波束域 MUSIC 空间谱为

$$P(\theta) = \frac{1}{\|(\boldsymbol{B}(f_0)^H\boldsymbol{a}(f_0,\theta))^H\boldsymbol{E_N}\|^2} = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}^H(Z)(\boldsymbol{B}(f_0)\boldsymbol{E_N})\|^2} \tag{11}$$

其对应多项式为

$$p(z) = p_0 + p_1 z + \cdots p_{M-1}z^{M-1} + \cdots + p_1^* z^{2M-3} + p_0^* z^{2M-2} \tag{12}$$

该多项式的根表示为 $Z_m = \rho_m e^{j\varphi_m}$ ，其中在单位圆上的根对应于源真实方位，即

$$\sin(\theta_k) = \frac{1}{2\pi(df_0/c)}\varphi_k, \quad k = 1,2,\cdots,D \tag{13}$$

3.2 波束域降阶 Root-MUSIC 算法

波束域 Root-MUSIC 可以在分解出噪声子空间后，由噪声子空间形成 $(2\times M-1)$ 阶多项式 (12)，多项式系数具有共轭对称性，导致 $(2\times M-2)$ 个根成对出现，有 $(2\times K-2)$ 个根在某一区域，并且其中的 $(2\times D)$ 个根分布在单位圆上，对应于真实信号。其余 $(2\times(M-k))$ 个根分布在该区域外的单位圆附近。由于这些根与我们的估计没有关系，所以在进行多项式求根时可以剔除，以进一步降低运算量。显然，如果一个 $(2\times M-1)$ 阶多项式能够分解为 $(2\times M-1)$ 阶多项式与一个 $(2\times K-1)$ 阶多项式的乘积，它们的根分别位于波束区域内外，就可以只进行 $(2\times K-1)$ 阶多项式的计算，完成降阶的求根 MUSIC 算法。一般来说该分解问题没有闭式解，需作迭代近似 [3]。

根据子阵分解的原理 [3]，可以将基阵分为多个相互重迭的子阵 (如图 1 所示)，为了进行有效的降阶，直接给出子阵波束形成矩阵，令

$$
\boldsymbol{C}_j=\begin{bmatrix}
c_0 & 0 & \cdots & 0\\
c_1 & c_0 & \cdots & 0\\
\vdots & c_1 & \cdots & \vdots\\
c_{M-K} & \vdots & & 0\\
0 & c_{M-K} & \cdots & c_0\\
0 & 0 & \cdots & c_1\\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & \cdots & c_{M-K}
\end{bmatrix}
$$

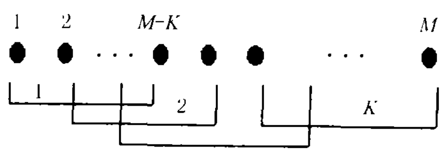

图 1 子阵分解示意图

$\boldsymbol{C}_j$ 内的元素 c_i 是在频率点 f_j 上，由恒定束宽准则 [1] 计算出的第 i 个阵元的权系数。为了不影响噪声的统计特性，进行正交化处理，令 $\boldsymbol{W}_j=\boldsymbol{C}_j(\boldsymbol{C}_j^H\boldsymbol{C}_j)^{-1/2}$ ($M\times K$ 维)，且 $\boldsymbol{G}_j=(\boldsymbol{C}_j^H\boldsymbol{C}_j)^{-1/2}$($K\times K$ 维)，则有

$$
\overline{P}(\theta)=\frac{1}{\|\boldsymbol{a}^H(f_0,\theta)\boldsymbol{G}_0\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{N}}\|^2} \tag{14}
$$

其可以表示为

$$
\overline{p}(z)=\overline{p}_0+\overline{p}_1z+\cdots+\overline{p}_{M-1}z^{K-1}+\cdots+\overline{p}_1^*z^{2K-3}+\overline{p}_0^*z^{2K-2} \tag{15}
$$

(15) 式为对应于波束内的 $(2\times K-1)$ 阶多项式，其在单位圆上的根对应源真实方位。

4 仿真实验与分析

有 15 个阵元组成的均匀线列阵，波束宽度 7.65°，假设有两个相干的舰船辐射噪声仿真信号，分别来自 8° 与 11°，角度间距小于波束宽度的一半。信号相对带宽为 40%，每次实验用 16 次独立的快拍完成，分析 33 个等间隔的频率点。

为了讨论不同的阵元加权对估计结果的影响，分别使用矩形、切比雪夫 (Chebyshelv)、三角形、哈明 (Hamming) 及汉宁 (Hanning) 加权形成波束，波束对准两源中心 9.5°，波束域降阶 Root-MUSIC 估计的结果如图 2～图 5 所示。

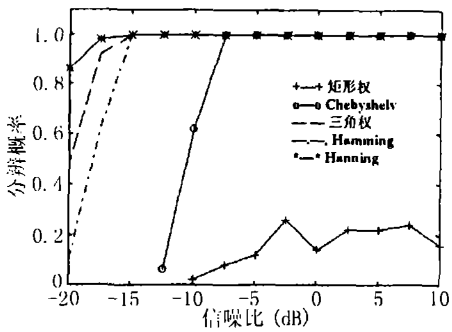

图 2　使用不同波束分辨概率比较

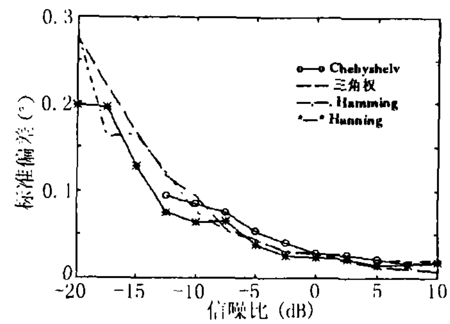

图 3　使用不同波束的标准差比较

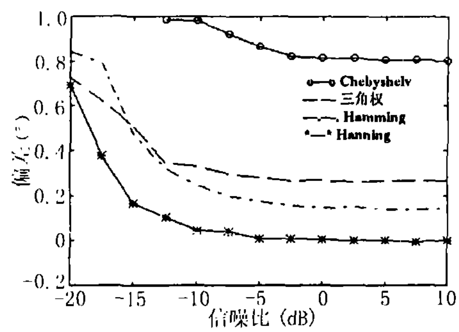

图 4　使用不同波束的估计偏差比较

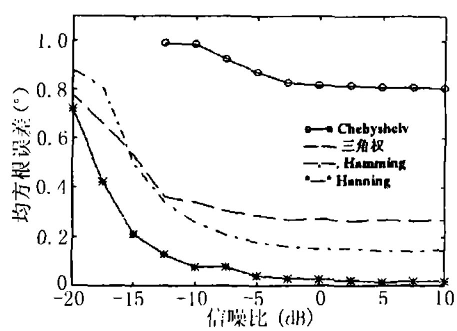

图 5　使用不同波束的估计均方根误差比较

由上图可见，采用汉宁窗函数加权得到的分辨门限最低，且估计偏差最小，均方根误差也最小。由子阵波束形成矩阵可见，所使用的 K 个波束对准同一方向，相互之间有一定时延，所以选择较宽波束覆盖源真实方位，波束旁瓣较低，会得到较好的估计结果。

我们采用汉宁加权，在信噪比 0dB 时，取波束数目 $K=4$。图 6 是 (12) 式 Root-MUSIC 的估计结果，图 7 是 (15) 式降阶 Root-MUSIC 的估计结果，图中的 0° 方向对应于波束主轴方向 9.5°，可见降阶处理剔除了信号源方向邻域外的根。

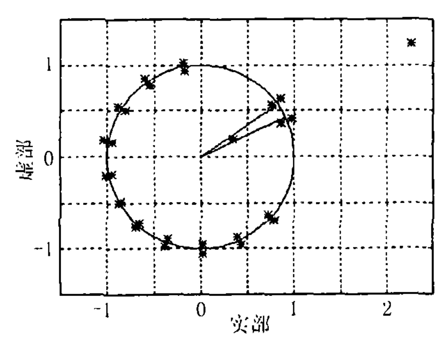

图 6　29 阶的 Root-MUSIC 估计结果

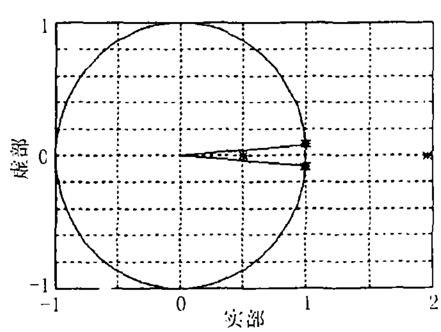

图 7　7 阶的 Root-MUSIC 估计结果

5 结 论

本文研究了宽带波束域方位估计的 Root-MUSIC 算法，通过仿真讨论了不同波束形成矩阵对降阶宽带波束域 Root-MUSIC 算法估计性能的影响。

波束域 Root-MUSIC 算法是传统波束形成法与现代高分辨技术的结合，通过波束域处理，使空间协方差矩阵降维，从而减小了特征分解的运算量；基于子阵的 Root-MUSIC 将求根多项式降阶，进一步降低了运算量，同时选择主瓣较宽而旁瓣较低的波束可得到较好的估计和分辨性能。当阵列为均匀线列阵，且源集中于一个较窄的范围内时，可以选择该方法。这对工程应用是有实际意义的。

参 考 文 献

[1] 智婉君，李志舜，空间重采样法恒定束宽波束形成器设计，信号处理， 1998, Vol.14, 增刊， 1–5.

[2] D. Rao, K. V. S. Hari, Performance analysis of Root-Music, IEEE Trans. on ASSP., 1989, 37(12), 1939–1949.

[3] Ta-Sung Lee, Efficient wide-band source localization using beamforming invariance technique, IEEE Trans. on SP, 1994, 42(6), 1376–1387.

BEAM-SPACE ROOT-MUSIC FOR DIRECTION FINDING OF WIDE-BAND SOURCES

Zhi Wanjun　　Yan Shenggang　　Li Zhishun

(College of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, *China)*

Abstract The realization of high resolution algorithm has been paid more attention in recent years. This paper gives the model of wide-band beam-space direction finding problem and studies the Root-MUSIC algorithm. The roots in the unit circle of the beam-space Root-MUSIC are divided into two parts, one is corresponding to the true direction, and the other is not related to the source direction. Sub-array model is used here to form beams to focus the root corresponding to the true direction in a reduced order polynomial. This process reduced the computation burden. Simulation results in various beams have shown that the beams with wider main-band and lower side-band have better estimation and resolution performance, and proved the effectiveness of the wide-band beam-space reduced order Root-MUSIC.

Key words Wide-band, Direction finding, Beam-space, High resolution

智婉君： 女， 1970 年生，博士，主要研究方向为阵列信号处理、高分辨参量估计等.

严胜刚： 男， 1966 年生，副教授，主要从事信号与信息处理理论及 DSP 系统设计的研究.

李志舜： 男， 1938 年生，教授，博士生导师，主要从事水下信号与信息处理的理论与应用研究.