

# 基于模糊物元模型上的AHP在水质评价中的应用

李文果 孙雪林 孙森林 (沈阳农业大学水利学院, 辽宁沈阳110161)

**摘要** 将影响水环境的主要水质评价指标组成模糊物元, 运用层次分析方法, 对所有参数采用两两成对比较, 确定了各评价指标的权系数。通过实例验证了该分析方法利用尽可能多的信息来提高结论的一致性, 较合理地解决了评定指标的模糊性和不相容性。

**关键词** 模糊物元; 层次分析; 水质参数

中图分类号 O159 文献标识码 A 文章编号 0517-6611(2006)17-4367-02

## Application of AHP Based on Fuzzy Matter-element in the Evaluation of Water Quality

LI Wenguo et al (Shenyang Agricultural University, Shenyang, Liaoning 110161)

**Abstract** In this article, a fuzzy matter-element was constructed for water quality evaluation. On the basis, all parameters from two groups were compared in pairs with the method of AHP and the right coefficient of the evaluation index was determined. The result showed that this analytical process can make use of as much information as possible to enhance the uniformity of result. The fuzziness and incompatibility evaluation index were solved equitably.

**Key words** Fuzzy matter-element; Analytical hierarchy process; Water quality parameter

水环境污染系统是比较复杂的动态系统, 影响水质的参数很多, 且参数与环境之间的某些机理尚不十分清楚, 加之人们在制定水质污染等级标准, 污染状况分级及水质评价等客观上又存在着模糊性和不相容性, 故在水质评价时难免遗漏了一些因素, 有时可能是很重要的因素。模糊物元以解决不相容问题为核心, 适用于多因子评价问题。传统的模糊综合评判权值分配, 常常由专家来确定, 因而往往带有较大的主观性。采用美国匹斯堡大学T.L.Saaty教授提出AHP方法, 在给定准则下, 通过两两比较的特征根法, 利用了可能多的信息, 提高结果的一致性, 使评价结果更加客观、合理。

### 1 模糊物元模型

**1.1 模糊物元** 某一区域  $N$ , 它关于特征  $C$  的量值为  $V$ , 就组成了一个描述这个区域和事物的基本元, 即  $R = (N, C, V)$  简称物元。如果基中值具有模糊性, 便称为模糊物元。设  $m$  个事物的  $n$  维物元组合在一起, 便构成  $m$  个事物  $n$  维模糊物元, 记作  $R_{mn}$ 。

$$R_{mn} = \begin{matrix} & M_1 & \dots & M_m \\ \begin{matrix} C_1 \\ \dots \\ C_n \end{matrix} & \begin{matrix} X_{11} \\ \dots \\ X_{1n} \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} X_{m1} \\ \dots \\ X_{mn} \end{matrix} \end{matrix} \quad (1)$$

$$R_{mn}^* = \begin{matrix} & M_1 & \dots & M_m \\ \begin{matrix} C_1 \\ \dots \\ C_n \end{matrix} & \begin{matrix} u_{11} \\ \dots \\ u_{1n} \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} u_{m1} \\ \dots \\ u_{mn} \end{matrix} \end{matrix} \quad (2)$$

式中:  $R_{mn}$  为  $m$  个事物  $n$  维复合物元;  $M_i$  为第  $i$  个事物 ( $i = 1, \dots, n$ );  $C_k$  为第  $k$  项特征 ( $k = 1, 2, \dots, m$ );  $X_{ik}$  为第  $i$  个事物第  $k$  项特征对应的量值。

**1.2 从优隶属度原则** 各单项评价指标相应的模糊量值, 从属于标准方案各对应评价指标相应的模糊量值隶属程度, 称为从优隶属度。由此建立的原则, 通常有2种类型指标:

越大越优型:

$$u_{ik} = X_{ik} / \max X_{ik} \quad (2)$$

越小越优型:

$$u_{ik} = \min X_{ik} / X_{ik} \quad (3)$$

式中:  $u_{ik}$  为第  $i$  个事物第  $k$  项特征对应的模糊量值 ( $i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$ );  $X_{ik}$  为第  $i$  个事物第  $k$  项特征对应的量值 ( $i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$ );  $\max X_{ik}, \min X_{ik}$  分别表示事物中每一项特征所有量值  $X_{ik}$  中的最大值、最小值。

**1.3 平方复合物元** 根据从优隶属度确定原则, 求出各项的模糊量值, 以  $u_{ik}$  ( $i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$ ) 表示。越小越优型采用:

$$u_{ik} = (u_{ik} - 1)^2 \quad (4)$$

越大越优型采用:

$$u_{ik} = (1 - u_{ik})^2 \quad (5)$$

组成模糊物元矩阵, 即  $R$ :

$$R = \begin{matrix} & M_1 & \dots & M_m \\ \begin{matrix} C_1 \\ \dots \\ C_n \end{matrix} & \begin{matrix} u_{11} \\ \dots \\ u_{1n} \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} u_{m1} \\ \dots \\ u_{mn} \end{matrix} \end{matrix} \quad (6)$$

### 2 AHP法确定评价指标权系数

AHP方法是对某些事物的相对重要性作出判断, 使对这些事物所作出的判断能够得到定量的解释。

**2.1 判断矩阵** AHP的关键部分是, 在给定的标准下, 对  $n$  个事物两两比较, 得到判断矩阵  $A = (a_{ij}) (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 。其中:

$$a_{ij} > 0; a_{ij} = 1/a_{ji} \quad (7)$$

由评判因素  $C_1, \dots, C_n$  表示一组事物, 对所有成对事物  $C_i, C_j$  的定量化判断组成一个  $n$  阶方阵即:

$$A = (a_{ij}) (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

对判断进行定量化标度规定为:  $i$  与  $j$  相比, 有同等的重要性, 则用1标度;  $i$  比  $j$  稍微重要, 则用3标度;  $i$  比  $j$  明显重要, 则用5标度;  $i$  比  $j$  强烈重要, 则用7标度;  $i$  比  $j$  极端重要, 则用9标度; 介于上述相邻两个判断之间, 可用2、4、6、8标度。由此导出排序向量:

$$A = \begin{matrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \dots & 1 \end{matrix} \quad (8)$$

作者简介 李文果(1953-), 女, 辽宁沈阳人, 副教授, 从事水力学及环境水力学研究。

收稿日期 2006-03-22

**2.2 一致性检验** 根据判断矩阵可求出矩阵的特征向量和最大特征根,前者给出了排序的依据(即权系数  $\lambda_j$ ),后者是关于判断一致性的测度。一致性表达了这样一个事实,决策者在对  $n$  个逐次比较时,所采用的尺度是一致的。

**2.2.1 最大特征根( $\lambda_{max}$ )**。对判断矩阵进行规范化处理后,运用矩阵与向量之间的乘法法则,求出最大特征根,  $\lambda_{max}$  的值越是接近  $n$ (判断矩阵的阶数),判断矩阵的一致性就越好。

**2.2.2 一致性指标**。由于诸多问题具有模糊性及人的认识偏差,因此所给出的判断矩阵很难满足一致性,为此 Saaty 针对特征根法,提出了一致性检验的方法:

$$C.I. = (\lambda_{max} - n) / (n - 1) \quad (9)$$

称为一致性指标。判断矩阵的一致性指标 C.I. 与同阶平均随机一致性指标 R.I. 之比称为随机一致性比率,记作 C.R.。通过对判断矩阵的一致性与随机构造矩阵的一致性进行比较来估计判断偏离一致性程度,当

$$C.R. = C.I. / R.I. < 0.1 \quad (10)$$

即认为判断矩阵具有满意的一致性。

表1 1995年参窝水库水质监测结果 ng/L

	悬浮物( $X_1$ )	TP( $X_2$ )	总硬度( $X_3$ )	DO( $X_4$ )	NO <sub>2</sub> -N( $X_5$ )	COD( $X_6$ )	BOD( $X_7$ )	大肠杆菌( $X_8$ )
坝前 $C_1$	1.43	0.05	70.73	6.23	0.053	2.76	0.94	10
库中心 $C_2$	10.8	0.11	72.98	6.60	0.670	3.11	1.1	300
兰家崴子 $C_3$	1.0	0.07	72.98	6.08	0.043	2.96	2.4	40
兰河 $C_4$	1.0	0.17	71.85	7.70	0.101	2.95	2.6	180
细河 $C_5$	1.1	0.07	74.10	8.20	0.188	2.97	3.1	120
胡巴什 $C_6$	2.5	0.07	80.30	5.60	0.274	3.19	3.35	140

**3.2 从优隶属度** 悬浮物、TP、总硬度、NO<sub>2</sub>-N、COD、BOD、大肠杆菌为越小越好,采用(3)式;DO为越大越好型,采用(2)式。处理后的模糊物元即 R。

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$
$Y_1$	0.699	1	1	0.76	0.81	1	1	1
$Y_2$	0.093	0.455	0.97	0.80	0.64	0.89	0.85	0.033
$Y_3$	1	0.714	0.97	0.74	1	0.93	0.39	0.25
$Y_4$	1	0.294	0.98	0.94	0.43	0.94	0.36	0.056
$Y_5$	0.919	0.714	0.96	1	0.23	0.93	0.30	0.083
$Y_6$	0.40	0.714	0.88	0.68	0.16	0.87	0.28	0.071

**3.3 差平方模糊物元** 根据(4)、(5)式,建立差平方模糊物元。

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$
$Y_1$	0.09	0	0	0.058	0.036	0	0	0
$Y_2$	0.82	0.298	0.001	0.038	0.128	0.013	0.021	0.93
$Y_3$	0	0.082	0.001	0.067	0	0.005	0.37	0.56
$Y_4$	0	0.498	0.0002	0.0037	0.33	0.004	0.408	0.89
$Y_5$	0.008	0.082	0.002	0	0.595	0.005	0.485	0.84
$Y_6$	0.36	0.082	0.014	0.1	0.71	0.018	0.518	0.86

**3.4 判断矩阵** 运用 AHP 方法,对评价指标两两比较重要性,得出判断矩阵 A。

**3.5 一致性检验** 判断矩阵的最大特征根  $\lambda_{max} = 8.24$ ,一致性指标 C.I. = 0.0343,平均随机一致性指标 R.I. = 1.41,随机一致性比率 C.R. = 0.0243 < 0.1,其结果满足一致性要求。权系数  $\lambda_j = (0.333, 0.032, 0.232, 0.159, 0.047, 0.107,$

**2.2.3 评判排序分析**。满足一致性要求就意味着在  $a_{ij}$  给定条件下权值是一个稳定解。

$$\lambda_j = \frac{1}{\max_j a_{ij}} \quad (11)$$

$$\lambda_j = 1 \quad (12)$$

模糊物元综合评价结果,采用 M(\*,+) 模式,即先乘后加运算。

$$P_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \lambda_{ik} \quad (13)$$

式中:  $\lambda_i$  为第  $i$  项特征的权重值;  $\lambda_{ik}$  为第  $i$  个事物第  $k$  项模糊量值。

**3 应用举例**

以辽宁省参窝水库水质评价为例,说明建立在模糊物元模型上的 AHP 方法的应用。数据来源于 1995 年水质监测表,共取 6 个流域断面的平水年水质监测数据。评价指标为 E = (悬浮物,TP,总硬度,DO,NO<sub>2</sub>-N,COD,BOD,大肠杆菌)。

**3.1 平水年监测值** 根据表 1,建立由 8 项评价指标组成的物元模型。

0.071,0.023)。

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$
$X_1$	1	7	2	3	6	4	5	8
$X_2$	0.147	1	0.167	0.2	0.5	0.25	0.333	2
$X_3$	0.5	6	1	2	5	3	4	7
$X_4$	0.333	5	0.5	1	4	2	3	6
$X_5$	0.167	2	0.2	0.25	1	0.333	0.5	3
$X_6$	0.25	4	0.333	0.5	3	1	2	5
$X_7$	0.2	3	0.25	0.333	2	0.5	1	4
$X_8$	0.125	0.5	0.143	0.167	0.333	0.2	0.25	1

**3.6 评价结果** 根据(11)式,求出  $P_k = (0.0409, 0.319, 0.053, 0.082, 0.088, 0.234)$ 。6 个水域水质由好到差的综合评价排序为  $C_2, C_6, C_5, C_4, C_3, C_1$ ,该结果与实际情况吻合较好。

这种评价方法的科学性在于它在评价指标模糊分析的基础上建立了一种两两比较的有效标度,由于每个指标都依次用其他的指标进行过比较,因而得到了更多的资料,使评价结果客观合理,为准确预报和合理利用水域的环境提供了较可靠的依据。

参考文献

[1] 萨蒂 T.L. 层次分析法 M. 北京:煤炭工业出版社,1986.  
 [2] 张斌. 模糊物元分析 M. 北京:石油工业出版社,1997:3-20.  
 [3] 赫仲雄. 模糊数学及其应用 M. 天津:天津科学技术出版社,1982.  
 [4] 潘峰,梁川,王志良,等. 模糊物元在区域水资源可持续利用综合评价中的应用 J. 水科学进展,2003(5):271-272.  
 [5] 汪培文. 模糊集合论及其应用 M. 上海:上海科技出版社,1983.  
 [6] 李文果. 模糊评价阜新县地下水开采利用现状 J. 沈阳农业大学学报,1999,30(2):160-162.  
 [7] 许树柏. 层次分析原理 M. 天津:天津大学出版社,1988:6-12,41-56.