

基于 Laguerre 多项式的边界积分方程时域求解

柴舜连 王生水 陈忠宽 毛钧杰
(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

摘要: 针对时域积分方程中存在的晚时震荡问题,介绍了基于 Laguerre 多项式的电场、磁场和混合场积分方程,求解了导体球和导体圆柱的时域电流分布和后向散射场以及单站 RCS。结果表明,3种积分方程很好地解决了晚时震荡问题,混合场积分方程具有更高的计算精度。

关键词: 单站雷达散射截面;拉盖尔多项式;混合场积分方程;阶数步进;时间步进

中图分类号: TN011

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)03-0742-04

Solution of the Boundary Integral Equation in Time Domain Based on the Laguerre Polynomials

Chai Shun-lian Wang Sheng-shui Chen Zhong-kuan Mao Jun-jie

(College of Electronic Science and Engineering National Univ. of Defense Technology Changsha 410073, China)

Abstract: In order to eliminate the late-time-oscillate in time domain integral equation, EFIE, MFIE and CFIE which based on the method of MOD using Laguerre polynomials as temporal basis function were introduced, induced current distributing and backward scattering of far field in time domain and monostatic RCS of a conducting sphere and a cylinder were given. The results showed that they eliminate the late-time-oscillate effectively and the CFIE has higher precision than the other two.

Key words: Monostatic RCS; Laguerre polynomial; Combined Field Integral Equation (CFIE); Marching On in Degree(MOD); Marching On in Time(MOT)

1 引言

对时域散射和辐射问题的分析和模拟在电磁学、地球物理学和声学等领域有着非常重要的作用和意义。在需要获取目标超宽带响应数据的实际应用(如雷达目标的探测和识别)中,采用时域方法比频域方法的计算效率更高^[1]。基于时域积分方程的优势,一次求解可以得到很宽频带的信息,相对于频域积分方程而言,求解宽频带问题大大节省了计算用时间。基于 RWG 三角基函数、边界积分方程的矩量法,因其用三角面片对目标表面建模剖分,可共形于任意形状,具有很高的建模和计算精度,近年来发展很快。在频域,矩量法已得到了深入的研究,其快速算法(如 MLPMA, AIM 等)已经很成熟^[2-4]。相比较而言,其在时域的研究却远远落后。造成这一现象的主要原因之一就是晚时震荡问题。

对于时域积分方程的求解,当前主要有两类方法:时间步进(MOT)算法和阶数步进(MOD)算法。在时间步进算法中,根据求解时是否包含矩阵求逆,分为两种:显式(explicit)算法^[5,6]和隐式(implicit)算法^[7-9]。显式算法结合时间步进(MOT)技术,需要求解磁矢位的二阶时间微分,矢量位随时间的变换关系采用公共边的中心近似,而标量位采用面片中心近似,这使得计算量增加并且其对时间变化的近似误差较大,加重了晚时震荡。为了改善震荡问题,文献[7]采用了平滑滤波等技术,但是这种方法在剖分网格密度增大时失败。

近年来,由美国纽约锡拉丘兹大学 Sarkar 教授领导的研究小组提出的隐式 MOT 算法和基于 Laguerre 多项式的 MOD 算法^[10-12]解决了晚时震荡问题。

在基于 Laguerre 多项式的 MOD 算法中,通过选择适当的阶数,可以很好地解决晚时震荡问题。与 MOT 算法不同的是,该方法在空间域和时间域都运用伽略金方法进行检验。时域的未知系数由一组正交的基于加权 Laguerre 多项式的基函数来近似,根据伽略金方法的定义,这一基函数也被用作时间域的检验函数。

文中研究了基于 MOD 算法的电场、磁场和混合场积分方程,并应用这 3 种不同的方法分析了相同的问题,通过对计算结果的比较,得到了一些有益的结论。

2 时域积分方程

基于 Laguerre 多项式的 MOD 算法,在空间域和时间域都要采用伽略金方法进行检验。在空间域,基函数和检验函数均采用 RWG^[5,6]三角基函数;在时间域,基函数和检验函数均采用由加权 Laguerre 多项式构成的标准正交函数^[10-12]。采用的时间基函数具有随时间增长逐渐收敛的特性,很好地解决了晚时震荡问题;其本身具有的因果性、正交性使得计算得以简化,容易求解。

2.1 电场积分方程(EFIE)

令 S 代表被瞬态电磁脉冲激励的闭或开的良导体表面,在瞬态电磁场的激励下,应用等效原理,其表面的感应电流

辐射, 得到散射场; 根据导体表面电场边界条件, 其切向电场为零, 得到下式:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) \right]_{\text{tan}} = [\mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)]_{\text{tan}} \quad (1)$$

应用伽略金(Galerkin)方法, 对上式进行空间域的检验, 由 \mathbf{f}_m 与上式两边做内积:

$$\left[\left\langle \mathbf{f}_m, \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right\rangle + \left\langle \mathbf{f}_m, \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) \right\rangle \right]_{\text{tan}} = \left[\left\langle \mathbf{f}_m, \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) \right\rangle \right]_{\text{tan}} \quad (2)$$

由标量位的定义, 上式左边第二项将包含电流关于时间的积分运算, 为了避免这一问题并解析的求解上式左边第一项中矢量位 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ 对时间 t 的偏导, 定义一个源矢量函数 $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ [10-12]:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) \quad (3)$$

电荷密度与源矢量 $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ 之间的关系可以表示如下 [10-12]:

$$q(\mathbf{r}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) \quad (4)$$

由式(3)及电流 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 的表达式, 可得 [10-12]

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^N e_n(t) \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \quad (5)$$

其中 $e_n(t)$ 是待求系数。将式(3)~式(5)代入式(2), 经整理, 得到下式 [10-12]:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{p,q} \left[a_{mn}^{pq} \frac{d^2}{dt^2} e_n(\tau_{mn}^{pq}) + b_{mn}^{pq} e_n(\tau_{mn}^{pq}) \right] = V_m^E(t) \quad (6)$$

$$a_{mn}^{pq} = \frac{\mu}{4\pi} \int_s \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \int_{s'} \frac{\mathbf{f}_n(\mathbf{r}')}{R} ds' ds \quad (7)$$

$$b_{mn}^{pq} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_s \nabla \cdot \mathbf{f}_m^p(\mathbf{r}) \int_{s'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{f}_n^q(\mathbf{r}')}{R} ds' ds \quad (8)$$

其中 τ_{mn}^{pq} 、 $V_m^E(t)$ 的表达式参见文献[12]。

接下来分析时间基函数及式(6)在时间域的检验。由 Laguerre 多项式的定义及性质, 定义一个标准正交基函数(见文献[10-12])

$$\phi_j(t) = e^{-t/2} L_j(t) \quad (9)$$

$L_j(t)$ 代表第 j 阶的 Laguerre 多项式。这一函数可以很好的描述一个因果响应, 式(5)的待求系数 $e_n(t)$ 可以描述成 [10-12]

$$e_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} e_{n,j} \phi_j(st) \quad (10)$$

其中 s 是一个标度控制因子。把式(10)及文献[10-12]给出的系数 $e_n(t)$ 对时间的二阶微分表达式代入式(6), 用 $\phi_j(st)$ 作时间检验函数进行时间域的检验, 利用 Laguerre 多项式的性质, 得到下面的式子 [10-12]:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{p,q} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\left(\frac{s^2}{4} a_{mn}^{pq} + b_{mn}^{pq} \right) e_{n,j} + s^2 a_{mn}^{pq} \sum_{k=0}^{j-1} (j-k) e_{n,k} \right] \cdot I_{ij} \left(s \frac{R_{mn}^{pq}}{c} \right) = V_{m,i}^E \quad (11)$$

其中相关变量的表达式参见文献[10-12]。上式经整理可得到矩阵、向量方程组的形式如下:

$$[\mathbf{Z}_{mn}^E][\mathbf{e}_{n,i}] = [\mathbf{V}_{m,i}^E] \quad (12)$$

其中 $[\mathbf{Z}_{mn}^E]$ 不是时间检验函数阶数的函数, 只需一次计算就可以把这一矩阵填充起来。这样, 可以求得式(12)的解, 只需在时间检验函数的阶数上递推迭代就可以得到稳定解, 与所要得到的时间步数目无关。

2.2 磁场积分方程(MFIE)

令 S 表示被瞬态电磁脉冲激励的闭合良导体表面, 在瞬态电磁场的激励下, 由磁场边界条件, 得到下式:

$$\hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}^s(\mathbf{r}, t)] = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in S \quad (13)$$

散射磁场的表达式为

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (14)$$

将式(14)代入式(13), 对卷积应用柯西中值定理, 则式(13)可以写成下式 [12]:

$$\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)}{2} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)}{R} ds' \quad (15)$$

其中, 式(15)中右边第二项积分区间 S_0 表示源积分区间 S 上除掉源点和场点重合的点(即: $R=0$)以外的积分区域。对式(15)进行空间域的检验, 并用 $\phi_i(st)$ 作检验函数进行时间域的检验, 其检验步骤及方法与电场积分方程的相同, 在此不赘述。最后得到矩阵形式如下 [10-12]:

$$[\mathbf{Z}_{mn}^H][\mathbf{e}_{n,i}] = [\mathbf{V}_{m,i}^H] \quad (16)$$

2.3 混合场积分方程(CFIE)

得到混合场积分方程只需要简单的线性相加 EFIE 和 MFIE, 如下所示。

$$(1-k)[-\mathbf{E}^s(\mathbf{r}, t)]_{\text{tan}} + k\eta[\mathbf{J} - \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^s(\mathbf{r}, t)] \\ = (1-k)[\mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)]_{\text{tan}} + k\eta[\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t)] \quad (17)$$

k 是耦合系数, $k=0$, EFIE 和 $k=1$, MFIE, 得到混合场积分方程需使得 $k \in (0, 1)$ 。综合前面的公式, 可以得到混合场积分方程的矩阵形式:

$$[\mathbf{Z}_{mn}][\mathbf{e}_{n,i}] = [\mathbf{V}_{m,i}], \quad i = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (18)$$

$$\mathbf{Z}_{mn} = (1-k)\mathbf{Z}_{mn}^E + k\eta\mathbf{Z}_{mn}^H \quad (19)$$

$$\mathbf{V}_{mn} = (1-k)\mathbf{V}_{mn}^E + k\eta\mathbf{V}_{mn}^H \quad (20)$$

3 入射场的设置及计算结果

用高斯脉冲平面波作为入射电场, 其定义如下:

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \frac{4}{T\sqrt{\pi}} e^{-4/T(ct - ct_0 - r \cdot \hat{\mathbf{k}})^2} \quad (21)$$

相应的入射磁场表示为

$$\mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) \quad (22)$$

本文中, $T = 4 \text{ lm}$, $t_0 = 6 \text{ lm}$ (lm 是时间单位, 其值为光在空气中传播 1 米距离所用时间), 入射场传播方向 $\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{a}}_z$, 极化方向 $\mathbf{E}_0 = \hat{\mathbf{a}}_x$, 时间步长取为 $\Delta t = 2R_{\text{min}}/c$ 。

Laguerre 函数的阶数取作 $M = 70$ 。以导体球和导体圆柱为例,给出了3种方法的计算结果比较及其单站 RCS,计算结果如图1~图6所示,建模剖分相关参数见表1。

表1 计算所用目标尺寸及建模参数

计算目标	外形尺寸	剖分面元数目	未知量数目
导体球	直径 2m	352	528
导体圆柱	直径 1m, 高 1m	352	528

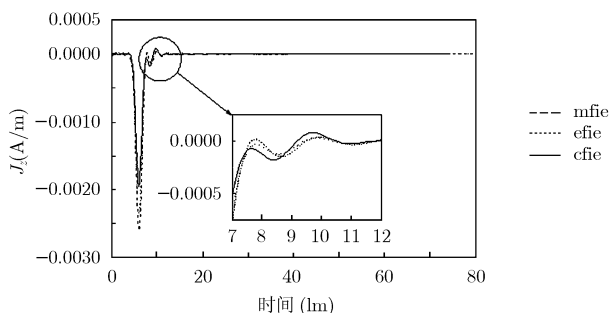


图1 球面一点(1,0,0)的电流分布

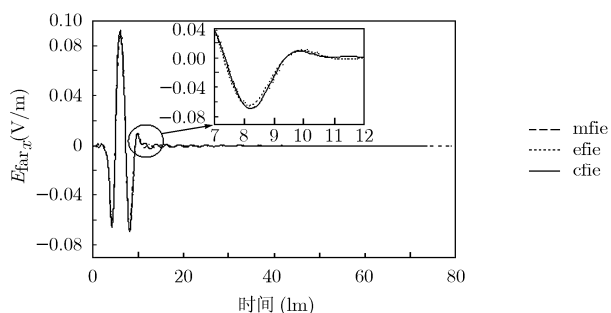


图2 导体球的后向散射场

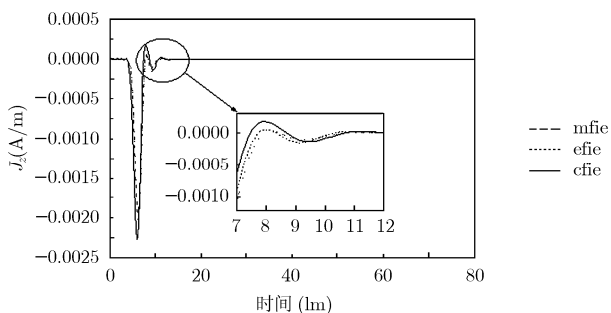


图3 柱面一点(0.5,0,0)的电流分布

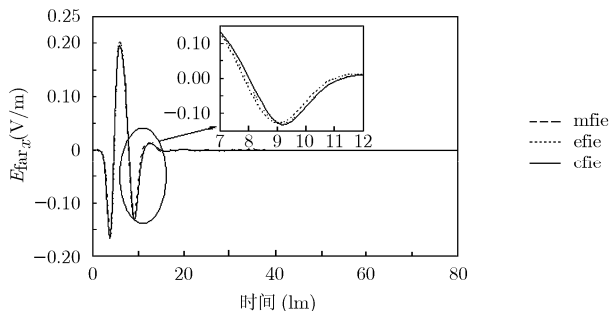


图4 导体圆柱的后向散射场

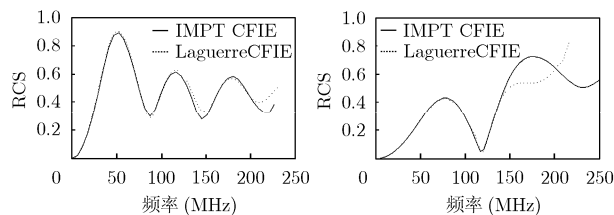


图5 导体球的单站 RCS

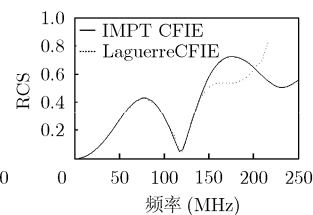


图6 导体圆柱的单站 RCS

图中,“mfie”、“efie”和“cfie”分别表示由基于 Laguerre 多项式 MOD 算法的磁场、电场及混合场积分方程计算的结果;“IMPT CFIE”和“Laguerre CFIE”分别表示由隐式 MOT 算法的 CFIE 和基于 Laguerre 多项式 MOD 算法的 CFIE 方法的计算结果。由于 MFIE 和 EFIE 求解得不到满足计算要求的稳定的精确解,故文中没有给出用这两种方法计算得到的单站 RCS。

4 结束语

从以上计算结果可以看出,基于 Laguerre 多项式的 MOD 算法中,EFIE、MFIE 和 CFIE 方法都很好地解决了时域积分方程的晚时震荡问题;3 种方法的计算结果吻合较好;CFIE 的计算结果曲线较平滑,稳定性优于其他两种方法。

由时域散射场和入射场的数据经傅立叶变换,得到了目标的单站 RCS。由图可见,在计算频段的有效部分(0~150MHz),结果吻合较好,表明算法的有效性和结果的正确性。

只需一次计算就可以得到宽频带范围内的信息,这正是时域计算方法的优势所在。本文介绍了基于 Laguerre 多项式时域 MOD 算法的 EFIE、MFIE 及 CFIE 方法,立足于解决时域积分方程的晚时震荡问题,求解了目标的单站 RCS,为快速求解宽频带电磁散射问题提供了一种思路。

参考文献

- [1] 赵延文, 聂在平, 徐健华, 等. 时域电场积分方程地稳定求解 [J]. 电波科学学报, 2004, 19(2): 148-152.
- [2] He J Q. MoM and MLFMA for Scattering from Dielectric Target in Layered-Medium Environment [D]. New York: Duke University, 2000.
- [3] Chu Y H, Chew W C, and Zhao J S, *et al.* A surface integral equation formulation for low frequency scattering from a composite object [J]. *IEEE Trans. on AP*, 2003, 51(10): 2837-2843.
- [4] Oijala P Yla and Taskinen M. Application of combined field integral equation for electromagnetic scattering by dielectric and composite objects [J]. *IEEE Trans. on AP*, 2005, 53(3): 1168-1173.
- [5] Rao S M and Wilton D R. Transient scattering by conducting surface of arbitrary shape [J]. *IEEE Trans. on AP*, 1991, 39: 56-61.

- [6] Vechinski D A and Rao S M. A stable procedure to calculate the transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape [J]. *IEEE Trans. on Antennas Propagate*, 1992, 40: 661-665.
- [7] Jung B H and Sarkar T K. Time domain electric field integral equation with central finite difference [J]. *Microwave And Optical Technology Letters*, 2001, 31: 429-435.
- [8] Jung B H and Sarkar T K. Time-domain CFIE for the analysis of transient scattering from arbitrarily shaped 3D conducting objects [J]. *Microwave And Optical Technology Letters*. 2002, 34(4): 289-296.
- [9] Jung B H, Sarkar T K, and Zhong Ji, *et al.* Time-domain analysis of conducting wire antenna and scatterers [J]. *Microwave And Optical Technology Letters*, 2003, 38(6): 433-436.
- [10] Ji Z, Sarkar T K, Jung B H, and Chung Y S. A stable solution of time domain electric field integral equation for thin-wire antennas using the laguerre polynomials[J]. *IEEE Trans. on Antennas And Propagation*, 2004, 52(10): 2641-2649.
- [11] Chung Y S, Sarkar T K, Jung B H, and Ji. Z. Solution of time domain electric field integral equation using the laguerre polynomials[J]. *IEEE Trans. on Antennas And Propagation*, 2004, 52(9): 2319-2328.
- [12] Jung B H, Chung Y S, and Sarkar T K. Time-domain EFIE, MFIE and CFIE formulations using laguerre polynomials as temporal basis functions for the analysis of transient scattering from arbitrary shaped conducting structures [J]. 2003, *PIER*, 39: 1-45.
- 柴舜连: 男, 1969年生, 副教授, 博士, 主要从事天线理论研究和计算分析以及电波传播的研究和计算工作.
- 王生水: 男, 1978年生, 博士生, 研究方向为电磁场数值计算、微波、毫米波天线的设计与分析.
- 陈忠宽: 男, 1979年生, 博士生, 研究方向为电磁场数值计算、微波、毫米波天线的设计与分析.
- 毛钧杰: 男, 1943年生, 教授、博士生导师, 电子学会高级会员, 主要从事毫米波多模复合制导理论研究、天线设计、电波传播的计算及微波教学工作.