

基于时域混合场积分方程求解目标瞬态散射特性

任 猛 周东明 刘 锋 何建国
(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

摘 要: 当入射平面波的频谱包含目标的谐振频点时, 时域电场积分方程和时域磁场积分方程求解的表面电流不稳定, 会出现后期震荡现象。通过线性组合时域电场积分方程和时域磁场积分方程, 可以获得一种混合场积分方程。数值结果显示, 这种混合场积分方程消除了因内部谐振引起的后期震荡, 得到了稳定的表面电流分布和远区散射场。

关键词: 时域混合场积分方程; 瞬态特性; 内部谐振; 后期震荡

中图分类号: O441

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)02-0494-04

The Solution of Time-Domain Combined Field Integral Equation for Transient Scattering by Conducting Surfaces of Arbitrary Shape

Ren Meng Zhou Dong-ming Liu Feng He Jian-guo

(College of Electronics Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The time-domain EFIE and MFIE approaches produce late-time oscillation for transient scattering responses from conducting objects when the incident spectrum of the field contains frequency components, which may correspond to the internal resonance of the structure. A time-domain Combined Field Integral Equation (CFIE) is presented. This formulation is based on a linear combination of the time-domain EFIE with MFIE. Numerical results for the EFIE, MFIE, and CFIE are presented and compared with those obtained from the Inverse Discrete Fourier Transform (IDFT) of the frequency-domain CFIE solution. And the time-domain CFIE solutions devoid of any resonant components.

Key words: Time-Domain Combined Field Integral Equation(TD-CFIE); Transient response; Internal resonance; Late-time oscillation

1 引言

随着脉冲雷达、高分辨率雷达在目标识别和超宽带技术方面的飞速发展, 目标的时域特性越来越引起人们的兴趣^[1]。基于矩量法(MOM)求解时域积分方程(TDIE)是获得目标时域特性的一种有效手段, 近年来得到了广泛的关注和深入的研究。与时域差分方程方法相比, 采用积分方程求解目标电磁瞬态特性有其特有的优势: (1)只对目标表面进行剖分, 减少了求解的未知数; (2)自动满足远场边界条件。在时域积分方程的求解中, 一般采用时间步进(MOT)迭代算法, MOT算法分为显式^[2]和隐式^[3]两种方案。但是不管是显式方案, 还是隐式方案, 单独求解时域电场积分方程^[2](TD-EFIE)或者时域磁场积分方程^[4], 只要入射脉冲的频谱包含目标的谐振频点时, 都会存在后期震荡现象, 使计算结果不稳定。

TD-EFIE 和 TD-MFIE 的后期震荡, 阻碍了时域积分方程在实际中的应用。针对后期震荡现象, 一些学者提出了空间滤波和时间滤波方案^[5-8], 部分缓解了后期震荡效应; 利用精确的空间积分规则并且恰当地选择时间步长^[9], 同样起到了平稳 MOT 算法的作用。但是这些方案都不能从根本

上消除因目标内部谐振带来的后期震荡, Shanker 等人^[10]对此现象进行了深入分析, 指出将电场和磁场积分方程进行某种组合, 构成混合场积分方程, 可以消除因谐振引起的后期震荡; 文献[11]表达了同样的思想, 只是混合场的组合方式不同; 文献[12]也采用了混合场积分方程求解目标瞬态特性, 将电场积分方程和磁场积分方程都对时间求偏导, 并且采用了高阶矢量基函数和带限外插技术。本文只对电场积分方程进行一阶求导, 采用低阶 RWG 空间基函数^[13], 三阶时间基函数, 线性组合推导时域混合场积分方程, 数值结果显示其计算结果的稳定性。

2 电磁场积分方程

设自由空间 V 中一闭合理想导体(PEC), 其表面为 S , \hat{n} 为外表面法方向。入射场 \mathbf{E}^i , \mathbf{H}^i 激励导体表面产生感应电流 \mathbf{J} , 进而在空间产生散射场 \mathbf{E}^s , \mathbf{H}^s 。根据边界条件可得

$$\hat{n} \times \hat{n} \times (\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s) = 0 \quad (1)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s) = \mathbf{J} \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{J}) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (3)$$

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{J}) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (4)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_s \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau)}{R} dS' \quad (5)$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_s \int_0^T \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{R} dt' dS' \quad (6)$$

$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 为场点到源点距离, $\tau = t - R/C$ 为延迟时间。为消除电标位的时间积分, 对式(1)两边求导, 得到时域电场积分方程(TD-EFIE):

$$\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s dS' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau)}{R} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int_s dS' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau)}{R} \right] \quad (7)$$

对式(2)的源积分抽取 Cauchy 主值并进行相应的矢量变换, 得到时域磁场积分方程(TD-MFIE):

$$\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)}{2} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{n}} \times \frac{1}{4\pi} \int_{s_0} \nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau)}{R} dS' \quad (8)$$

对式(7), 式(8)进行如下线性组合, 可以得到时域混合场积分方程(TD-CFIE):

$$\begin{aligned} & (1-k) \left(\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^i \right) + k\eta (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i) \\ & = (1-k) \left[-\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^s(\mathbf{J}) \right] \\ & + k\eta \left[\frac{\mathbf{J}}{2} - \hat{\mathbf{n}} \times \frac{1}{4\pi} \int_{s_0} \nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau)}{R} dS' \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$0 \leq k \leq 1$ 为线性组合系数, $k=0$, 式(9)为 TD-EFIE, $k=1$, 式(9)转化为 TD-MFIE, η 为自由空间波阻抗。

3 积分方程的离散

矩量法求解积分方程, 首先要把目标的表面电流用基函数展开。采用三角形网格剖分, 选择定义在三角形对上的 RWG 基函数作为空间基函数(如图 1), 其表达式如式(10)所示; 选择三阶多项式作为时间基函数(如图 2), 其表达式如式(11)所示, 其中 A_n 为三角形的面积, Δt 为时间步长:

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{l}{2A_n^+} \rho_n^+, & \mathbf{r} \in T_n^+ \\ \frac{l}{2A_n^-} \rho_n^-, & \mathbf{r} \in T_n^- \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (10)$$

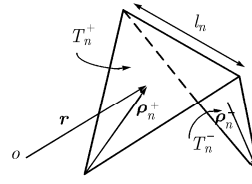


图1 三角形对和相关几何参数

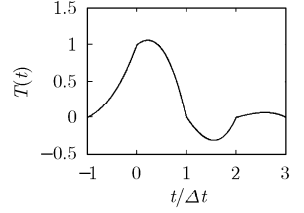


图2 时间基函数波形

$$T(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{6\Delta t^3} + \frac{t^2}{\Delta t^2} + \frac{11t}{6\Delta t} + 1, & -\Delta t \leq t \leq 0 \\ \frac{t^3}{2\Delta t^3} - \frac{t^2}{\Delta t^2} + \frac{t}{2\Delta t} + 1, & 0 \leq t \leq \Delta t \\ \frac{t^3}{2\Delta t^3} - \frac{t^2}{\Delta t^2} - \frac{t}{2\Delta t} + 1, & \Delta t \leq t \leq 2\Delta t \\ \frac{t}{6\Delta t^3} + \frac{t^2}{\Delta t^2} - \frac{11t}{6\Delta t} + 1, & 2\Delta t \leq t \leq 3\Delta t \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (11)$$

因此表面电流能用上述空间基函数和时间基函数展开成如下形式:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{n=1}^{N_t} I_{n,i}(t) \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) T_i(t) \quad (12)$$

N_s , N_t 分别表示空间采样和时间采样数, $T_i(t) = T(t - i \cdot \Delta t)$ 。将式(12)代入式(7), 式(8), 式(9), 求解电流系数 $I_{n,i}$ 即可获得任意时刻表面电流分布。

4 MOT(Marching-On-in-Time)迭代方案

应用 Galerkin 法检验, 选择空间展开函数 \mathbf{f}_n 作为检验函数, 定义内积如下:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_s \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} dS \quad (13)$$

将式(12)代入式(7), 式(8), 并对式(7), 式(8)在时刻 $t = t_j = j\Delta t$ 应用上述检验过程得

$$\mathbf{V}_j^E = \sum_{i=1}^j \mathbf{Z}_{j-i}^E \cdot I_i \quad (14)$$

$$\mathbf{C}_j^M = \mathbf{V}_j^M + \sum_{i=1}^j \mathbf{Z}_{j-i}^M I_i \quad (15)$$

其中

$$\mathbf{V}_{j,m}^E = \left\langle \mathbf{f}_m(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t_j) \right\rangle \quad (16)$$

$$\mathbf{V}_{j,m}^M = \left\langle \mathbf{f}_m(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t_j) \right\rangle \quad (17)$$

$$\mathbf{C}_{j,m}^M = \left\langle \mathbf{f}_m(\mathbf{r}), \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}, t_j)}{2} \right\rangle = \sum_{i=1}^j \sum_{n=1}^{N_s} I_{n,i} T_i(t) \left\langle \mathbf{f}_m, \frac{\mathbf{f}_n}{2} \right\rangle \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{j-i,m}^E = & \left\langle \mathbf{f}_m(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_s dS' \sum_{n=1}^{N_s} \frac{\mathbf{f}_n}{R} \frac{\partial^2 T_i(\tau)}{\partial \tau^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int_s dS' \sum_{n=1}^{N_s} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{f}_n}{R} T_i(\tau) \right] \right\rangle \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mathbf{Z}_{j-i,m}^M = \left\langle \mathbf{f}_m(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{n}} \times \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{C} \int_S \sum_{n=1}^{N_s} \frac{\mathbf{f}_n \times \hat{\mathbf{R}}}{R} \cdot \frac{\partial T_i(\tau)}{\partial \tau} \cdot I_{n,i} dS' + \int_S \sum_{n=1}^{N_s} \frac{\mathbf{f}_n \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} \cdot T_i(\tau) \cdot I_{n,i} dS' \right] \right\rangle \quad (20)$$

$\tau = t_i - R/C$ 表示时间延迟, 作代换 $i \leftrightarrow j-i$, 同时考虑到时间基函数 $T(0) = 1$ 的特性可得

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{j,m}^M &= \sum_{i=1}^j \sum_{n=1}^{N_s} I_{n,i} T_i(t) \left\langle \mathbf{f}_m, \frac{\mathbf{f}_n}{2} \right\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{n=1}^{N_s} I_{n,j-i} T_{j-i}(t) \left\langle \mathbf{f}_m, \frac{\mathbf{f}_n}{2} \right\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{n=1}^{N_s} I_{n,j-i} T(t_i) \left\langle \mathbf{f}_m, \frac{\mathbf{f}_n}{2} \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{N_s} I_{n,j} \left\langle \mathbf{f}_m, \frac{\mathbf{f}_n}{2} \right\rangle = \sum_{n=1}^{N_s} \mathbf{C}_{mn}^M I_{n,j} \end{aligned} \quad (21)$$

则式(21)与先前时刻的电流系数无关, 只包含当前时刻的电流系数 $I_{n,j}$, 也是待求解的未知量。将这种代换代入式(14)右边求和中, 可得

$$\sum_{i=1}^j \mathbf{Z}_{j-i}^E I_i = \sum_{i=0}^{j-1} \mathbf{Z}_i^E I_{j-i} = I_j \mathbf{Z}_0^E + \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{Z}_i^E I_{j-i} \quad (22)$$

式(22)右边第1项包含当前电流系数(未知量), 第2项包含先前各时刻的电流系数, 都为已知量。将式(22)代入式(14), 可得电场积分方程的 MOT 隐式形式:

$$\mathbf{Z}_0^E I_j = \mathbf{V}_j^E - \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{Z}_i^E I_{j-i} \quad (23)$$

同理, 可得磁场积分方程的 MOT 隐式形式:

$$(\mathbf{C}_{mn}^M - \mathbf{Z}_0^M) I_j = \mathbf{V}_j^M + \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{Z}_i^M I_{j-i} \quad (24)$$

将式(23), 式(24)按照式(9)进行线性组合, 即得混合场积分方程的 MOT 隐式形式:

$$\begin{aligned} & \left[(1-k) \mathbf{Z}_0^E + k\eta (\mathbf{C}_{mn}^M - \mathbf{Z}_0^M) \right] I_j \\ &= (1-k) \left[\mathbf{V}_j^E - \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{Z}_i^E I_{j-i} \right] \\ &+ k\eta \left[\mathbf{V}_j^M + \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{Z}_i^M I_{j-i} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

式(25)左边的系数矩阵是一个 $N_s \times N_s$ 稀疏矩阵, 右边是一个 $N_s \times 1$ 向量, 采用基于 Krylove 子空间法迭代求解电流系数 I_j 。

式(25)中, 对于奇异积分, 采用围线积分求解; 对于非奇异积分, 内层积分采用 7 点 Gauss 采样, 外层积分在三角形质心采样, 数值求解。

5 数值结果

设置入射场为 Gauss 平面波, 其电磁场分量定义为

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \frac{4}{\sqrt{\pi} \cdot T} e^{-\gamma^2} \quad (26)$$

$$\mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\eta} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \frac{4}{\sqrt{\pi} \cdot T} e^{-\gamma^2} \quad (27)$$

其中

$$\gamma = \frac{4}{T} (\text{Ct} - \text{Ct}_0 - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \quad (28)$$

波矢量 $\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{E}_0 = \hat{\mathbf{x}}$, T 是脉冲宽度, 延迟时间 $\text{Ct}_0 = 6\text{lm}$ (light meter: 光传播 1m 所用的时间)。

图3为三角形剖分后的立方体和圆柱模型, 它们都为理想导体, 中心在原点, 其中立方体的边长为 1m, 三角形总数为 192 个, 未知数 288 个; 圆柱的底面半径是 0.5m, 高是 1m, 三角形 136 个, 未知数 204 个。图4是 $T = 4\text{lm}$ 时立方体顶面中心处电流的瞬态分布情况。由图可知, EFIE 在大约 70 lm 后出现震荡现象, MFIE 要比 EFIE 震荡晚一些, 而 CFIE 一直保持稳定, 没有出现后期不稳定现象。图5是 $T = 6\text{lm}$ 时立方体顶面中心处的电流分布, 从图上可以看出, 虽然 MFIE 仍然比 EFIE 晚震荡, 但是总体上看, MFIE 和 EFIE 都比 $T = 4\text{lm}$ 时提前震荡, 这主要是由于积分采样引起的误差积累和内部谐振共同作用的结果。从图5中还可以看到, CFIE 依然稳定。图6, 图7分别是 $T = 4\text{lm}$ 和 $T = 6\text{lm}$ 时圆柱顶面中心点处的电流分布, 可以看到类似于图4, 图5的结果。图8, 图9分别是立方体和圆柱在 $T = 4\text{lm}$ 和 $T = 6\text{lm}$ 时的后向远区散射场分布, 同时利用频域采样结果经过反转离散傅里叶变换(IDFT)进行对比, 可以看到 CFIE 计算的后向远区散射场与 IDFT 的结果具有较好的一致性。

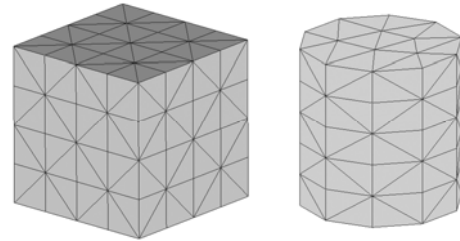


图3 三角形剖分的立方体和圆柱模型

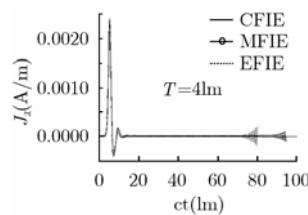


图4 $T = 4\text{lm}$ 时立方体顶面中心处电流分布

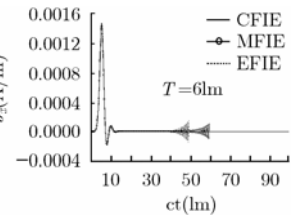


图5 $T = 6\text{lm}$ 时立方体顶面中心处电流分布

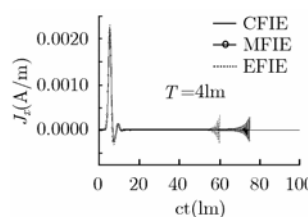


图6 $T = 4\text{lm}$ 时圆柱体顶面中心处电流分布

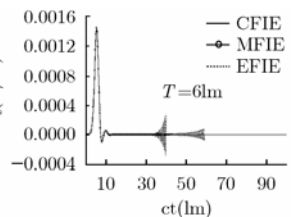


图7 $T = 6\text{lm}$ 时圆柱体顶面中心处电流分布

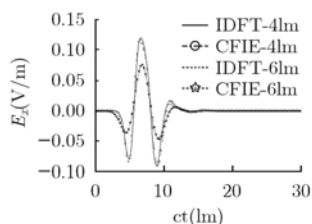


图 8 $T = 4\text{lm}$ 和 $T = 6\text{lm}$
时立方体远场分布

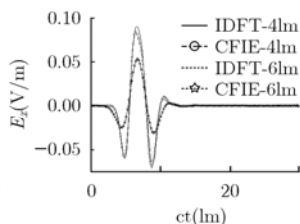


图 9 $T = 4\text{lm}$ 和 $T = 6\text{lm}$
时圆柱体远场分布

6 结束语

由于目标内部谐振频点的影响, 时域 EFIE 和 MFIE 在求解目标瞬态散射特性时, 会出现后期震荡现象。但是通常 MFIE 要比 EFIE 的稳定性好, 震荡会比 EFIE 向后延迟。按照本文提出的混合场的组合方式和 MOT 隐式迭代方案, 改善了阻抗矩阵的条件数, 使极点向单位圆靠拢, 较好地克服了由于目标内部谐振带来的影响, 得到稳定的表面电流分布。通过与频域采样 IDFT 的结果对比, 后向散射场吻合较好, 证明了这种时域混合场积分方程计算目标散射的精确性, 为时域积分方程加速算法求解电大尺寸目标奠定了基础。对于复杂目标, 只要精确剖分, 并采用适当的时间步长, 该混合场积分方程能够克服目标内部谐振, 得到稳定的解。

参 考 文 献

- [1] Rao S M. Time Domain Electromagnetics, San Diego, Academic Press, 1999: 1-9.
- [2] Rao S M and Wilton D R. Transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 1991, 39(1): 56-61.
- [3] Rao S M and Sarkar T K. Transient analysis of electromagnetic scattering from wire structures utilizing an implicit time-domain integral equation technique. *Microw. Opt. Technol. Lett.*, 1998, 17(1): 66-69.
- [4] Jung B H and Sarkar T K. Transient scattering from three-dimensional conducting bodies by using magnetic field integral equation. *J. of Electromagn. Waves and Appl.*, 2002, 16(1): 111-128.
- [5] Vechinski D A and Rao S M. A stable procedure to calculate the transient scattering by conducting surfaces of arbitrary

shape. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 1992, 40(6): 661-665.

- [6] Sadigh A and Arvas E. Treating instabilities in marching-on-in-time method from a different perspective. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 1993, 41(12): 1695-1702.
- [7] Rynne B P and Smith P D. Stability of time marching algorithms for the electric field integral equations. *J. Electromagn. Waves Appl.*, 1990, 12(4): 1181-1205.
- [8] Davies P J. A stability analysis of a time marching scheme for the general surface electric field integral equation. *Appl. Numer. Math.*, 1998, 27(1): 35-57.
- [9] Manara G, Monorchio A, and Reggiani R. A space-time discretization criterion for a stable time-marching solution of the electric field integral equation. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 1997, 45(3): 527-532.
- [10] Shanker B, Erigin A A, Aygun K, and Michielssen E. Analysis of transient electromagnetic scattering from closed surfaces using a combined field integral equation. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 2000, 48(7): 1064-1074.
- [11] Jung B H and Sarkar T K. Time-domain CFIE for the analysis of transient scattering from arbitrarily shaped 3D conducting objects. *Microw. Opt. Technol. Lett.*, 2002, 34(4): 289-296.
- [12] Widan R A, Pisharody G, Weile D, Shanker B, and Michielssen E. An accurate scheme for the solution of the time-domain integral equations of electromagnetics using higher order vector bases and bandlimited extrapolation. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 2004, 52(11): 2973-2983.
- [13] Rao S M. Electromagnetic scattering and radiation of arbitrarily-shaped surfaces by triangular patch modeling. [PhD, Dissertation], Univ. Mississippi 1980(8).

任 猛: 男, 1978 年生, 博士生, 从事计算电磁学、超宽带信号辐射散射理论与技术研究。

周东明: 男, 1976 年生, 博士生, 从事计算电磁学、超宽带信号辐射散射理论与技术研究。

何建国: 男, 1954 年生, 教授, 博士生导师, 中国电子学会高级会员, 出版专著 5 部, 先后在国内外刊物发表论文 50 余篇, 获各种科技进步奖 10 余项, 研究领域超宽带技术和电磁兼容等。