

基于在线 Music 算法的 DOA 估计

曹向海 刘宏伟 吴顺君

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

摘要: 基于模式识别领域中的 CCIPCA 算法, 该文给出了一种低运算量的在线 Music 算法。它无需估计协方差矩阵和对其进行特征值分解, 信号子空间的估计与快拍数据的接收是同时进行的, 而且只需存储当前的快拍数据, 因此大大降低了存储量及运算量的要求; 并针对上述算法在小快拍情况下性能较差的缺点, 利用数据复用的方法有效提高了其估计性能。最后, 计算机仿真验证了该文方法的有效性。

关键词: CCIPCA; 在线 Music 算法; 协方差矩阵; 小快拍

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)11-2658-04

DOA Estimation Based on Online Music Algorithm

Cao Xiang-hai Liu Hong-wei Wu Shun-jun

(National Lab of Radar Signal Processing, Xidian Univ, Xi'an 710071, China)

Abstract: Based on CCIPCA algorithm in pattern recognition, a low complexity online Music method is presented firstly. It does not need to form the sample covariance matrix or compute its eigenvectors and the estimation of signal subspace begins after the first snap being received, this means the subspace estimation and the data receiving is simultaneous, and the current snap is the only data need to be stored. Then, the data is used repetitiously to improve subspace's estimation performance when few snap is available. Finally, experiments based simulated data demonstrate the efficiency of the presented algorithm.

Key words: CCIPCA; Online Music algorithm; Sample covariance matrix; Small snap

1 引言

波达方向(DOA)估计在雷达、声纳和通信领域中得到了广泛的应用, 许多学者提出了性能优良的超分辨算法, 其中基于子空间的 Music^[1]类和 Esprit^[2]类算法比较具有代表性。然而常规的 Music 算法需要估计信号子空间, 通常的做法是计算协方差矩阵并对其作特征值分解(EVD), 所需要的运算量很大, 为 $O(M^2N + M^3)$, 其中 M, N 分别为阵元数和快拍数, 如果阵元数较多的话, 该方法所需要的运算量是相当大的。针对这个问题, 学者们提出了很多无需特征值分解的子空间快速估计算法: Xu 和 Kailath^[3]利用 Lanczos 快速算法将协方差矩阵三对角化, 然后对三对角矩阵特征值分解获得信号子空间的快速估计; Gershman^[4]基于采样协方差矩阵幂(Power)的方法给出了子空间的近似估计, 并且在低信噪比时, 可以达到任意精度的近似; 最近, Huang^[5,6]在 Goldstein^[7]等人研究的基础上提出了基于多级维纳滤波器的快速子空间估计方法, 该算法无需估计协方差阵和对其进行特征值分解, 而只利用多级维纳滤波器的前向递推。笔者将模式识别领域中一种增量主分量分析(PCA)算法-CCIPCA^[8]引入到阵列信号处理中, 给出了一种在线的 Music 方法, 它同样不需要估计协方差阵和对其进行特征值,

而且当接收完第一个快拍后即可进行信号子空间的估计, 即子空间的估计与快拍数据的接收是同时进行的, 这就进一步提高了 DOA 估计的实时性; 然而该方法在小快拍情况下的估计性能较差, 对此, 本文利用数据复用的方法提高了子空间的估计精度。

2 在线 DOA 估计算法

2.1 在线 Music 算法

设 $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots$ 是阵列顺序接收的快拍数据, 对应的协方差矩阵为 $\mathbf{R} = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\}$, 若 \mathbf{u} 为其特征矢量, 则由定义有

$$\lambda \mathbf{u} = \mathbf{R} \mathbf{u} \quad (1)$$

λ 为相应的特征值。因为协方差阵是未知的, 这里用样本协方差阵代替, 并令 $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$, 则上式变为

$$\mathbf{v}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}(i)\mathbf{x}^H(i)\mathbf{u}(i) \quad (2)$$

$\mathbf{v}(n)$ 是 \mathbf{v} 的第 n 步估计值, 一旦得到了估计值 \mathbf{v} , 则对应的特征值及特征矢量分别为 $\lambda = \|\mathbf{v}\|$ 和 $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ 。因此现在的问题就转化为对 $\mathbf{v}(n)$ 的估计, 考虑到 $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$, 令 $\mathbf{u}(i) = \mathbf{v}(i-1)/\|\mathbf{v}(i-1)\|$, 则式(2)可写为

$$\mathbf{v}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}(i)\mathbf{x}^H(i) \frac{\mathbf{v}(i-1)}{\|\mathbf{v}(i-1)\|} \quad (3)$$

对初始值的设置, 令 $\mathbf{v}(0) = \mathbf{x}(1)$, 针对在线估计的情况,

将上式写成递归形式

$$\mathbf{v}(n) = \frac{n-1}{n}\mathbf{v}(n-1) + \frac{1}{n}\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n) \frac{\mathbf{v}(n-1)}{\|\mathbf{v}(n-1)\|} \quad (4)$$

$(n-1)/n$ 和 $1/n$ 分别是对先前估计值及新到数据估计的加权系数。可以证明^[9], 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\mathbf{v}_1(n) \rightarrow \pm\lambda_1\mathbf{u}_1$, λ_1 是协方差阵的最大特征值, 而 \mathbf{u}_1 为对应的特征矢量。由式(4)知道, 所有快拍对主分量估计的贡献是等量的, 但主分量初始的估计值距其真实值有较大偏差, 为了加速收敛过程, 就要减小以往快拍的影响, 加大新到快拍的影响, 这可以通过引入遗忘因子 $l(l > 0)$ 解决, 此时式(4)调整为

$$\mathbf{v}(n) = \frac{n-1-l}{n}\mathbf{v}(n-1) + \frac{1+l}{n}\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n) \frac{\mathbf{v}(n-1)}{\|\mathbf{v}(n-1)\|} \quad (5)$$

式(5)只是给出了第 1 个特征矢量的估计, 为了完成对高阶特征矢量的估计, 这里采用的方法是从当前数据中减去已估计出的特征矢量的成分, 以第 2 个特征矢量的估计为例, 有

$$\mathbf{x}_2(n) = \mathbf{x}_1(n) - \mathbf{x}_1^H(n) \frac{\mathbf{v}_1(n)}{\|\mathbf{v}_1(n)\|} \frac{\mathbf{v}_1(n)}{\|\mathbf{v}_1(n)\|} \quad (6)$$

其中 $\mathbf{x}_1(n) = \mathbf{x}(n)$, $\mathbf{x}_2(n)$ 位于 $\mathbf{v}_1(n)$ 的补空间中, 作为估计第 2 个特征矢量的输入数据, 这样逐步进行下去即可得到估计的信号子空间 $\mathbf{V}_s = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_p]$, 虽然文献[9]已经给出了算法的收敛性证明, 但是在实际应用中, 由于阵列接收的快拍数是有限的, 估计出的特征矢量不能保证是严格正交的, 因此采用下式计算空间谱

$$P_{\text{Music}} = \frac{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_s(\mathbf{V}_s^H\mathbf{V}_s)^{-1}\mathbf{V}_s^H)\mathbf{a}(\theta)} \quad (7)$$

上述算法可总结如下:

在线 Music 算法 由接收的快拍数据 $\mathbf{x}(n)$, $n = 1, 2, \dots$, 计算空间谱 P_{Music} , 其中信源个数 P 已知:

For $n = 1, 2, \dots$

 令 $\mathbf{x}_1(n) = \mathbf{x}(n)$

 For $i = 1, 2, \dots, \min\{P, n\}$

 If $i = n$

 令 $\mathbf{v}_i(n) = \mathbf{x}_i(n)$

 Else

$$\mathbf{v}_i(n) = \frac{n-1-l}{n}\mathbf{v}_i(n-1) + \frac{1+l}{n}\mathbf{x}_i(n)\mathbf{x}_i^H(n) \frac{\mathbf{v}_i(n-1)}{\|\mathbf{v}_i(n-1)\|}$$

$$\mathbf{x}_{i+1}(n) = \mathbf{x}_i(n) - \mathbf{x}_i^H(n) \frac{\mathbf{v}_i(n)}{\|\mathbf{v}_i(n)\|} \frac{\mathbf{v}_i(n)}{\|\mathbf{v}_i(n)\|}$$

 End

 End

End

$$\mathbf{V}_s = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_p]$$

$$P_{\text{Music}} = \frac{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_s(\mathbf{V}_s^H\mathbf{V}_s)^{-1}\mathbf{V}_s^H)\mathbf{a}(\theta)}$$

说明: (1) 由上述算法描述可知, 该算法与经典的基于特征值分解的方法相比, 无需形成协方差矩阵和对其行特征

值分解, 其运算量与文献[5]的方法一致, 为 $O(PMN)$; 但本文的方法还有一个显著优点, 即子空间的估计与快拍的接收是同时进行的, 是一种在线算法, 当数据接收完成后, 估计信号子空间所需的运算只是上述算法中一个循环的运算量 $O(PM)$, 而通常的算法需要所有快拍数据接收完成后才能开始子空间的估计, 因此本文算法的实时性要优于现有算法;

(2) 该算法无需存储所有的快拍数据, 而只需存储当前快拍数据, 因此也会降低对存储量的要求;

(3) 文献[5]的方法需要训练信号的波形作为估计信号子空间的先验信息, 而本文的方法不需要该先验信息。

2.2 算法的改进

由后面的实验可知, 在线 Music 算法估计 DOA 时, 在快拍数较大的情况下, 与基于特征值分解的估计精度相差无几, 但在小快拍的情况下, 其估计精度较特征值分解法有明显下降。这是因为在快拍数较少时, 每个新到数据都会对原有子空间的估计产生较大影响, 因此估计出的子空间会在真实子空间附近较大范围内波动, 从而影响 DOA 估计的精度。文献[8]中为了得到相同分布的大量数据, 采用了将数据存储下来, 然后重复输入的方法, 并因此提高了主分量的估计精度。针对本文的应用, 如果采用上述做法, 一是该方法不再是在线的算法, 二是需要存储所有的快拍数据, 其相对于常规算法的优势也就大大削弱了。对此, 本文采用的是直接将每个新到的数据重复输入多次, 当作多个快拍使用, 然后将该数据抛掉的方法, 这就避免了存储所有快拍数据的问题, 并保持了在线算法的优点。以重用数据两次为例, 相当于将接收的快拍数据 $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \mathbf{x}(3), \dots$, 扩充为 $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \mathbf{x}(2), \mathbf{x}(3), \mathbf{x}(3), \dots$ 。

说明: (1) 改进算法与原始算法相比, 运算量增加了 $r-1$ 倍 (r 为数据重用次数), 针对在线的情况, 当最后一个快拍接收完后, 所需要的运算量级为 $O((r-1)PM)$, 而存储量不会增加;

(2) 由于增加的数据与原数据具有同样的分布, 因此算法的收敛性仍得到了保证, 在大快拍的情况下, 子空间的估计性能不会恶化;

(3) 在线 Music 算法是改进算法的一种特殊情况, 对应于 $r = 1$ 的情况。

改进后的算法在小快拍时的估计性能有了较大改善。其原因在于, 首先, 数据的重复输入使得数据包含的信息得到了更为充分的利用; 其次, 数据重用相当于人为增加了快拍的数量, 减小了后来数据对已估计出的子空间的影响, 从而使估计的子空间趋于稳定, 图 1 给出了快拍数为 32 时, 在线 Music 算法及改进算法 ($r = 2$) 得出的相邻子空间的距离随快拍数变化的情况。其中子空间的距离定义如下:

$$\text{dis}(n) = \|\mathbf{v}(n+1) - \mathbf{v}(n)\|_F \quad (8)$$

其中 $\| \cdot \|_F$ 表示矩阵的 Frobenius 范数。为了方便比较, 将在线 Music 算法得出的曲线往后移动了 32 个单元。由图中可以看出, 改进算法相邻子空间的波动范围要远小在线 Music 算法。

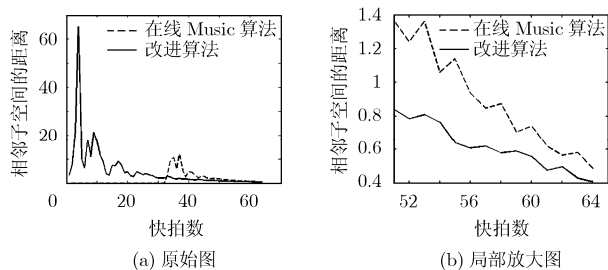


图1 相邻子空间距离随快拍数的变化

3 仿真实验

实验中使用阵元数为 32 的等距线阵, 阵元间距为半波长, 入射信号为 3 个独立信源, 入射角分别为 $(5^\circ, 13^\circ, 20^\circ)$ 。信噪比定义为 $SNR = 10 \lg(\sigma_s^2 / \sigma_n^2)$, 实验中每个信号 DOA 估计的均方误差(RMSE)都是独立进行 500 次实验得到的, 在下面的实验中, 本文方法中的参数 l 均设置为 1。

实验 1 信噪比的变化对在线 Music 算法性能的影响 为了验证在线 Music 算法的有效性, 这里将它与基于特征值分解的方法, 以及文献[5](图 2、图 3 中标记为 Huang)的方法进行了对比, 其中快拍数为 256, 在 Huang 的方法中利用 13° 信号的波形作为训练信号, 图 2 给出了实验的结果。由图中可以看出, 由于利用了先验信息, Huang 的方法对 13° 信号的估计精度与 EVD 方法基本一致, 然而对没有先验信息的 20° 信号, 其估计精度则大为下降, 这是由于 Huang 的方法中信号子空间的能量泄漏到噪声子空间所致^[10], 而在线 Music 算法对两个信号的入射角估计都比较准确。

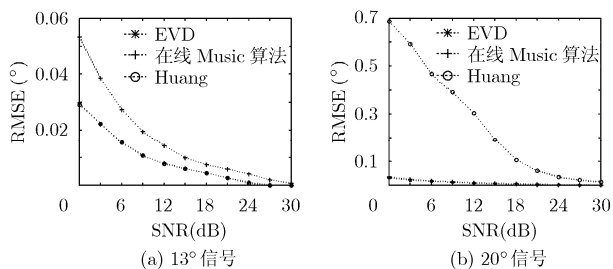


图2 信噪比对 DOA 估计性能的影响, 快拍数为 256

实验 2 快拍数的变化对在线 Music 算法性能的影响 在该实验中测试快拍数的变化对在线 Music 算法性能的影响, 其中信噪比为 10dB, 快拍数由 16 变化到 1024, 图 3 给出了实验结果。由图中可以看出, 对 13° 信号, Huang 的方法同样具有很高的估计精度, 甚至超过了 EVD 方法; 但对

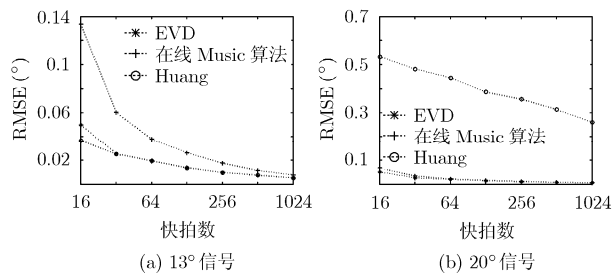


图3 快拍数变化对 DOA 估计性能的影响, SNR 为 10dB

于 20° 信号, 可以看出 Huang 的方法估计性能很差, 而在线 Music 算法对两个角度都有较好的估计性能。

上面两个实验表明了在线 Music 算法具有较好的 DOA 估计性能, 但由图 3 可以看出该方法存在小快拍情况下性能较差的问题, 在下面的实验中, 测试改进的算法在小快拍情况下的估计性能。

实验 3 在线 Music 算法与改进算法的性能比较 在该实验中, r 代表数据重复输入的次, $r=1$ 对应于在线 Music 算法, $r=2$ 与 $r=3$ 对应于改进算法。由图 4 可以看出, 在快拍数较少时改进算法较在线 Music 算法的性能有了明显提高, 而随着快拍数的提高, 两者的性能逐渐趋于一致, 这也验证了改进算法在大快拍时的收敛性能得到了保证。但是 $r=3$ 较 $r=2$ 时并没有明显的性能提升, 这说明两次输入已经提取了数据的绝大部分信息, 再多的输入次数对性能的提高没有实质意义。

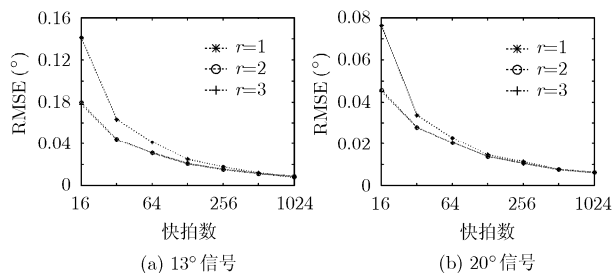


图4 在线 Music 算法与改进算法的 DOA 估计性能比较, SNR 为 10dB

4 结束语

本文给出了一种在线 DOA 估计算法, 它无需计算协方差矩阵和对其进行特征值分解, 能够有效地降低 DOA 估计的运算量; 然而该算法更重要的优点在于数据的接收与子空间的估计是同时进行的, 当第 1 个快拍数据接收完毕, 子空间的估计就开始了, 这就大大加强了算法的实时性; 而且它只需存储当前快拍的数据, 能有效降低算法的空间复杂度, 而估计性能接近基于特征值分解的方法; 并针对该算法在小快拍时性能较差的问题, 提出了数据重用的方法, 进一步提升了其估计性能。

参 考 文 献

- [1] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Trans. on AP*, 1986, 34(3): 276-286.
- [2] Ray R and Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques [J]. *IEEE Trans. on ASSP*, 1989, 37(7): 948-955.
- [3] Xu G and Kailath T. Fast subspace decomposition [J]. *IEEE Trans. on SP*, 1994, 42(3): 539-551.
- [4] Gershman A. B. Direction of arrival estimation using generalized minimum norm approach[J]. *Electronics Letters*, 1991, 27(16): 1485-1486.
- [5] Huang L, Wu S, and Feng D *et al.* Low complexity method for signal subspace fitting [J]. *Electronics Letters*, 2004, 40(14): 847-848.
- [6] 黄磊, 吴顺君, 冯大政等. 一种低复杂度的 ESPRIT 算法[J]. 西安电子科技大学学报, 2005, 32(4): 570-573.
- [7] Goldstein J S, Reed I S, and Scharf L L. A multistage representation of the wiener filter based on orthogonal projections [J]. *IEEE Trans. on IT*, 1998, 44(7): 2943-2959.
- [8] Weng J Y, Zhang Y L, and Hwang W S. Candid covariance-free incremental principal component analysis [J]. *IEEE Trans. on PA*, 2003, 25(8): 1034-1040.
- [9] Zhang Y and Weng J. Convergence analysis of complementary candid incremental principal component analysis. Technical Report MSU-CSE-01-23, Dept. of Computer Science and Eng., Michigan State Univ., East Lansing, Aug. 2001.
- [10] 包志强, 吴顺君, 张林让. 一种信源个数与波达方向联合估计的新算法 [J]. 电子学报, 2006, 34(12): 2170-2174.
- 曹向海: 男, 1977 年生, 博士生, 从事目标识别及阵列信号处理研究.
- 刘宏伟: 男, 1971 年生, 教授, 从事雷达信号处理、雷达目标识别及自适应信号处理研究.
- 吴顺君: 男, 1942 年生, 教授, 从事雷达系统分析、建模与仿真、高速实时信号处理等研究.