

基于 EIV 模型的点线位姿估计

汪俊文^{1,2}, 侯庭波^{1,2}, 朱 枫¹

(1. 中国科学院沈阳自动化研究所, 沈阳 110016; 2. 中国科学院研究生院, 北京 100049)

摘要: 针对基于多个点线特征的位姿估计问题, 该文将点线特征约束统一成二次型约束的形式, 并引入 EIV 模型描述影响点线特征投影的噪声。为了简化问题, 采用伪线性化方法, 并提出了基于奇异值分解的迭代算法来估计位姿参数。实验表明该算法受初始值影响小, 收敛快, 能够提供高精度和鲁棒的位姿估计结果。

关键词: 双重四元数; EIV 模型; 位姿估计

Pose Estimation for Noisy Points or Lines Based on EIV Model

WANG Jun-wen^{1,2}, HOU Ting-bo^{1,2}, ZHU Feng¹

(1. Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110016;
2. Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

【Abstract】 For the pose estimation problem using n points or n lines, this paper turns the point or line correspondences into the unified quadratic forms. Since the 2D perspective projection point or line features are corrupted by noise, it introduces EIV model to describe it. It also employs pseudo-linearization to simplify the problem and proposes an iterative algorithm based on SVD to estimate the pose parameters. The method has a weaker dependence on the initial solution and a fast convergence. Experimental results demonstrate the reliable accuracy and robustness of the method.

【Key words】 dual number quaternions; Errors-In-Variables (EIV) model; pose estimation

1 概述

关于特征定位问题, 以前的研究工作分为 2 类: 闭式解方法和数值方法。文献[1]给出了 3 点问题的闭式解。文献[2]在 3 点问题的基础上解决了 4 点问题。从 4 点中选取 3 点计算位姿, 再综合 4 点考虑从多解中选出针对特定 4 点配置的最优解集。文献[3]给出了任意位置四点的闭式解, 从而避免了四点问题退化为 3 点问题。在三线问题中, 文献[4]用一元八次方程表示问题的闭式解。文献[3]进一步指出: 当 3 条空间直线相交于一点, 闭式解方程可以简化为一个一元四次方程; 当 3 条空间直线两两正交且相交于一点, 闭式解方程又可以简化成一个一元二次方程。对于 3 条以上的直线, 获得闭式解是不可能的。

可以看出, 闭式解方法只适用于特征较少的情况(如 3 个、4 个特征)。此外, 闭式解形式所产生的多解问题一直是困扰物体视觉定位的主要问题。当特征较多时, 通过特征子集来寻找的最优解对噪声比较敏感, 而且难以充分利用数据的冗余信息。事实上, 当特征较多时, 多解的可能性就较小, 解的精度会得到提高。因此, 本文的研究工作针对较多的特征数目, 采用数值方法求解。

在数值方法中, 数学模型、目标函数和寻优算法是关键。文献[5]采用一个正交矩阵来描述旋转, 通过梯度下降法来寻找最优解。但是, 这种方法容易陷入局部最优解。文献[6]在此基础上考察了解的初始值和稳定性问题, 对初始值也进行了估计。文献[7]采用 3 个欧拉角来表示旋转, 通过牛顿一阶导近似将非线性的定位问题线性化。这种方法往往收敛很慢而且容易陷入局部最优。文献[8]采用了双重四元数同时表示旋转和平移, 这种数学描述有利于点线约束的统一。

因为特征的投影受到噪声的影响(如投影点的量化误差), 所以引入了 EIV(Errors-In-Variables)模型。该统计模型最初由文献[9]从统计学中引入, 用来描述受噪声影响的系统参数估计过程。

2 点线约束的统一

2.1 双重四元数

双重四元数 \hat{q} 由 2 个四元数 r 和 s 组成:

$$\hat{q} = r + \varepsilon s \tag{1}$$

其中, $\varepsilon^2 = 0$ 。2 个四元数满足如下关系:

$$r^T r = 1 \tag{2}$$

$$r^T s = 0 \tag{2}$$

旋转矩阵 R 和平移向量 t 可用双重四元数 r 表示成

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = W(r)^T Q(r) \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = 2W(r)^T s \tag{4}$$

其中,

$$W(r) = \begin{pmatrix} r_0 & -r_x & -r_y & -r_z \\ r_x & r_0 & r_z & -r_y \\ r_y & -r_z & r_0 & r_x \\ r_z & r_y & -r_x & r_0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60575024)

作者简介: 汪俊文(1982-), 男, 硕士研究生, 主研方向: 计算机视觉, 图像处理和分析; 侯庭波, 硕士研究生; 朱 枫, 研究员、博士生导师

收稿日期: 2007-03-30 **E-mail:** jwwang@sia.cn

$$Q(r) = \begin{pmatrix} r_0 & -r_x & -r_y & -r_z \\ r_x & r_0 & -r_z & r_y \\ r_y & r_z & r_0 & -r_x \\ r_z & -r_y & r_x & r_0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

容易证明, 2 个单位四元数 a, b 有如下性质:

$$Q(a)b = W(b)a \quad (7)$$

2.2 点特征约束

假设 $p_i = (x_i, y_i)^T$ 表示成像平面的图像点, $P_i = (X_i, Y_i, Z_i)^T$ 是其对应的空间点, 则透视投影中摄像机焦点、像点和目标点有如下共线关系:

$$x_i = \frac{r_{11}X_i + r_{12}Y_i + r_{13}Z_i + t_1}{r_{31}X_i + r_{32}Y_i + r_{33}Z_i + t_3} \quad (8)$$

$$y_i = \frac{r_{21}X_i + r_{22}Y_i + r_{23}Z_i + t_2}{r_{31}X_i + r_{32}Y_i + r_{33}Z_i + t_3} \quad (9)$$

其中, r_{ij} 表示旋转矩阵 R 的元素, t_i 是平移向量 t 的元素。

分解式(8)、式(9)有

$$(1 \ 0 \ -x_i)R \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} + (1 \ 0 \ -x_i) \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

$$(0 \ 1 \ -y_i)R \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} + (0 \ 1 \ -y_i) \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (11)$$

将旋转矩阵和平移向量用双重四元数表示:

$$p_{x_i}^T W(r)^T Q(r) p_i + 2p_{x_i} W(r)^T s = r^T Q(p_{x_i})^T W(p_i) r + 2r^T Q(p_{x_i})^T s \quad (12)$$

$$p_{y_i}^T W(r)^T Q(r) p_i + 2p_{y_i} W(r)^T s = r^T Q(p_{y_i})^T W(p_i) r + 2r^T Q(p_{y_i})^T s \quad (13)$$

其中, $p_{x_i} = (0 \ 1 \ 0 \ -x_i)^T$, $p_{y_i} = (0 \ 0 \ 1 \ -y_i)^T$, $p_i = (0 \ X_i \ Y_i \ Z_i)^T$ 。

式(12)、式(13)化成二次型:

$$(r \ s) \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ B_i^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = 0 \quad (14)$$

$$(r \ s) \begin{pmatrix} C_i & D_i \\ D_i^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = 0 \quad (15)$$

其中,

$$\begin{aligned} A_i &= Q(p_{x_i})^T W(p_i) \\ B_i &= Q(p_{x_i})^T \\ C_i &= Q(p_{y_i})^T W(p_i) \\ D_i &= Q(p_{y_i})^T \end{aligned} \quad (16)$$

2.3 线特征约束

假设 L_i 表示目标坐标系的空间直线, 它可以用方向向量 v_i 和直线上任一点向量 p_i 表示, 则该直线在摄像机坐标系下的方向向量和点向量可表示成

$$\begin{aligned} v_i &= Rv_i \\ p_i &= Rp_i + t \end{aligned} \quad (17)$$

假设 $l_i: a_i x + b_i y + c_i = 0$ 是空间直线 L_i 在成像平面上的投影, x, y 与像素坐标 u, v 有如下关系:

$$\begin{aligned} x &= (u - u_0) \cdot dx \\ y &= (v - v_0) \cdot dy \end{aligned} \quad (18)$$

其中, u_0, v_0, dx, dy 是摄像机的内参数。

由于投影中心, 空间直线和投影直线共面, 因此有如下关系:

$$\begin{aligned} n_i \cdot v_i &= 0 & n_i \cdot (Rv_i) &= 0 \\ n_i \cdot p_i &= 0 & \text{或 } n_i \cdot (Rp_i + t) &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

其中, $n_i = (a_i \ b_i \ c_i)^T$ 是投影平面的法向量。

线特征位姿估计问题的求解过程可以简化为 2 步: 先求出旋转矩阵 R , 再求平移向量 t 。此时, 只用四元数 r 表示旋转矩阵可将约束条件化为二次型的形式:

$$n_i \cdot (Rv_i) = n_i^T W(r)^T Q(r) v_i = r^T Q(n_i)^T W(v_i) r \quad (20)$$

其中, $v_i = (0, v_i^T)^T$; $p_i = (0, p_i^T)^T$ 。

3 位姿估计问题中的 EIV 模型

由点线特征获得的二次型约束写成统一形式:

$$f(m_{i0}, \beta_0) = \beta_0^T \Phi(m_{i0}) \beta_0 = 0 \quad (21)$$

其中, $i=1, 2, \dots, N$; N 是应用于位姿估计的特征数目; $\beta_0 = (r_0^T \ s_0^T)^T$ 或 r_0 。在点特征约束下, $m_{i0} = p_{i0}$ 表示成像平面的理想投影点; 在线特征约束下, $m_{i0} = n_{i0}$ 表示投影平面理想的法向量。实际上只能获得受噪声影响的测量值 m_i :

$$m_i = m_{i0} + \delta m_i \quad \delta m_i \sim GI(0, \sigma^2 C_{m_i}) \quad (22)$$

其中, $GI(\cdot)$ 表示对称独立的分布, 均值和协方差矩阵已知。

式(21)受到噪声式(22)的影响就是点线位姿估计问题中的 EIV 模型。

3.1 目标函数

目标函数为

$$J(\hat{\beta}, \hat{m}_1, \dots, \hat{m}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (m_i - \hat{m}_i)^T C_{m_i}^{-1} (m_i - \hat{m}_i) \quad (23)$$

其中, 上标 $\hat{\cdot}$ 表示理想值的估计值, 上标 $+$ 表示矩阵的伪逆。考虑到约束条件, 有如下目标函数:

$$J(\hat{\beta}, \hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, \hat{m}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (m_i - \hat{m}_i)^T C_{m_i}^{-1} (m_i - \hat{m}_i) + \sum_{i=1}^N \eta_i f(\hat{m}_i, \hat{\beta}) \quad (24)$$

3.2 寻优算法

估计值必须满足如下关系:

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\beta}}(\hat{\beta}, \hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, \hat{m}_N) = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{m}_i}(\hat{\beta}, \hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, \hat{m}_N) = 0 \quad (26)$$

由约束式(26), $C_{m_i}^{-1} (m_i - \hat{m}_i) = \frac{\partial f}{\partial \hat{m}_i}(\hat{m}_i, \hat{\beta}) \cdot \eta_i$, 即:

$$\hat{m}_i = m_i - C_{m_i} \frac{\partial f_i}{\partial \hat{m}_i}(\hat{m}_i, \hat{\beta}) \eta_i \quad (27)$$

假设 \bar{m}_i 是 m_{i0} 已知的估计值, 则泰勒展开式的一阶导近似有

$$f(\hat{m}_i, \hat{\beta}) = f(\bar{m}_i, \hat{\beta}) + \frac{\partial f}{\partial \hat{m}_i}(\bar{m}_i, \hat{\beta})^T (\hat{m}_i - \bar{m}_i) \quad (28)$$

再假设当用 \bar{m}_i 代替 \hat{m}_i , 雅克比矩阵的值变化很小, 有如下近似:

$$\hat{m}_i - \bar{m}_i = m_i - \bar{m}_i - C_{m_i} \frac{\partial f}{\partial \hat{m}_i}(\bar{m}_i, \hat{\beta}) \eta_i \quad (29)$$

将式(29)代入式(28)中且考虑到 $f(\hat{m}_i, \hat{\beta}) = 0$, 求出拉格朗日算子

$$\eta_i = \left[\frac{\partial f}{\partial \hat{m}_i}(\bar{m}_i, \hat{\beta})^T C_{m_i} \frac{\partial f}{\partial \hat{m}_i}(\bar{m}_i, \hat{\beta}) \right]^{-1} f(m_i, \hat{\beta}) \quad (30)$$

$$\text{令 } C_f(\bar{m}_i, \hat{\beta}) = \frac{\partial f}{\partial \hat{m}_i}(\bar{m}_i, \hat{\beta})^T C_{m_i} \frac{\partial f}{\partial \hat{m}_i}(\bar{m}_i, \hat{\beta})$$

再由约束式(25), 同样处理有如下等式:

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\beta}}(\hat{\beta}, \hat{m}_1, \dots, \hat{m}_N) = [S(\hat{\beta}) - C(\hat{\beta})] \hat{\beta} = 0 \quad (31)$$

其中,

$$S(\hat{\beta}) = \sum_{i=1}^N (\hat{\beta}^T \Phi(m_i))^T C_f(\bar{m}_i, \hat{\beta})^{-1} (\hat{\beta}^T \Phi(m_i)) \quad (32)$$

$$C(\hat{\beta}) = \sum_{i=1}^N ((\hat{\beta} \otimes I) \eta_i)^T C_{\phi}(\bar{m}_i) ((\hat{\beta} \otimes I) \eta_i) \quad (33)$$

其中, $C_{\phi}(\bar{m}_i)$ 是矩阵 $\Phi(\hat{m}_i)$ 向量化后的协方差矩阵; 二元算子 \otimes 表示 Kronecher 积; I 是单位阵。

寻优算法的关键是对式(31)求解。采用伪线性化方法, 将 $S(\hat{\beta}) - C(\hat{\beta})$ 用上一次迭代的参数 $\hat{\beta}$ 代入, 使此次求解的参数变成线性的形式, 通过奇异值分解求得。

3.3 迭代中的问题及解决

假设已经获得 k 和 $k+1$ 次的估计值 $\hat{\beta}^k$ 和 $\hat{\beta}^{k+1}$ 。理想情况下, 它们严格遵守如下二次型约束:

$$\hat{\beta}^{kT} \Phi \hat{\beta}^{k+1} = 0 \quad (34)$$

当下一次迭代的初值设为 $\hat{\beta}^{k+1}$ 时, 仍然得到估计值 $\hat{\beta}^k$, 即迭代过程在 2 个值附近振荡。为了保证迭代的收敛, 引入如下规则:

$$\hat{\beta}^{k+1} \leftarrow (1-\alpha)\hat{\beta}^k + \alpha\hat{\beta}^{k+1} \quad (35)$$

其中, α 在 (0,1) 内, 实验中设定为 0.5。

4 实验结果

算法验证实验是通过计算机仿真进行的。在点特征位姿估计实验中, 对成像平面上的投影点加上均值为 0, 标准差为 σ 的高斯噪声。

在线特征的情况下, 把噪声加在形成线特征的点集上, 使噪声带来的误差传递到检测出来的直线参数上。假设实验中位姿的理想值为 $(\alpha_{roll}, \alpha_{pitch}, \alpha_{yaw}, t)$, 估计值为 $(\hat{\alpha}_{roll}, \hat{\alpha}_{pitch}, \hat{\alpha}_{yaw}, \hat{t})$, 定义平移向量相对误差为 $|\hat{t} - t|/|t|$, 3 个旋转角的绝对误差分别为 $|\alpha_{roll} - \hat{\alpha}_{roll}|$, $|\alpha_{pitch} - \hat{\alpha}_{pitch}|$, $|\alpha_{yaw} - \hat{\alpha}_{yaw}|$ 。

4.1 不同噪声级别下点特征的位姿估计

从空间 $[-10,10] \times [-10,10] \times [-10,10]$ 中随机选取 6 点, 固定位姿为 $(10^\circ, 10^\circ, 10^\circ, 100)$, 噪声级别从 $\sigma = 0.5 \sim 5$, 每个噪声级别进行 400 次实验, 见图 1。

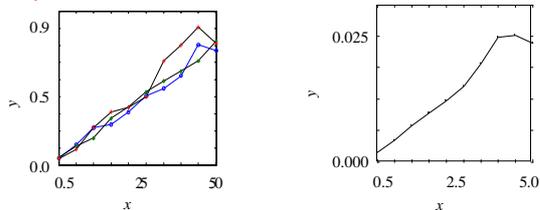


图 1 6 点估计中旋转角和平移向量对噪声级别的误差

4.2 固定噪声级别下不同数目点特征的位姿估计

固定噪声级别为 $\sigma = 1$, 点特征数目从 5 变化到 10, 设定的理想位姿, 点的选取和实验次数同上, 见图 2。

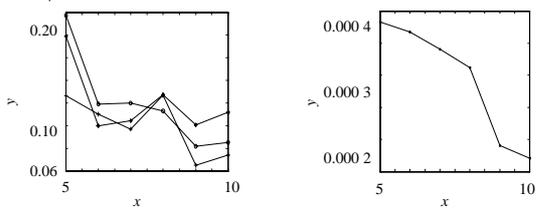


图 2 $\sigma = 1$ 时旋转角和平移向量对点特征数目的误差

4.3 固定噪声级别和点数目不同距离下的位姿估计

目标相对摄像机的距离越远, 其投影点就越集中, 噪声对位姿精度的影响就越严重。实验中, 从空间 $[-10,10] \times$

$[-10,10] \times [-10,10]$ (相当于目标最大跨度为 20) 中随机选取 6 点, 固定噪声级别 $\sigma = 1$, 目标与摄像机的距离从 40 变化到 400, 其他条件同上, 见图 3。

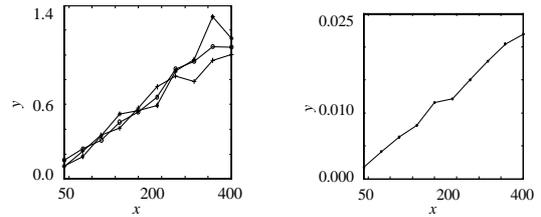


图 3 $\sigma = 1$ 和 6 点时旋转角和平移向量对距离的误差

4.4 不同噪声级别下线特征的位姿估计

从空间 $[-10,10] \times [-10,10] \times [-10,10]$ 中随机选取 6 条线, 固定位姿为 $(10^\circ, 10^\circ, 10^\circ, 100)$, 噪声级别从 $\sigma = 0.5$ 到 5, 每个噪声级别进行 400 次实验, 见图 4。

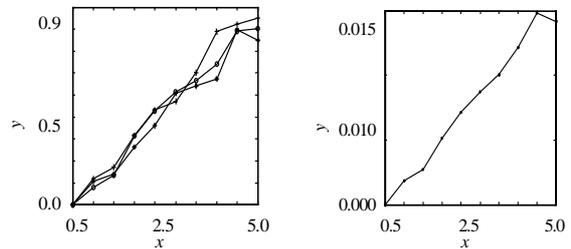


图 4 6 线估计中旋转角和平移向量对噪声级别的误差

4.5 固定噪声级别下不同数目线特征的位姿估计

固定噪声级别为 $\sigma = 1$, 线特征数目从 5 变化到 10, 设定的理想位姿, 线的选取和实验次数同上, 见图 5。

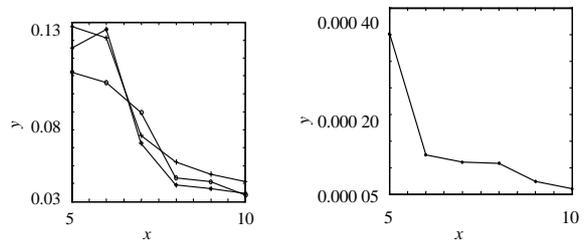


图 5 $\sigma = 1$ 时旋转角和平移向量对线特征数目的误差

4.6 固定噪声级别和线数目不同距离下的位姿估计

从空间 $[-10,10] \times [-10,10] \times [-10,10]$ 中随机选取 6 线, 固定噪声级别 $\sigma = 1$, 目标与摄像机的距离从 40 变化到 400, 其他条件同上, 见图 6。

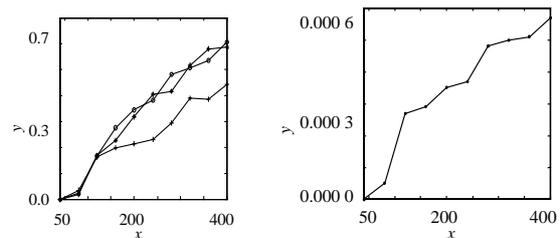


图 6 $\sigma = 1$ 和 6 线时旋转角和平移向量对距离的误差

(下转第 239 页)