

一种基于 Padé 逼近对短序列频率和品质因数的估计方法¹

曲延锋 国伟华* 王守觉

(中国科学院半导体研究所神经网络实验室 北京 100083)

*(集成光电国家重点实验室 北京 100083)

摘要 该文提出了一种基于 Padé 逼近的谱估计方法, 由于 Padé 逼近能够利用有限项很好地逼近对无限项的求和, 文中算法适用于短序列情况。经过实验仿真并与 FFT 方法和小波变换谱估计方法进行比较表明, 该文算法具有较高的频率分辨率和估计精度, 并具有较好的品质因数。

关键词 Padé 逼近, FFT, 小波变换, 频率分辨率, 品质因数

中图分类号 TN911.7

1 引言

在对信号进行谱估计时, 往往由于采样数据序列较短, 采用传统的谱估计方法估计效果并不十分理想。小波变换^[1]作为新兴的数字信号处理技术, 由于其具有良好的局部显微特性, 在对信号频率估计方面有其独到之处, 但其频率分辨率涉及到尺度参数的选取问题, 尺度参数选取的好坏直接关系到频率分辨率的高低。FFT 作为信号频谱分析的最常用的有力工具, 但往往由于采样数据点数的有限, 造成其频率估计得不够准确且分辨率不高。本文提出了一种基于 Padé 逼近^[2]的谱估计方法, 其实质是认为观察到的样本点以外的数据不全为零, 而是利用有限长的样本点, 采用 Padé 逼近对无限长数据傅氏变换进行估计, 从而达到其谱估计的目的。经过实验的仿真, 并与 FFT 和小波变换谱估计^[1]的结果进行了对比, 表明本方法具有极高的频率分辨率和良好的品质因数 Q 值, ($Q = f_0/\Delta f$, Δf 为估计谱在频率峰值 f_0 处的 3dB 带宽。若信号是确定性和能量有限的, 估计谱为其能谱; 若信号是平稳随机的, 估计谱为其功率谱)。我们利用本方法成功地分析了光学模式的共振频率与品质因数, 得到了较好的估计结果^[3]。本文算法适用于对短时信号序列的谱估计情况。

2 基于 Padé 逼近的谱估计方法

对于一个无穷级数求和

$$S(z) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r z^r \quad (1)$$

如果仅仅知道其前 $l+1$ 个系数 $c_0, c_1, c_2, \dots, c_l$, 由 Padé 逼近^[2]理论可知, 我们可以用一比例分式 $f_{N,M}(z)$ 近似对无穷级数和 $S(z)$ 进行逼近。

$$f_{N,M}(z) = \frac{\sum_{s=0}^M a_s z^s}{\sum_{t=0}^N b_t z^t} \quad (2)$$

其中系数 $\{a_s\}$ 与 $\{b_t\}$ 是由 (3) 式所决定的,

¹ 2000-12-06 收到, 2001-05-08 定稿

$$\left(\sum_{t=0}^N b_t z^t \right) \left(\sum_{r=0}^{\infty} c_r z^r \right) = \sum_{s=0}^M a_s z^s + o(z^{M+N+1}) \quad (3)$$

如果级数和 $S(z)$ 是收敛的, 则误差 $o(z^{M+N+1})$ 反映了 $f_{N,M}(z)$ 对 $S(z)$ 的逼近能力. 对于 N, M 的不同取值, 得到不同的 Padé 逼近结果 $\{f_{N,M}\}$ 构成 ‘Padé table’ [2]. 由 Padé 逼近的收敛理论 [2] 可知 ‘Padé table’ 中对角序列 $\{f_{N,M}\}$ 具有较好的收敛性质, 故本文算法应用了对角近似策略. 关于如何利用有限数量的系数 $\{c_r\}$ 求取 Padé 逼近结果 $\{f_{N,M}\}$ 的方法有许多, 为了便于计算机求解, 本文采用了 Barker 递推算法 [2], 现介绍如下.

2.1 采用对角近似的 Baker 递推算法

设采样数列 $c_0, c_1, c_2, \dots, c_l$, 为了便于说明, 我们将 (2) 式中的分子和分母记为 $P_{N,M}$ 与 $Q_{N,M}$. 从而初始条件参数为 $P_{0,l} = \sum_{r=0}^l c_r z^r$, $Q_{0,l} = 1$, $P_{0,l-1} = \sum_{r=0}^{l-1} c_r z^r$, $Q_{0,l-1} = 1$.

步骤 1 使用 (4) 式, 由 $f_{N-1,M}$, $f_{N-1,M+1}$ 来计算 $f_{N,M}$.

$$f_{N,M} = \frac{P_{N,M}}{Q_{N,M}} = \frac{\bar{P}_{N-1,M} P_{N-1,M+1} - z \bar{P}_{N-1,M+1} P_{N-1,M}}{\bar{P}_{N-1,M} Q_{N-1,M+1} - z \bar{P}_{N-1,M+1} Q_{N-1,M}} \quad (4)$$

其中 $\bar{P}_{N-1,M}$ 为级数和 $P_{N-1,M}$ 中 z^M 项的系数, 即 (2) 式中的 a_M .

步骤 2 使用 (5) 式, 由 $f_{N-1,M}$, $f_{N,M}$ 来计算 $f_{N,M-1}$

$$f_{N,M-1} = \frac{P_{N,M-1}}{Q_{N,M-1}} = \frac{\bar{P}_{N,M} P_{N-1,M} - \bar{P}_{N-1,M} P_{N,M}}{\bar{P}_{N,M} Q_{N-1,M} - \bar{P}_{N-1,M} Q_{N,M}} \quad (5)$$

如果 l 为偶数, 则反复执行步骤 1, 2, 直至计算到 $M = N = l/2$ 结束, 将对角近似 $f_{l/2,l/2}$ 作为最后的逼近结果; 如果 l 为奇数, 则计算到 $f_{[l/2]+1,[l/2]}$ 结束 ($[l/2]$ 为 $l/2$ 的下取整).

2.2 基于 Padé 逼近的谱估计方法

一个具有有限能量的函数 $x_a(t)$ (即 $x_a(t) \in L^2(R)$) 的离散傅氏变换为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n T} = \sum_{n=0}^{\infty} x_a(nT) e^{-j\omega n T}, \quad n \geq 0 \quad (6)$$

其中 $x(n) = x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT)$, T 为采样周期. 考虑采样时间有限, 则上式常用

$$X_N(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N x(n) e^{-j\omega n T} \quad (7)$$

有限点数的采样序列傅氏变换近似, 其中 $N+1$ 为采样点数目.

然而在实际应用中, 往往由于采样序列较短, 则由 (7) 式得到的谱估计频率分辨率较低且不准确. 由于 Padé 逼近能够很好地利用短时序列对无穷级数进行逼近, 从而我们考虑利用 Padé 逼近方法来对 (6) 式进行有效的估计.

由 (1) 式, $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, 令 $c_n = x(n) = x_a(nT)$, 从而 $X(e^{j\omega}) = S(z)|_{z=e^{-j\omega T}}$.

对于 (6) 式在某一频率点 ω 的值, 可利用 Padé 逼近方法并采用基于对角近似策略的 Baker 递推算法的递推结果 $f_{N/2,N/2}(e^{-j\omega T})$ (不妨设 N 为偶数) 进行估计.

以上是对确定性与有限能量信号进行其频谱估计的。对于平稳随机信号，如果观察到 $x(n)$ 的 $N+1$ 个值： $x(0), x(1), \dots, x(N)$ ，我们可以使用周期图作为其功率谱的估计^[4]，于是功率谱估计有：

$$\hat{P}_{xx}(\omega) = I_N(\omega) = [1/(N+1)]|X_N(\omega)|^2 \quad (8)$$

其中 $X_N(\omega)$ 同 (7) 式，是序列 $x(n)$ 的离散傅氏变换。这样我们仍可以利用 Padé 逼近的递推结果 $f_{N/2, N/2}(e^{-j\omega T})$ 来近似 $X_N(\omega)$ 。

从而基于 Padé 逼近的平稳随机信号归一化功率谱的估计为

$$\hat{P}'_{xx}(\omega) \approx \frac{|f_{N/2, N/2}(e^{-j\omega T})|^2}{\max_{\omega} (|f_{N/2, N/2}(e^{-j\omega T})|^2)}$$

通过以上分析就完成了对短时信号序列的基于 Padé 逼近谱估计问题，其主要思想是认为观察到的样本点以外的数据不全为零，而是利用有限长的样本点，采用 Padé 逼近对无限长数据傅氏变换进行估计，从而解决了由于采样序列较短带来的不足。

3 仿真实验与结果分析

3.1 短时数据双正弦仿真信号的测试结果

实验采用两频率接近的正弦信号 $s(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$ ，其中 $f_1 = 1.03\text{Hz}$ ， $f_2 = 0.81\text{Hz}$ ，采样间隔 $T_s = 0.1\text{s}$ ，采样点数 $N = 16$ ，对仿真信号分别使用 FFT 方法，小波变换谱估计方法^[1]和基于 Padé 逼近的谱估计方法进行测试，比较分析 3 种方法的频率分辨率，其中小波变换谱估计方法采用文献 [1] 介绍的方法并取尺度参数 $a_0 = 1.5^{0.05}$ ，则尺度 m 对应的中心频率为

$$f = (1/T_s)/a, \quad a = a_0^m, \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (9)$$

对于基于 Padé 逼近谱估计方法，分析频率间隔采用 0.01Hz 。图 1，图 2，图 3 分别给出了 3 种方法下的估计谱，表 1 给出了 3 种方法下的估计频率误差比较。

从图 1 可以看到，当采样点数较少时，FFT 对分辨这两个信号是无能为力的，而图 2，图 3 则能明显分辨出两个峰值，显然，图 3 估计的两个峰比较窄，具有合理的带宽，更接近理论上的结果，且频率估计较图 2 准确，综合表 1 的比较结果，不难得到以下的结论：基于 Padé 逼近的谱估计方法和小波变换谱估计方法的频率分辨率和准确度都优于 FFT 方法，而基于 Padé 逼近的谱估计方法不仅频率分辨率和准确度较高，而且峰值处具有接近实际的带宽，优于其它两种方法。

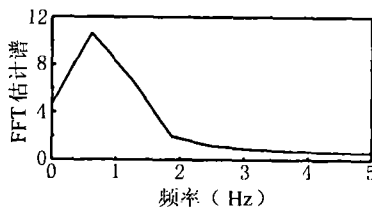


图 1 FFT 方法谱估计结果 ($N=16$)

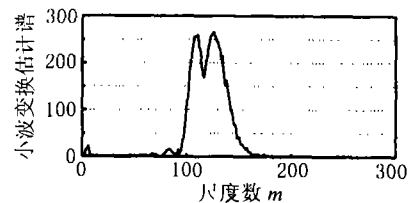


图 2 小波变换方法谱估计结果 ($N=16$)

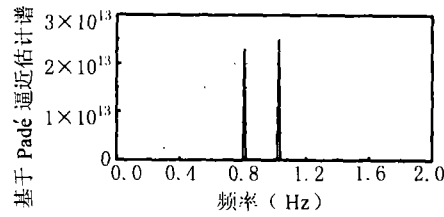
图 3 基于 Padé 逼近谱估计结果 ($N=16$)

表 1 FFT 方法, 小波变换谱估计方法和基于 Padé 逼近谱估计方法的频率估计比较

$N=16$ 频率 (Hz)	FFT 方法		小波变换谱估计方法		基于 Padé 逼近谱估计方法	
	谱估计值	相对误差	谱估计值	相对误差	谱估计值	相对误差
1.03	0.938	8.93%	1.0536	2.29%	1.03	0%
0.81	0.938	15.8%	0.8261	1.99%	0.81	0%

3.2 基于 Padé 逼近的谱估计方法分析光学模式的共振频率与品质因数的应用与仿真

在模拟分析光学腔场的共振模式时, 我们利用时域有限差分方法 (FDTD) 来产生时间序列, 时间序列是一系列衰减信号的叠加, 满足

$$S(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{-\alpha_i t} e^{j2\pi f_i t}, \quad (\alpha_i > 0) \quad (10)$$

则其能谱在频率为 f_i 位置的 3dB 带宽为 α_i/π , 从而品质因数 $Q_i = \pi f_i/\alpha_i^{[5]}$ 。

在分析共振模式时, 不仅要共振频率进行分析, 更重要的是要对品质因数进行很好的估计。当两个共振频率比较接近时, 利用 FFT 方法很难分辨出两个频率峰值, 更不必说对品质因数进行很好的估计。如果要想得到很好的估计结果, 则需要很长的时间序列, 这在实际的问题分析时很难做到的。如何利用比较短的时间序列, 解决对共振模式的共振频率和品质因数进行较好的估计, 一直是普遍关心的问题。从 3.1 节的仿真测试结果可以看到, 虽然小波变换谱估计方法能够分辨出两个频率峰值, 但对品质因数不能得到很好的估计结果, 而基于 Padé 逼近的谱估计方法则能给出较好的估计结果。文献 [6] 也提出了一种利用 Padé 逼近对上述问题的解决方法, 但与文中算法有本质的不同, 它是在频域上利用 Padé 逼近来进行插值。文中算法不仅具有较合理的理论基础, 而且实际应用表明估计误差也低于该方法。我们成功地利用文中算法分析了等边三角形腔的光学共振模式, 并对共振频率和品质因数得到了很好的估计结果, 具体应用请参阅文献 [3]。在此, 我们利用仿真信号, 给出问题的解决, 并与小波变换谱估计方法进行对比。

实验所用的仿真信号为 $S(t) = \exp(-\alpha_1 t) \sin(2\pi f_1 t) + \exp(-\alpha_2 t) \sin(2\pi f_2 t)$, 其中 $\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.2$, $f_1=1.03\text{Hz}$, $f_2=0.81\text{Hz}$, 则品质因数 $Q_1=8.09$, $Q_2=12.72$, 采样间隔 $T_s=0.1\text{s}$, 采样点数 $N=16$ 。分别用小波变换谱估计方法和基于 Padé 逼近的谱估计方法对仿真信号进行测试, 比较分析了两种方法的频率与品质因数的估计结果, 其中小波变换谱估计方法仍采用尺度参数 $a_0=1.5^{0.05}$, 为了直观上进行比较, 利用中心频率 f 与尺度数 m 关系 (9) 式, 将尺度数与估计谱关系图转化为频率与估计谱关系图。图 4, 图 5 分别给出了两种方法下的估计谱, 表 2 给出了频率与品质因数估计误差比较。

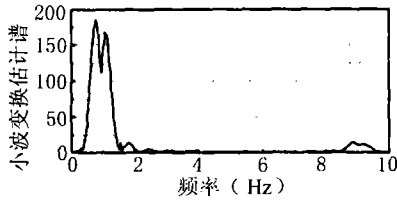


图4 小波变换方法谱估计结果

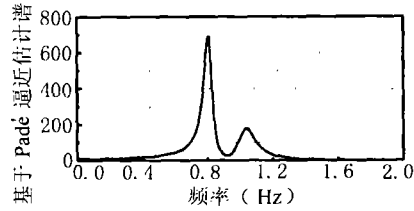


图5 基于 Padé 逼近谱估计结果

表2 小波变换谱估计方法和基于 Padé 逼近谱估计方法的频率与品质因数估计比较

频率 (Hz)	小波变换谱估计方法		基于 Padé 逼近谱估计方法	
	谱估计值	相对误差 (%)	谱估计值	相对误差 (%)
$f_1=1.03$	1.0752	4.39	1.04	0.97
$f_2=0.81$	0.7774	4.02	0.81	0
$Q_1=8.09$	3.9728	50.89	7.9238	2.05
$Q_2=12.72$	4.6335	63.58	12.5661	1.24

对于实验用的仿真信号，虽然图4和图5都能分辨出两个峰值，但图5比图4具有较合理的品质因数。结合表2的比较结果，说明基于 Padé 逼近的谱估计方法不仅能够对频率进行很好的估计，而且也能对品质因数进行较好的估计，在这两方面上都优于小波变换谱估计方法。这就是我们利用该方法对光学模式的共振频率与品质因数分析的依据。

3.3 基于 Padé 逼近的谱估计方法的估计结果受噪声的影响情况

在谱估计方法的实际应用中，由于采样信号不可避免地受到噪声的干扰，必然会引起谱估计性能的下降。为了考察基于 Padé 逼近的谱估计方法受噪声的影响情况，我们进行了计算机仿真实验，采用的信号形式如下：

$$S(t) = \sum_{k=1}^L A_k \sin(2\pi f_k t) + N(t) \tag{11}$$

其中 $L=3$ ， $f_1=0.81\text{Hz}$ ， $f_2=1.03\text{Hz}$ ， $f_3=1.25\text{Hz}$ ， $A_1=A_2=A_3=1$ ， $N(t)$ 为零均值高斯白噪声，方差为 σ^2 ，采样点数 $N=64$ ，采样频率 $f_s=10\text{Hz}$ 。表3给出了通过调整噪声的方差 σ 的取值，在不同信噪比 $\text{SNR}(\text{SNR}=10\log_{10}(A^2/2\sigma^2))$ 下，基于 Padé 逼近的谱估计方法的谱估计结果随噪声的变化情况（其中频率估计值的均方误差值是经过 100 次蒙特卡洛实验得到的）。

虽然本算法没有涉及到噪声的建模问题，但通过表3的结果可知，该算法在一定程度上具备了较好的抗噪声干扰能力，这是由算法自身的理论支持所决定的，从而给实际应用带来了极大的方便。当然在实际应用中，为了得到较好的谱估计结果，可以先应用小波除噪^[7,8]、自适应滤波^[9]等提高信噪比的方法，然后再应用基于 Padé 逼近的谱估计方法进行谱估计。至于如何通过对噪声的建模，提高本算法自身的抗噪声干扰能力，进一步的工作正在进行中。

表3 不同信噪比境况下，基于 Padé 逼近谱估计方法估计结果随噪声的变化情况

频率 (Hz)	SNR=10dB		SNR=2dB		SNR=-3dB	
	谱估计值	均方误差	谱估计值	均方误差	谱估计值	均方误差
$f_1=0.81$	0.7980	0.0015	0.7654	0.0135	—	—
$f_2=1.03$	1.0463	0.0013	1.0845	0.0157	—	—
$f_3=1.25$	1.2509	0.0009	1.3278	0.0184	—	—

(注：—表示已不能给出很好的估计结果)

4 结 论

本文提出的基于 Padé 逼近的谱估计方法, 由于 Padé 逼近能够加速有限项求和的收敛速度, 从而在短时数据情况下, 在频域上具有较高的分辨率和估计精度, 并且具有合理的品质因数, 能对品质因数进行较好的估计, 优于 FFT 方法和小波变换谱分析方法以及其它的现代谱估计算法。在进行谱估计时, 无需对所有频率点进行估计, 只需在感兴趣的频段进行估计, 这样可使计算量大大减少。选择适当的分析频率间隔, 可以达到足够高的频率分辨能力。在实际应用中, FFT 方法和小波变换谱分析方法无法解决问题的场合 (尤其在短时数据情况下) 可使用基于 Padé 逼近的谱估计方法, 一般都可以得到较好的结果。

参 考 文 献

- [1] 丁宏, 等, 采用小波变换对短数据信号的谱方法, 电子学报, 1997, 25(1), 11-14.
- [2] P. R. Graves-Morris, Padé Approximants, Lectures delivered at a summer school held at University of Kent, The Institute of Physics, London and Bristol, July 1972: 1-11.
- [3] W.H.Guo, Y. Z. Huang, Q. M. Wang. Resonant frequencies and quality factor for optical equilateral triangle resonators calculated by FDTD technique and Padé Approximation, IEEE Photon. Technol. Lett., 2000, 12(7), 813-815.
- [4] 吴兆熊, 等, 数字信号处理 (下册), 北京, 国防工业出版社, 1988, 第四章.
- [5] J. A. Pereda, et al., Computation of resonant frequencies and quality factors of open dielectric resonators by a combination of finite-difference time-domain (FDTD) and Prony's methods, IEEE Microwave Guided Wave Lett., 1992, 28(11), 431-433.
- [6] S. Dey, R. Mittra, Efficient computation of resonant frequencies and quality factors of cavities via combination of finite-difference time-domain technique and the Padé approximation, IEEE Microwave Guided Wave Lett., 1998, 8(12), 415-417.
- [7] 潘明海, 等, 利用小波变换的高性能功率谱估计算法, 电子科学学刊, 2000, 22(4), 555-559.
- [8] 陈桂明, 等, 应用 Matlab 语言处理数字信号与数字图像, 北京, 科学出版社, 2000, 第七章.
- [9] 张贤达, 现代信号处理, 北京, 清华大学出版社, 1998, 第四、五、十二章.

SHORT DATA SIGNAL FREQUENCY AND QUALITY FACTOR ESTIMATION ALGORITHM BASED ON PADÉ APPROXIMANTS

Qu Yanfeng Guo Weihua* Wang Shoujue

(*NN Lab., Inst. of Semiconductors, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100083, China*)

**(State Key Laboratory on Integrated Optoelectronics, Beijing 100083, China)*

Abstract In this paper a new algorithm for estimating frequency and quality factor based on Padé approximations is given. Because Padé approximations can accelerate the convergence of sum in the discrete Fourier transform, this algorithm is also used in the frequency and quality factor estimation of short data series. The simulation results show that this algorithm can obtain higher frequency resolution, higher accuracy and better quality factor than FFT and spectrum estimation based on wavelet transformation.

Key words Padé approximations, FFT, Wavelet transform, Frequency resolution, Quality factor

曲延锋: 男, 1975 年生, 博士生, 研究方向为语音识别、数字信号处理与神经网络控制。

国伟华: 男, 1976 年生, 博士生, 研究方向为半导体光学微腔与光放大器。

王守觉: 男, 1925 年生, 研究员, 中科院院士, 现从事半导体超高速电路与神经网络算法、模型、硬件和应用的研究。