

## 基于二次虚拟内插的圆阵接收 2D-DOA 分离估计

孙学军 张高毅 唐斌 甘泉  
(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

**摘要:** 该文将二次虚拟内插技术引入圆阵接收的 2D-DOA 分离估计中, 通过两次虚拟内插获取两虚拟内插阵列之间的移不变因子, 利用该移不变因子首先获得俯仰角的估计, 再将估计到的俯仰角代入圆阵流型中, 经一维搜索即可获得方位角的估计。该方法有效地减小了因虚拟阵列和真实阵列之间的内插误差所带来的估计误差, 仿真实验验证了该方法的有效性。

**关键词:** 信号处理; 虚拟内插; 圆阵接收; 二维到达方向; 分离估计

中图分类号: TN911.23

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)08-1890-03

## Circle Array Receiving Signal 2D-DOA Separable Estimation Based on Twice Virtual Interpolations

Sun Xue-jun Zhang Gao-yi Tang Bin Gan Quan  
(School of Electronic Engineering, UEST of China Chengdu 610054, China)

**Abstract:** In this paper, the twice virtual interpolations is introduced into the circle array receiving signal 2D-DOA separable estimation, twice virtual interpolations are used to get the rotational invariance factor, the factor is used to get the estimation of elevation angle, then the estimated elevation angle is substituted into the circle array manifold, thus the azimuth angle can be get by one dimensional search. This method reduced the estimation error because of the interpolation error between the virtual array and the real array efficiently, simulation results validate the efficiency of the method.

**Key words:** Signal processing; Virtual interpolation; Circle array receiving; 2D-DOA; Separable estimation

### 1 引言

在阵列信号处理中, 二维到达方向(2D-DOA)估计得到了广泛的研究。利用圆阵接收时, 直接利用 MUSIC 算法需要二维搜索, 实现难度大; ESPRIT 算法则无法直接用于圆阵接收的方位估计, 可通过虚拟内插技术<sup>[1-9]</sup>或高阶累积量<sup>[10, 11]</sup>实现对圆阵的扩展, 以获得旋转不变因子。虚拟内插技术是由 Friedlander 等人在文献[1-3]提出的, 其思想是将任意阵列变换成一等距均匀线阵或一系列具有相同结构的阵列。内插技术可用于宽带信号处理<sup>[2, 7]</sup>, 空间平滑<sup>[1, 5]</sup>等中, 也可扩展用于 Root-MUSIC<sup>[4]</sup>和 ESPRIT<sup>[6]</sup>算法中。基于虚拟内插实现 ESPRIT 算法可以将任意阵列变换成虚拟等距均匀线阵, 然后利用旋转不变性估计信号源方位; 也可以通过内插技术将任意阵列变换成一个与真实阵列结构完全一样, 只是有位置上的平移的虚拟阵列。利用真实阵列和虚拟阵列之间的旋转不变性即可实现信号的 DOA 估计<sup>[6]</sup>。这种方法会由于真实阵列与虚拟阵列之间的内插误差而导致估计性能恶化。本文提出一种基于二次虚拟内插的 2D-DOA 分离估计方法, 利用两虚拟内插阵之间的移不变性获取俯仰角, 减小因为虚拟内插带来的误差。再将得到的俯仰角代入

真实圆阵阵列流型中, 经一维搜索即可获得方位角的估计。仿真验证了算法的有效性。

### 2 信号模型

假设  $M$  元均匀圆阵列的接收  $q$  个窄带信号, 其接收信号矢量为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (1)$$

其中矩阵  $\mathbf{A}$  代表与信号到达角和阵列结构有关的  $M \times q$  维方向矩阵,  $\mathbf{S}(t)$  是  $q \times 1$  维信号向量,  $\mathbf{N}(t)$  为  $M \times 1$  维噪声向量。

$$\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T \quad (2)$$

$$\mathbf{A}(\vartheta, \varphi) = [a(\vartheta_1, \varphi_1), a(\vartheta_2, \varphi_2), \dots, a(\vartheta_q, \varphi_q)] \quad (3)$$

$$\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_q(t)]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{N}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T \quad (5)$$

常规基于特征结构高分辨率处理算法, 都将存在耗时巨大的二维空间搜索。下面借鉴虚拟内插的思路, 提出一种 2D-DOA 分离估计方法。

### 3 算法原理

虚拟内插变换将空间进行区域划分, 求出区域内的方向矢量, 找出原阵列方向矢量和虚拟阵列方向矢量的变换关系。

假设信号位于区域 $\Theta$ , 将其均分为 $P$ 个锥形区域

$$\Theta = [\theta_l \quad \theta_l + \Delta\theta \quad \theta_l + 2\Delta\theta \quad \cdots \quad \theta_r - \Delta\theta \quad \theta_r] \quad (6)$$

其中 $\theta_l$ 和 $\theta_r$ 为 $\Theta$ 左右边界,  $\Delta\theta$ 为步长。这样, 真实阵列的方向矩阵为

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_l) \quad \mathbf{a}(\theta_l + \Delta\theta) \quad \mathbf{a}(\theta_l + 2\Delta\theta) \quad \cdots \quad \mathbf{a}(\theta_r)] \quad (7)$$

同一区域内, 虚拟阵列方向矩阵为

$$\bar{\mathbf{A}} = [\bar{\mathbf{a}}(\theta_l) \quad \bar{\mathbf{a}}(\theta_l + \Delta\theta) \quad \bar{\mathbf{a}}(\theta_l + 2\Delta\theta) \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{a}}(\theta_r)] \quad (8)$$

假设真实阵列的方向矩阵 $\mathbf{A}$ 与虚拟阵列的方向矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 间存在一个线性变换 $\mathbf{B}_k$ , 使得

$$\mathbf{B}_k^H \mathbf{A}(\theta) = \bar{\mathbf{A}}(\theta) \quad (9)$$

为了求得虚拟内插变换矩阵 $\mathbf{B}_k$ , 可计算 $\text{Min}\{\|\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{B}_k^H \mathbf{A}\|_F\}$ 。

在实际处理中,  $\mathbf{B}_k$ 的求解方法、扇区大小和扇区位置选取不恰当都会导致内插误差过大, 使测向失败。

### 3.1 $\mathbf{B}_k$ 的求解方法

一种直接的方法是采用正则方程求解可得

$$\mathbf{B}_k = (\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1} \mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}^H \quad (10)$$

这种方法将产生较大的误差。

在实际应用中常采用奇异值分解的方法, 对 $\mathbf{A}$ 进行奇异值分解

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}[\Sigma, 0][\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2]^H \quad (11)$$

其中 $\mathbf{U} \in C^{M \times M}$ ,  $\Sigma \in C^{M \times M}$ ,  $\mathbf{V}_1 \in P \times M$ ,  $\mathbf{V}_2 \in C^{P \times (P-M)}$ 。这时

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{U}\Sigma^{-1}\mathbf{V}_1^H\bar{\mathbf{A}}^H \quad (12)$$

这种方法比直接的最小二乘法更稳定, 在运算中传递误差较小, 能更好地逼近虚拟方向向量矩阵。

### 3.2 内插方法

根据上述思路, 将圆阵虚拟内插变换为另两个阵列, 这两个虚拟阵列与圆阵结构完全一样, 不同的是虚拟阵列相对真实阵列有一定位移, 设为 $d$ , 如图1所示。可见, 虚拟阵列与原始阵列具有ESPRIT算法结构。

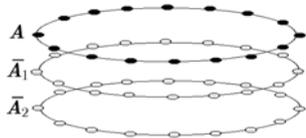


图1 虚拟阵列示意图

设圆阵 $\mathbf{A}$ 各阵元位置为 $(x_k, y_k, 0)$  ( $k = 1, 2, \dots, M$ ), 圆阵 $\bar{\mathbf{A}}_1$ 各阵元位置为 $(x_k, y_k, -d)$  ( $k = 1, 2, \dots, M$ ), 圆阵 $\bar{\mathbf{A}}_2$ 各阵元位置为 $(x_k, y_k, -2d)$  ( $k = 1, 2, \dots, M$ ), 则有

$$\mathbf{a}(\vartheta, \varphi) = e^{-j2\pi(x_k \cos \vartheta \cos \varphi + y_k \sin \vartheta \cos \varphi) / \lambda} \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_1(\vartheta, \varphi) = e^{-j2\pi(x_k \cos \vartheta \cos \varphi + y_k \sin \vartheta \cos \varphi - d \sin \varphi) / \lambda} \quad (14)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_2(\vartheta, \varphi) = e^{-j2\pi(x_k \cos \vartheta \cos \varphi + y_k \sin \vartheta \cos \varphi - 2d \sin \varphi) / \lambda} \quad (15)$$

这样, 可用ESPRIT算法先获得俯仰角的估计, 然后再代入MUSIC算法后, 再经一维搜索即可获得方位角的估计, 这样估计得到的俯仰角与方位角可自动配对。

### 3.3 SVIA(单次虚拟内插算法)-ESPRIT算法

首先获得真实阵列协方差矩阵 $\mathbf{R}_{xx} = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)]$ 的估计, 用 $\hat{\mathbf{R}}_{xx}$ 表示;

其次, 对 $\hat{\mathbf{R}}_{xx}$ 做奇异值分解, 利用MDL准则估计信号源个数;

然后, 取出信号空间 $\mathbf{E}_x$ , 利用 $\mathbf{B}_k$ 求出虚拟阵列接收信号空间 $\mathbf{E}_y = \mathbf{B}_k \mathbf{E}_x$ ;

这样即可利用真实阵列和虚拟阵列接收信号的移不变特性, 对 $(\mathbf{E}_x^H \mathbf{E}_x)^{-1} \mathbf{E}_x^H \mathbf{E}_y$ 做特征值分解, 求出其特征值为 $\hat{\varphi}_i, i = 1, \dots, q$ ;

于是, 俯仰角可通过下式求得

$$\hat{\varphi} = \arcsin(\lambda_i \text{angle}(\hat{\varphi}_i) / 2\pi d) \quad (16)$$

### 3.4 TVIA(两次虚拟内插算法)-ESPRIT算法

首先获得真实阵列协方差矩阵 $\mathbf{R}_{xx} = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)]$ 的估计, 用 $\hat{\mathbf{R}}_{xx}$ 表示;

其次, 对 $\hat{\mathbf{R}}_{xx}$ 做奇异值分解, 利用MDL准则估计信号源个数;

利用二次内插分别获得虚拟阵列 $\bar{\mathbf{A}}_1$ 和 $\bar{\mathbf{A}}_2$ 的阵列接收信号, 然后利用两虚拟阵列接收信号之间的移不变特性, 用ESPRIT求解俯仰角。

基于二次虚拟内插的圆阵接收2D-DOA分离估计算法具体流程如下:

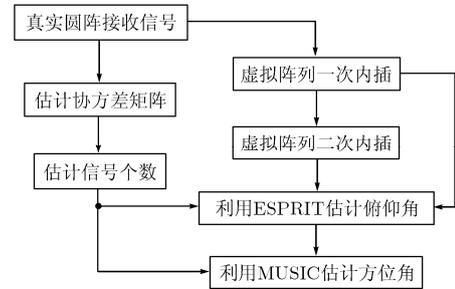


图2 算法流程图

## 4 算法性能分析

### 4.1 误差分析

内插误差可能造成真实阵列与虚拟阵列之间的移不变性也有较大误差, 二次内插出来的两个虚拟阵列之间均有相应的内插过程, 可以有效抵消部分因为内插带来的误差。

单次内插的变换误差为

$$\text{ev1} = \frac{\|\mathbf{B}_k^H \mathbf{A}(\theta) - \bar{\mathbf{A}}_1(\theta)\|_F}{\|\bar{\mathbf{A}}_1(\theta)\|_F} \quad (17)$$

二次内插的变换误差为

$$\text{ev2} = \frac{\|\mathbf{B}_k^H \mathbf{A}(\theta) - \bar{\mathbf{A}}_2(\theta)\|_F}{\|\bar{\mathbf{A}}_2(\theta)\|_F} \quad (18)$$

单次内插与二次内插之间的误差为

$$\frac{ev2}{ev1} = \frac{\|B_k^H A(\theta) - \bar{A}_2(\theta)\|_F}{\|\bar{A}_2(\theta)\|_F} \frac{\|\bar{A}_1(\theta)\|_F}{\|B_k^H A(\theta) - \bar{A}_1(\theta)\|_F} \quad (19)$$

容易证明当  $ev1 > 1$ ,  $ev2 > 1$  时,  $ev2/ev1 < ev1$ 。因此, 当变换误差较大时, 利用单次内插与二次内插之间的移不变性可有效地减小因变换带来的误差。

#### 4.2 算法复杂度分析

一般情况下, 阵列接收到的快拍数  $N$  远大于阵元数  $M$ 。估计采样协方差矩阵需要的计算量约  $M^2 N$ , 对一个  $M \times M$  维的矩阵做特征值分解的计算量约为  $O(M^3)$ 。二维 ESPRIT 算法所需计算量约为  $(3M^2 N + O(M^3))$ ; 如果利用二维 MUSIC 算法需要在一个精密的二维网格  $(K_1 \times K_2)$  ( $K_1 \gg M$ ,  $K_2 \gg M$ ) 内进行搜索, 其计算量约为  $((2M)^2 N + (2M)^2 \cdot (K_1 K_2) + O(2M)^3)$ 。本文提出的方法利用一维 ESPRIT 和需要一维 MUSIC 在一个精密的一维范围搜索方位角, 其所需的计算量约为  $(3M^2 N + (2M)^2 (K_1) + O(2M)^3)$ ,  $K_1 \gg M$ 。为了获得精度较高的变换矩阵, 计算变换矩阵所需的计算量也较大, 但这是一个离线计算的过程, 在实际系统中可忽略。可见本算法复杂度介于二维 ESPRIT 算法和二维 MUSIC 算法之间。与二维 MUSIC 算法相比, 本文的方法计算量小很多。

#### 5 仿真实验

实验条件: 仿真中, 设信号到达方位角  $60^\circ$ , 俯仰角  $25^\circ$ , 俯仰角扇区大小  $30^\circ$ , 扇区位置为  $0 - 30^\circ$ 。步长为  $1^\circ$ 。快拍数为 1024。

阵列内插中只考虑俯仰角, 单虚拟阵和双虚拟阵俯仰角和方位角估计精度如图 3 所示。

从图 3 可见, 这两种内插方法均可有效估计俯仰角, 在获得俯仰角的基础上, 代入二维阵列流型中, 二维搜索问题则简化为一维问题, 方位角可利用 MUSIC 算法获得。由图 3 可见采用二次内插比单次内插的估计精度高。

#### 6 结束语

本文基于虚拟内插思想, 研究了圆阵接收的 2D-DOA 分离估计方法。首先通过对圆阵的虚拟内插, 获得两个与真实圆阵结构一样的虚拟圆阵, 两圆阵与真实圆阵之间有相对位移, 即沿  $z$  方向的位移。这样可通过两虚拟阵列之间的移不

变性先估计俯仰角, 将其代入真实圆阵流型中, 则可以通过一维搜索即可获得方位角的估计。仿真试验验证了方法的有效性。

#### 参考文献

- [1] Friedlander B and Weiss A J. Performance analysis of spatial smoothing with interpolated arrays. ICASSP'91. Toronto. ONT., Canada, 1991, 4: 1377-1380.
- [2] Friedlander B and Weiss A J. Performance analysis of wideband direction finding using interpolated arrays. ICASSP'92, San Francisco, CA, USA, 1992. 3: 457-460.
- [3] Friedlander B. Direction finding using spatial smoothing with interpolated arrays. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 1992, 28(2): 574-587.
- [4] Friedlander B. The root-MUSIC algorithm for direction finding with interpolated arrays. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1993, 41(1): 15-25.
- [5] Weiss A J and Friedlander B. Performance analysis of spatial smoothing with interpolated arrays. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1993, 41(4): 1881-1892.
- [6] Weiss A J and Gavish M. Direction finding using ESPRIT with interpolated arrays. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1991, 39(6): 1473-1478.
- [7] Hyberg P, Jansson M, and Ottersten B. Array interpolation and bias reduction. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2004, 52(10): 2711-2720.
- [8] Hyberg P, Jansson M, and Ottersten B. Array interpolation and DOA MSE reduction. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2005, 53(12): 4464-4471.
- [9] 李平安, 孙进才, 俞卞章. 基于插值圆阵的宽带信号二维空间谱估计. 电子科学学刊, 1996, 18(4): 344-348.  
Li Ping-an, Sun Jin-cai, and Yu Bian-zhang. Two-dimensional spatial-spectrum estimation for wide-band sources based on interpolated circular arrays. *Journal of Electronics*, 1996, 18(4): 344-348.
- [10] 唐斌, 肖先赐. 圆阵列接收的信号二维到达方向分离估计. 通信学报, 1999, 20(增刊): 279-283.  
Tang Bin and Xiao Xian-ci. Separable estimation method for 2-D direction of arrival of signal received by circular array. *Journal on Communications*, 1999, 20(Supplement): 279-283.
- [11] 王鼎, 吴瑛. 基于均匀圆阵的二维 ESPRIT 算法研究. 通信学报, 2006, 27(9): 89-95.  
Wang Ding and Wu Ying. 2-D ESPRIT algorithm research based on uniform circular array. *Journals on Communications*, 2006, 27(9): 89-95.

- 孙学军: 男, 1976 年生, 博士生, 现从事阵列信号处理和参数估计技术研究。  
张高毅: 男, 1983 年生, 博士生, 现从事超视距阵列接收信号多参数估计技术研究。  
唐斌: 男, 1965 年生, 博士后, 教授, 博士生导师, 长期从事电子对抗系统与技术、雷达抗干扰技术和新一代移动通信系统与技术研究。  
甘泉: 男, 1977 年生, 博士后, 一直从事阵列测向技术与实现研究。

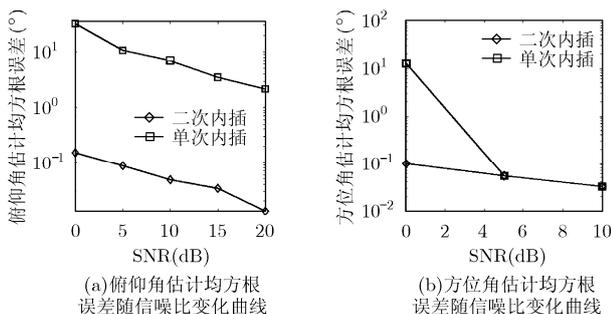


图3 估计精度比较