

## 基于 LCMV 线性约束的自适应方向图控制

苏保伟<sup>①②</sup> 王永良<sup>②</sup> 周良柱<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

<sup>②</sup>(空军雷达学院雷达兵器运用工程军队重点实验室 武汉 430019)

**摘要:** 该文提出一种基于线性最小方差约束(LCMV)的自适应方向图控制方法,在约束条件中增加了对静态方向图的拟合条件,可以在自适应抗干扰的同时形成期望副瓣形状,分析了小快拍条件下自适应方向图副瓣起伏机理,并把对角加载与本方法结合,极大改善了副瓣收敛速度,并在小快拍时就能有较好的性能。随后的计算机仿真证明了本文方法的有效性。

**关键词:** 线性最小方差约束波束形成器; 自适应方向图控制; 对角加载

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)02-0282-04

## A Novel Adaptive Pattern Control Method Based on LCMV

Su Bao-wei<sup>①②</sup> Wang Yong-liang<sup>②</sup> Zhou Liang-zhu<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

<sup>②</sup>(Laboratory of Radar Armament and Utilization Engineering, Wuhan Radar Academy, Wuhan 430019, China)

**Abstract:** This paper describes a simple adaptive pattern control method based on Linearly Constrained Minimum Variance (LCMV). The quiescent pattern weights are imposed in constrain which make the overall beamformer sidelobe response equal the desired quiescent response and form nulls in the direction of interference at the same time. The sidelobe exhibits large ripples in condition of small training sample size and the diagonal loading method is combined with this method, which improve the convergence speed in sidelobe. The effectiveness of this new method is illustrated by a few designed examples.

**Key words:** Linearly Constrained Minimum Variance (LCMV) beamformer; Adaptive pattern control; Diagonal loading

### 1 引言

自适应处理可以在干扰方向形成零点,但副瓣形状往往过高,不是所期望的。实际应用中,自适应权的计算不是实时的,当前应用的权值是前个时间段内观测数据训练的结果,也就是说这时候的自适应处理只能对权值应用之前的干扰有效,当干扰环境没有变化时,此时干扰可以被自适应形成的零点抑制。在干扰环境快速变化时,系统对突然出现的干扰无能为力,在新的自适应权形成之前,接收性能很差,性能大大降低。如果在自适应零点形成的同时进行低副瓣控制,可在一定程度上抵消自适应权不能适应突变干扰而带来的性能下降,这就是自适应方向图控制(Adaptive Pattern Control, APC)。APC可以在干扰形成零点同时把旁瓣区压得很低甚至可以控制主瓣形状及实现任意形状副瓣区。文献[1-4]用二次约束方法进行自适应方向图控制,其中文献[1]用最小均方误差(MMSE)准则,使自适应控制方向图在给定区间与期望方向图误差小于指定值,得到含有未知参数的解

的一般形式,并构造一组迭代公式计算最优权,并应用到部分自适应阵中<sup>[2]</sup>,环形阵的 STAP 处理<sup>[3]</sup>和机载雷达的降秩 STAP 处理中。这种方法的缺点是权要经过多次迭代才能得到,计算量大。Tseng<sup>[5]</sup>通过对期望信号协方差阵和控制区协方差阵投影阵的特征矢量进行线性约束,在干扰方向形成零点同时实现了等低副瓣和某固定副瓣区控制。文献[6]中,也是基于线性约束最小方差法,不同的是构造了迭代过程,控制两次迭代权值差  $\Delta \mathbf{W}$  产生功率及控制区域波束增益最小,从而可在任意阵列上实现期望方向图。

本文提出一种 APC 方法,在线性最小方差约束(LCMV)波束形成中,增加最优权目标拟合函数,得到的方向图能保证期望信号方向增益最大,干扰方向形成零点并且副瓣形状、增益与期望静态方向图非常接近,文中推导并证明在一定条件下给出的最优化问题可以简化,在 LCMV 基础上只需增加一个简单的约束就既能抗干扰又能副瓣保形。随后的计算机仿真验证了本文方法的有效性。由于本方法最优权计算不需要迭代,因此计算复杂度和计算时间都较小,而且也不存在迭代计算时的收敛性问题。小快拍时旁瓣起伏较大,当对角加载后,副瓣能很快收敛于稳定值,增加了本方法实际应用的可行性。

2006-07-13 收到, 2006-12-25 改回

国家自然科学基金(No.60272086)和高校优秀青年教师教学科研奖励计划(TRAPOYT)资助课题

## 2 方法提出

我们先来看 LCMV 波束形成器:

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \quad (1)$$

设静态方向图综合得到的权为  $\mathbf{W}_0$ , 问题变为怎样使自适应方向图除了在干扰方向形成零点, 又具有静态方向图的特点, 比如低副瓣或特定形状的副瓣形状甚至固定零点等, 也就是在保证 LCMV 约束基础上, 使求出的权值尽量地逼近静态综合权  $\mathbf{W}_0$ 。设符合上面要求的自适应方向图控制权为  $\mathbf{W}_N$ , 则  $\mathbf{W}_N$  为下面约束问题的解:

$$\begin{aligned} \min \mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W} \\ \min \|\mathbf{W} - \mathbf{W}_0\|_F^2 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{C}^H \mathbf{W} = \mathbf{f} \end{aligned} \quad (2)$$

约束问题式(2)等价于

$$\begin{aligned} \min \mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W} \\ \text{s.t.} \quad \left[ \mathbf{C}, \frac{\mathbf{W}_0}{\mathbf{W}_0^H \mathbf{W}_0} \right]^H \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

即

$$\begin{aligned} \min \mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W} \\ \text{s.t.} \quad \bar{\mathbf{C}}^H \mathbf{W} = \bar{\mathbf{f}} \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $\bar{\mathbf{C}} = \left[ \mathbf{C}, \frac{\mathbf{W}_0}{\mathbf{W}_0^H \mathbf{W}_0} \right]$ ,  $\bar{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 1 \end{bmatrix}$ 。现在证明特定条件下式(4)

与式(2)等价, 即证明下面两式等价。

$$\min \|\mathbf{W} - \mathbf{W}_0\|_F^2 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{C}^H \mathbf{W} = \mathbf{f} \quad (5)$$

$$\bar{\mathbf{C}}^H \mathbf{W} = \bar{\mathbf{f}} \quad (6)$$

证明充分性式(5)  $\Rightarrow$  式(6)。利用 Lagrange 乘子法求解式(5)得到权值为

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \left[ \mathbf{I} - \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \right] \mathbf{W}_0 + \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \\ &= \mathbf{W}_0 - \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{W}_0 + \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)中令  $\mathbf{W}_q = \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f}$ , 即为 LCMV 算法的静态权, 是快拍数据中只含有噪声时得到的权(此时  $\mathbf{R} = \sigma_n^2 \mathbf{I}$ ), 由广义旁瓣相消(GSC)角度看,  $\mathbf{W}_0 - \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{W}_0 = \left[ \mathbf{I} - \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \right] \mathbf{W}_0$ , 是  $\mathbf{W}_0$  在约束集  $\mathbf{C}$  的阻塞矩阵张成子空间的投影, 这时权由 LCMV 算法的静态权和期望方向图静态权的投影两部分组成的。当期望静态权值满足

$$\mathbf{C}^H \mathbf{W}_0 = \mathbf{f} \quad (8)$$

时, 式(7)可简化为  $\mathbf{W} = \mathbf{W}_0$ , 这时约束式(6)显然成立。

证明必要性式(6)  $\Rightarrow$  式(5)。

$$\bar{\mathbf{C}}^H \mathbf{W} = \left[ \mathbf{C}, \frac{\mathbf{W}_0}{\mathbf{W}_0^H \mathbf{W}_0} \right]^H \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^H \mathbf{W} \\ \frac{\mathbf{W}_0^H \mathbf{W}}{\mathbf{W}_0^H \mathbf{W}_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

显然, 上式解为  $\mathbf{W} = \mathbf{W}_0$ , 这时  $\|\mathbf{W} - \mathbf{W}_0\|_F^2$  取得最小值, 当静态权值  $\mathbf{W}_0$  满足条件式(8)时, 约束式(6)显然成立, 命题得证。

满足静态权条件时, 由上式看出, 式(4)实际隐含了约束  $\mathbf{W} = \mathbf{W}_0$ , 这正是由式(4)确定的权既能自适应抑制干扰, 同时形成的自适应方向图又能充分地逼近期望的静态方向图的原因所在。用 Lagrange 乘子法求解式(4), 很容易得到最优权

$$\mathbf{W}_N = \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{C}} (\bar{\mathbf{C}}^H \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{C}})^{-1} \bar{\mathbf{f}} \quad (10)$$

需要注意的是, 本文方法是在满足静态权条件  $\mathbf{C}^H \mathbf{W}_0 = \mathbf{f}$  下得到的自适应控制权, 只对期望信号增益进行约束时, 静态权条件相应地变为  $\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{W}_0 = 1$ , 假设期望信号在  $0^\circ$  方向, 则  $\text{sum}(\mathbf{W}_0) = 1$ ,  $\text{sum}(\bullet)$  是对矢量各元素求和操作符。具体应用时, 可通过一定变换使静态权满足条件式(8)。

## 3 小快拍数下稳定性分析

假设  $M$  元阵列, 有  $N$  个干扰, 高斯白噪声背景, 噪声功率  $\sigma_n^2$ , 根据特征空间理论, 数据协方差阵  $\mathbf{R}$  逆可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{-1} &= \sum_{i=1}^N \lambda_i^{-1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H + \sum_{i=N+1}^M \sigma_n^{-2} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i^{-1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H + \sigma_n^{-2} \left( \mathbf{I} - \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H \right) \\ &= \sigma_n^{-2} \left( \mathbf{I} - \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i - \sigma_n^2}{\lambda_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H \right) \end{aligned} \quad (11)$$

代入式(10)

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_N &= \sum_{i=1}^M \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H \bar{\mathbf{C}} \left[ \bar{\mathbf{C}}^H \sum_{i=1}^M \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H \bar{\mathbf{C}} \right]^{-1} \bar{\mathbf{f}} \\ &= \left( \mathbf{I} - \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i - \sigma_n^2}{\lambda_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H \right) \bar{\mathbf{C}} \left[ \bar{\mathbf{C}}^H \left( \mathbf{I} - \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i - \sigma_n^2}{\lambda_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H \right) \bar{\mathbf{C}} \right]^{-1} \bar{\mathbf{f}} \end{aligned} \quad (12)$$

其中特征值  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq \lambda_M$ ,  $\mathbf{e}_i$  是与其对应的特征矢量。理想情况下, 小特征值及对应特征矢量对  $\mathbf{R}^{-1}$  计算并无贡献。

然而, 实际中数据协方差阵  $\hat{\mathbf{R}}$  是有限采样得到的, 其最小特征值  $\hat{\sigma}_n^2$  在数值上与  $\sigma_n^2$  并不相同, 由式(12)可见, 这时的小特征值和特征矢量都参与了权  $\mathbf{W}_N$  的计算。有限样本条件下, 特征矢量会出现扰动, 而扰动量的大小与相应的特征值有关, 由于  $\lambda_i \gg \sigma_n^2$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), 大特征值对应的特征矢量扰动较小, 而小特征值对应特征矢量扰动较大。由此分析, 在快拍数较少时, 自适应方向图副瓣会与期望副瓣有一定差距, 副瓣起伏较大, 只有在大的快拍数下才能得到理想的结果, 这种情况对干扰抑制没有影响。

可以通过给每个特征值加载一个值来减小小特征值矢量在权矢量中的比例, 也就是对角加载技术<sup>[7]</sup>。设加载量为  $L$ , 则式(12)变为

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_N &= \left( \mathbf{I} - \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i + L - \sigma_n^2}{\lambda_i + L} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H \right) \bar{\mathbf{C}} \\ &\quad \cdot \left[ \bar{\mathbf{C}}^H \left( \mathbf{I} - \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i + L - \sigma_n^2}{\lambda_i + L} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H \right) \bar{\mathbf{C}} \right]^{-1} \bar{\mathbf{f}} \end{aligned} \quad (13)$$

经对角加载,减小了小特征值对应特征矢量在计算权值过程中扰动据点比例,可以改善有限快拍下副瓣起伏现象,使副瓣电平很快收敛于期望值,在后面仿真中可以很明显看出对角加载 APC 带来的好处。

4 计算机仿真

**试验 1** 21 元均匀等距线阵,阵元间距为  $\lambda/2$ ,期望信号方向为  $0^\circ$ ,2 个不相关干扰,角度分别为  $-30^\circ$  及  $50^\circ$ ,干噪比为 40dB,期望方向图为  $-40\text{dB}$  均匀低副瓣,快拍数为 200,加载量  $L = 40$ 。

图 1(a)为几种方法的方向图对比。图中对角加载 APC 除了在两个干扰方向形成零点,方向图的其它部分较好地保留或者说拟合了静态低副瓣的特点,基本上达到了  $-40\text{dB}$ ,副瓣略有起伏,这是因为自适应零点的形成影响了副瓣的缘故。而 APC 方向图,在干扰方向也形成零陷,但由于快拍数少,副瓣区起伏太大,而且副瓣相对较高,在  $-25\text{dB}$  左右,离要求的  $-40\text{dB}$  差很多。LCMV 算法只是简单在干扰方向形成零陷。

图 1(b)为同样条件下快拍数取为  $5 \times 10^4$  时几种算法得到的方向图。由于快拍数足够大,几种算法副瓣都比较平稳,没有大的起伏,APC 算法方向图副瓣这时也能很好逼近期望方向图副瓣。对角加载 APC 方向图除干扰附近外,其它基本上  $-40\text{dB}$  静态方向图重合,说明控制效果相当好。

对比图 1(a),图 1(b),虽然小快拍情况下,通过对角加载 APC 方法可以很好地进行自适应方向图控制,但形成的零点深度比足够快拍数下要低,这是由于小快拍数下数据协方差阵  $R$  的估计值与真实值有偏差造成的。

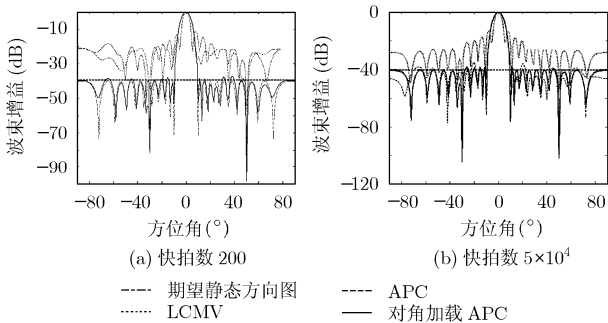


图 1  $-40\text{dB}$  等副瓣静态方向图,LCMV 方向图,APC 方向图及对角加载 APC 方向图

**试验 2** 条件同上。期望方向图副瓣区在  $[-50, -10]$ ,  $[10, 50]$  两个区间为  $-40\text{dB}$ ,其余副瓣区电平控制在  $-30\text{dB}$ ,快拍数取为 200,加载量  $L = 40$ 。(见图 2)。

**试验 3** 21 元非等距线阵,阵列位置同文献[8]中例子,单位为一个波长  $\lambda$ ,即  $\{-5.0000, -4.6065, -3.8098, -3.2995, -2.8973, -2.3497, -1.8494, -1.5302, -0.6299, -0.3749, 0, 0.3749, 0.6299, 1.5302, 1.8494, 2.3497, 2.8973,$

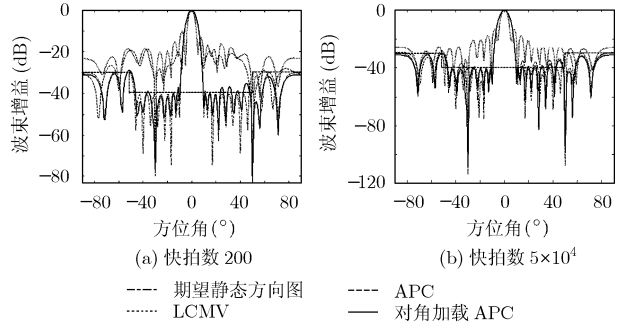


图 2 双区域低副瓣静态方向图,LCMV 方向图,APC 图及对角加载 APC 图

$3.2995, 3.8098, 4.6065, 5.0000\} \lambda$ 。2 个干扰,角度为  $-30^\circ, 50^\circ$ ,干扰强度 40 dB。期望方向图副瓣电平在  $-90^\circ$  到  $-20^\circ$  区域从  $-30\text{dB}$  沿斜线(斜率为  $1/7$ )降低至  $-40\text{dB}$ ,其余区域副瓣电平均为  $-30\text{dB}$ ,加载量  $L = 40$ 。(见图 3)。

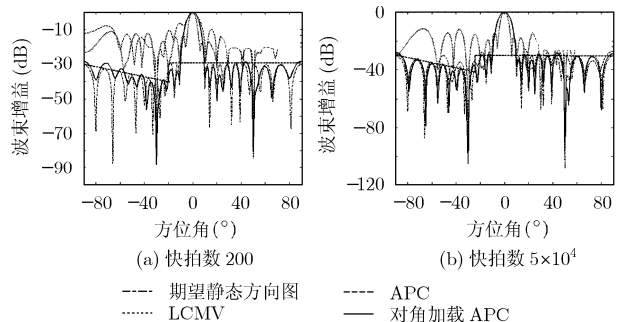


图 3 锯齿形副瓣静态方向图,LCMV 方向图,APC 图及对角加载 APC 图

试验 2 和试验 3 仿真了等距线阵和非等距线阵的复杂自适应方向图控制。其中期望静态方向图综合权  $W_0$  利用文献[9]中所提出的两步最小方差法(two-step least-squares method)计算得到。试验 2 描述场景有一定应用价值,实际中,由于抗干扰平台的运动(如机载雷达)或快变干扰(位置快速变化或者间歇干扰),最优权更新来不及适应快变干扰,这时快变干扰不能被完全抑制,系统性能受到影响,如试验 2 所示在快变干扰可能到达区域保持低的旁瓣电平,这样即使出现上述情况干扰也会因低旁瓣增益而相对受到抑制,从另一方面提高了系统稳定性。

**试验 4** 面阵方向图控制。竖面放置均匀面阵,横向及纵向阵元数都为 10 个,阵元间距半个波长  $\lambda/2$ ,期望的旁瓣电平水平为  $-35\text{dB}$ ,两个不相关干扰分别从  $(30^\circ, 50^\circ)$  及  $(60^\circ, 60^\circ)$  进入,干扰噪声比 40 dB,噪声为高斯白噪声。期望信号方向  $(90^\circ, 0^\circ)$ ,快拍数为 200。(见图 4)。

从不同加载量下面阵自适应控制方向图看出,加载量越大,方向图逼近期望方向图的效果越好,但加载量增大到一定程度后,对干扰的抑制会减弱,甚至不能准确地干扰方向形成零陷。可见,对角加载可以加速方向图控制的收敛,

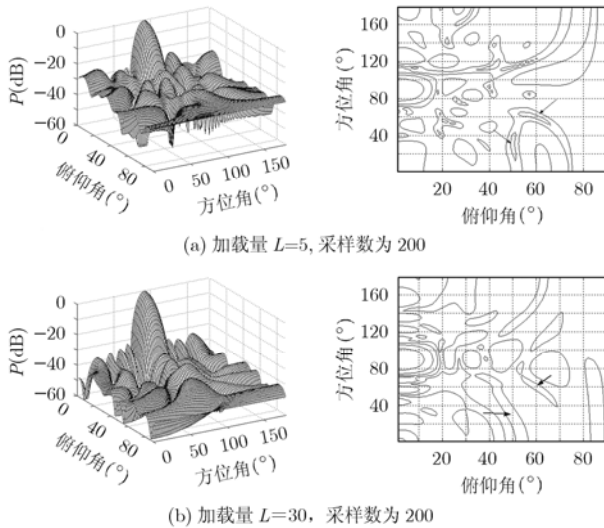


图 4 竖面放置面阵方向图控制, 抑制干扰同时逼近期望方向图

但这是以牺牲抗干扰性能为代价的。通过实验可以选定合适的加载量, 既能较好地抑制干扰, 又能很好地逼近给定的期望方向图。大量仿真表明加载量取最小特征值的 20 ~ 30 倍是比较恰当的, 即  $20 \times \min(\text{eig}(\mathbf{R})) \leq L \leq 30 \times \min(\text{eig}(\mathbf{R}))$ 。随着副瓣的压低, 主瓣的宽度逐渐升高, 也就是说, 在低副瓣期望方向图情况下, 自适应控制方向图的拟合度越高, 主瓣的方向性就变的越差。具体应用中, 采样数一般不会太大, 这时用对角加载方法能显著提高副瓣收敛速度并减小副瓣的起伏。

## 5 结束语

本文提出一种简单的 APC 方法, 在 LCMV 约束中增加新的约束条件, 得到的最优权能很好地抑制干扰并能保持静态方向图的低副瓣或其它特性。低副瓣控制在实际应用中很有价值, 比如在权值更新期间, 对于突然出现的干扰虽然由于权值的“不适应”并不能抑制, 但低旁瓣可补偿一部分性能损失, 使系统性能下降在可接受范围内。APC 还可应用在固定零点形成中, 即预先计算出对付固定强干扰的自适应权, 其相当于本方法中期望静态权  $\mathbf{W}_0$ , 然后用改进的 LCMV 求解, 就能保证固定零点并可自适应地对付其它干扰, 需要注意的是静态权  $\mathbf{W}_0$  要满足条件式(8), 不满足时要对静态权做一定变换以使条件满足。小快拍数时 LCMV-APC 方法性能不能令人满意, 可以用对角加载方法加快副瓣区收敛速度, 对线阵和面阵的计算机仿真结果表明该方法完全可行, 可在小快拍数下抑制干扰的同时旁瓣迅速收敛到期望形状。

本方法的不足之处是由于增加了一个额外的约束, 使得减小了 1 个可对付干扰的自由度。

## 参考文献

- [1] Bell K L and Van Trees H L. Adaptive and non-adaptive beam pattern control using quadratic beam pattern constraints, Proc. the 33rd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Pacific Grove, CA, 1999: 486-490.
- [2] Bell K L and Wage K E. Partially adaptive LCMV beamforming with quadratic pattern constraints, Proc. 4th World Multiconference on Systemic, Cybernetics and Informatics (SCI2000), Orlando, FL, VI, 2000: 213-218.
- [3] Bell K L, Van Trees H L, and Griffiths L J. Adaptive beam pattern control using quadratic constraints for circular array STAP, Proc. 2000 Adaptive Sensor Array Processing Workshop (ASAP 2000), MIT Lincoln Laboratory, Lexington, MA, 2000: 483-488.
- [4] Bell K L and Wage K E. Reduced rank space-time adaptive processing with quadratic pattern constraints for airborne radar, Proc. the 37th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, 2003: 807-811.
- [5] Tseng C Y and Griffiths L J. A unified approach to the design of linear constraint in minimum variance adaptive beamformers. *IEEE Trans. on Antenna Propagation*, 1992, 40(12): 1533-1542.
- [6] Tseng C Y and Griffiths L J. A simple algorithm to achieve desired patterns for arbitrary arrays. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1992, 40(11): 2737-2746.
- [7] Carlson B D. Covariance matrix estimation errors and diagonal loading in adaptive arrays. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronics Systems*, 1988, 24(4): 397-401.
- [8] Zhou P and Ingram M. Pattern synthesis for arbitrary arrays using an adaptive array method. *IEEE Trans. on Antenna Propagation*, 1999, 47 (5): 862-869.
- [9] Shi Zhan and Feng Zhenghe. A new array pattern synthesis algorithm using the two-step least-squares method. *IEEE Signal Processing Letters*, 2005, 12(3): 250-253.

苏保伟: 男, 1974 年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理、智能天线等。

王永良: 男, 1965 年生, 博士生导师, 教授, 主要研究方向为雷达技术、阵列信号处理、自适应信号处理等。

周良柱: 男, 1949 年生, 博士生导师, 教授, 主要研究方向为现代信号处理、阵列信号处理等。