

张赤军,边少锋,高金耀,郝晓光,周旭华,方剑. 精化大地水准面的一种间接方法——力异常及其梯度在其中的应用. 地球物理学进展, 2009, 24(1): 75~81

Zhang C J, Bian S F, Gao J Y, Hao X G, Zhou X H, Fang J. An indirect method for refining geoid—And on application of gravity anomalier and gravity vertical gradient. *Progress in Geophys.* (in Chinese), 2009, 24(1): 75~81

精化大地水准面的一种间接方法 ——异常及其梯度在其中的应用

张赤军¹, 边少锋², 高金耀³, 郝晓光¹, 周旭华¹, 方 剑¹

(1. 中国科学院测量与地球物理研究所, 武汉 430077; 2. 海军工程大学, 武汉 430033;

3. 国家海洋局第二海洋研究所, 杭州 31012)

摘 要 随着 GPS/水准及全球重力测量的加密和扩展, 获取高精度的似大地水准面或高程异常(ζ)已比较容易, 如何进一步研究它和大地水准面或大地水准面高(N)之间的关系(即所谓间接的方法)使大地水准面得到精化, 这就是本文的目的. 文中对已推导的公式在模型作了验证, 对如何利用地形等数据确定扰动重力垂直梯度也作了研究. 结果表明: 在海拔 4000 m 的高山地区, 当似大地水准面的精度达到 cm 级时, 大地水准面的精度也与之比较接近.

关键词 大地水准面, 似大地水准面, 精化, 扰动重力垂直梯度, 间接法

中图分类号 P312 **文献标识码** A **文章编号** 1004-2903(2009)01-0075-07

An indirect method for refining geoid——and on application of gravity anomalier and gravity vertical gradient

ZHANG Chi-jun¹, BIAN Shao-feng², GAO Jin-yao³, HAO Xio-Guang¹,
ZHOU Xu-hua¹, FANG Jian¹

(1. *Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy Sciences, Wuhan 430077, China*; 2. *Naval engineering University, Wuhan 430033, China*; 3. *The second Institute of Oceanography, SOA, Hangzhou, 31012, China*)

Abstract In the wake of GPS /leveling and gravimetry have been densified and extended, to gaind the height anomaly (ζ) is relatively easy, so that it is the aim in this paper how to deduce the refined conversion from height anomalies to geoid undulations (N) and discuss the model tests of ($N - \zeta$) formula. Determination of the vertical gradient of disturbed grarity is also made with topographic data. It shows that when the quasigeoid reaches cm leveling precision in mountain areas of elevation 4000 meters, the geoid also approximates high precision.

Keywords geoid, quasigeoid, refinement, disturbing gravity, vertical gradient, indirect method

0 引 言

我国的郭守敬早在 1276 年的水利测量中就注意到以海平面作为高程基准面的问题. 到了 18 世纪, 在法国的大地测量工作中, 这一基准面或辅助面也得到了应用, 将海潮最高水面和最低水位的平均值称为绝对海平面, 他还指出有必要将大地网投影

到向大陆延伸的静止的海平面上. 在德国, 继 Gauss 和 Bessel 的大地测量工作之后, Lichtenstein 于 1872 年首次将上述基准面称之为大地水准面^[1]. 实际上在此之前的 1849 年, 英国的 Stokes 发表了研究地球形状的论文, 该形状就是大地水准面的形状. 为使大地水准面之外不存在质量, 许多大地测量学家对此作出了不懈努力, 其中以 Helmert 提出的凝

聚法的工作为佳,但该法在高海拔地区,误差仍是很大的^[2],不过近期类似于这一方法的研究仍受到一些人的重视.值得一提的是,在1945~1960年期间,前苏的 Molodensky 避开了大地水准面外不应存在质量的缺点,提出了研究似大地水准面与真实地球形状的理论^[3~5],该理论的出现具有划时代的意义.在此后又得到了应用和发展,但所得的只是似大地水准面,而 GPS 水准的也同样可以求取似大地水准面.现今由于卫星测高、海上、空中重力测量、全球定位系统(GPS)等手段已成功应用,而卫星重力梯度仪等空间手段即将实现,如此可使大地测量边值问题的研究在不断向前发展,也使大地水准面和似大地水准面的研究继续引向深入.由于大地水准面具有明显的物理意义和广泛的应用价值,因此研究和精化大地水准面仍很重要.鉴于现今世界上绝大多数国家仍然是在莫氏理论框架基础上求取似大地水准高,而在由 ζ 转换为 N 中,均未顾及高程二次项的影响,在山区该项将可能超过 10 cm,因此在那里要求精度达到 cm 级的大地水准面是不可能的.

由于大地水准面与似大地水准面之间存在着一定的内在联系,例如它们都是位理论第三边值问题的解,而 Stokes 解就是 Molodensky 解的零级近似.为了进一步揭示它们之间的差异与联系,近年来 Sjöberg(1995)^[6]和边少锋等^[7]先后采用不同方法,推导了顾及高程二次项($N-\zeta$)公式,这比文献(2)和(8)提供并为当前一些作者所应用的近似公式要精确得多.此外, Sjöberg(2006)^[9],和 Tenzer^[10]等又推出了与上不同的公式,但将它们用于实践仍待研究,为此我们在已文献(7)的基础上做了进一步研究.在文献(6)和(7)中,前者的二次项用的地面点的混合得力异常的垂直梯度,后者用的是纯重办异常(扰动重力)的垂直梯度,其优点不仅方便可求,而且公式中不存在三阶以上的高次项,尽管略去高次项后,二者在数值上相差甚小.以上正是用间接法由 ζ 求取 N 的理论依据.张赤军等还利用上述中的公式确定了珠峰的大地水准面和正高^[11].可以认为,随着地形测量和大陆地质地球物理勘探的广泛开展,以及 GPS、ISAR(合成孔径雷达)、航空、航天雷达(Shuttle Radar)^[12]等技术的应用,由 ζ 求取 N 的方法(包含高程二次项改正)将会进一步得到重视和运用.

为了进一步检核边等推导公式的正确性,本文又在文献(13)的基础上进行一些计算和分析.

1 用间接法确定大地水准面的意义及其优点

到目前为止,以研究大地水准面形状为主要内容的物理大地测量学经久不衰的原因,在于它不仅在建高程基准中不可缺少,而且它与地球物理空间科学等紧密相联.自 Stokes 理论为研究大地水准面奠定了基础之后,许多学者对其前提即扰动位 T 为大地水准面上的谐函数,(它包含着在大地水准面之外没有质量)作了许多研究,其中贡献最为突出的是莫洛斯基对似大地水准面的研究,而边界值是地球表面上的重力异常.近年来人们称用 Stokes 公式直接求取大地水准面的方法为直接法,其优点是直观明显,但对多余质量的直接与间接影响的处理仍然比较复杂,在处理中的有关公式也有待进一步研究和实践,至于所求的精度尚需讨论.而由似大地水准面推求大地水准面的方法称为间接法.由于大地水准面在地球科学中是具有物理意义和几何意义的一个基准面,它在人类生活和建设中,特别是在高程的测定中起着很重要的作用.当今天在用直接法确定大地水准面的效果不够好^[14]、而用间接法较为理想的情况下,进一步挖掘其潜力很有意义,加之它不需要对大地水准面以外的质量进行处理,只需在地球表面测量重力的基础上加测垂直梯度,当然也可用别的方法(充分利用地形数据)来取代^[15].而重力垂直梯度在物理大地测量中可得到进一步的应用^[16].

2 间接法的基本原理及相应公式

本文的目的是求出高精度的大地水准面,但为方便起见,在公式的叙述中仍采用了($N-\zeta$)形式.由文献(6)可知,正高(H_0)及正常高(H_n)有如下关系:

$$N - \zeta = H_n - H_0 = H_0(\bar{g} - \bar{\gamma})/\bar{\gamma}, \quad (1)$$

由于正常重力(γ)是一解析函数,故其平均值 $\bar{\gamma}$ 可由公式易于计算出来.而重力平均值(\bar{g})的计算比较复杂,根据一些岩石密度的实际样品及地形资料亦可以相当高精度推求,这时大地水准面与似大地水准面的偏差就能很好地取得.

由于

$$g_p = \gamma_p + g_p - \gamma_p = \gamma_p + \delta g_p, \quad (2)$$

如此在地面以上的空间 P 点(忽略大气影响或视之为无质量)有的重力垂直梯度 $\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)$

$$\frac{\partial g}{\partial h} \Big|_{+p} = \frac{\partial \gamma}{\partial h} \Big|_p + \frac{\partial \delta g}{\partial h} \Big|_p, \quad (3)$$

式中右端两项分别为正常重力,扰动重力垂直梯度

(以 $1 \times 10^{-9} \text{ s}^{-2}$ 为单位):至于在地面以下时,由于地形质量的影响,在经过界面有一与质量有关的突变.

$$\left. \frac{\partial g}{\partial h} \right|_{-p} = \left. \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right|_p + \left. \frac{\partial \delta g}{\partial h} \right|_p + 4\pi G\rho, \quad (4)$$

式中, G 为牛顿引力常数, ρ 为地壳密度,一般可取为 $\rho = 2670 \text{ kg/m}^3$; $+p$ 表示相应导数从空间向地面求取; $-p$ 表示相应的导数从地形内部向地面求取(见图 1).

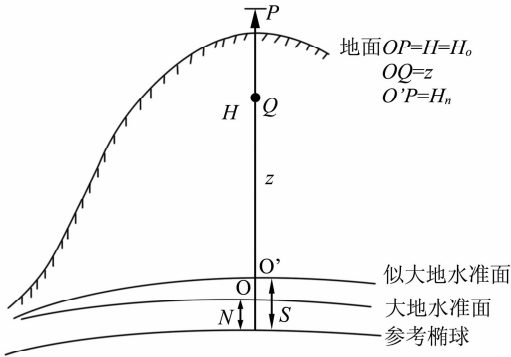


图 1 地面一点的正高和正常高

Fig. 1 Orthometric height and normal height at the on earth surface

对 g_p 在垂线方向求其积分平均值后,即得 \bar{g} , 这时,

$$\begin{aligned} \bar{g} &= \frac{1}{H} \int_0^H g_q(z) dz \\ &= g_p - \frac{H}{2} \left(-3086 + 4\pi G\rho + \frac{\partial \delta g}{\partial h} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\gamma = \frac{1}{H} \int_0^H \gamma d\gamma = \gamma_0 - 3806 \frac{H}{2}, \quad (6)$$

式中 γ_0 为参考椭球上的正常重力值, 如此有

$$\begin{aligned} \bar{g} - \gamma &= g_p + 3806 \frac{H}{2} - 2\pi G\rho H \\ &\quad - \frac{H}{2} \frac{\partial \delta g}{\partial h} - \gamma_0 + 3806 \frac{H}{2}, \end{aligned} \quad (7)$$

顾及 Bouguer 异常(以 $1 \times 10^{-5} \text{ s}^{-2}$ 为单位)

$$\begin{aligned} \Delta g_b &= g_p - 2\pi G\rho H + 3806 - \gamma_0, \\ \text{则 } \bar{g} - \gamma &= \Delta g_b - \frac{H}{2} \frac{\partial \delta g}{\partial h}, \end{aligned} \quad (8)$$

将(8)式代入(1)式,最后得:

$$N - \zeta = \frac{\Delta g_b}{\gamma} H - \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial \delta g}{\partial h} H^2. \quad (9)$$

这是一个不含高于二次项的封闭公式, 式中 H 已略去其下角标, 且以米为单位, 因为即使正高(H_0)和正常高(H_n)相差几米, 于计算精度不妨^[7].

顺便指出, 上一公式与 Sjoberg 导出的公式^[6]

$$N - \zeta = \frac{\Delta g_b}{\gamma} H - \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial \Delta g_f}{\partial h} H^2 + O(H^3) \quad (10)$$

稍不同, 在略去(10)式 $O(H^3)$ 后, 两者互差甚小, 但(9)式中右边第二项为同一点上重力异常(或扰动重力)的垂直梯度, 而(10)式为空间异常(Δg_f)的垂直梯度, 且(9)式的推导过程更为简便.

式(9)中右端的第二项与异常的梯度直接相关, 因此局部效应更为显著. 如果说重力垂直梯度刻划了它与大地水准面的平均曲率的联系, 那么扰动重力垂直梯度则描述了大地水准面平均曲率与正常水准面平均曲率的偏离. 如此就把大地测量中的几何概念和力学概念具体地联系起来.

上式右端的第一项的系数中含 Δg_b , 它反映了区域场的影响; 右端的第二项的系数中含有扰动重力梯度, 它显示了局部场的作用, 只有一并考虑区域场的贡献, 这时由似大地水准面转化成大地水准面在物理和数学意义上才能全面地反映出来.

3 基本公式在模型上的验证

3.1 模型 I (半球体)

设地球表面为一平坦的表面, 并取之参考面为 AOA' (见图 2), 其上覆盖一半球体的高山(异常体), 球之半径为 R , 顶点 P 距球心 O (坐标原点)的高度为 H , 且令 $H=R=3 \text{ km}$; 球体的密度 ρ 与岩石的平均密度相同, 即为 2670 kg/m^3 ; 设参考面上的重力 γ 为 9.8 ms^{-2} , 球顶点 P 处的引力位可根据文献(18)推得, 即

$$V(P) = 2\pi G\rho \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} \right) R^2, \quad (11)$$

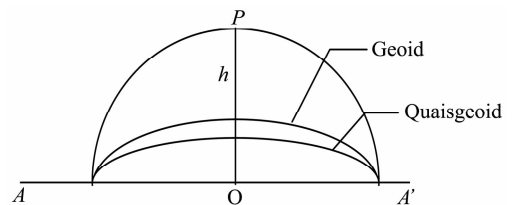


图 2 半球模型

Fig. 2 The half spheroid model

显然, 似大地水准面高

$$\zeta = V(P)/\gamma = 0.446 \text{ m}. \quad (12)$$

对于接近于 O 点上方大地水准面上(P_0)的引力位应按内部点处理, 同是可以推得(此处略去该异常质量引起大地水准面到原点 O 的距离)

$$V(P_0) = \pi G\rho R^2, \quad (13)$$

$$N = V(P)/\gamma = \pi G \rho R^2 / \gamma = 0.503 \text{ m}, \quad (14)$$

由此可得 $N - \zeta = 0.057 \text{ m}$.

该球体对顶部点(P)产生的重力异常或扰动重力亦可由文献[18]导出,且:

$$\Delta g(P) = 2\pi G \rho (1 - \sqrt{2}/3)R = 177.4 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}, \quad (15)$$

而布格异常:

$$\Delta g_b = \Delta g(P) - 2\pi G \rho H = -158.3 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2},$$

重力异常的垂直梯度:

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial H} = \frac{5}{3} \sqrt{2} \pi G \rho = -1319 \text{ E} (1 \text{ E} = 10^{-9} \text{ s}^{-2}).$$

将上述结果代入反映大地水准面与似大地水准面之差的公式(9)后,得

$$N - \zeta = -0.475 + 0.594 = 0.119 \text{ m}.$$

该值与由公式(12)、(14)算得的结果之差为 0.062 m.

3.2 模型 II (球体)

这里所取模型与文献(1)相同(见图 3). 设一常密度(ρ_1)为 3000 kg/m^3 , 半径为 $R = 6 \text{ km}$ 的球状异常体, 它半露、半埋于地球表面的上、下方, 且没有挤出地球的质量, 现将地球表面视为一参考面, 而

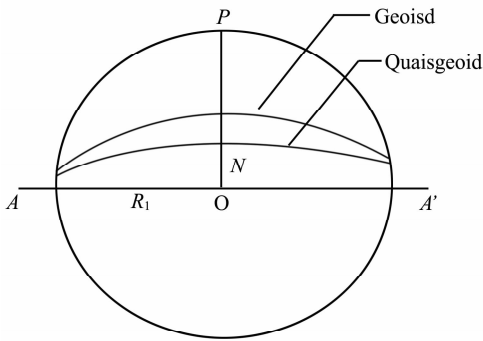


图 3 球体模型

Fig. 3 The spheroid model

该参考面将异常球体一分为二. 又设地球的平均密度(ρ_2)为常密度且等于 6000 kg/m^3 , 半径 R_e 为 6000 km , 由此算得参考面上的重力 $\gamma = 10.058123 \text{ ms}^{-2}$, 在异常球顶点 P 处的扰动重力或重力异常:

$$\Delta g_p = \frac{4}{3} \pi G \rho_1 R_1 = \Delta g_0 = 502.9 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$$

布格异常:

$$\begin{aligned} \Delta g_b &= \Delta g_0 - 2\pi G \rho_1 R_1 = -\frac{2}{3} \pi G \rho_1 R_1 \\ &= -251.4 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}, \quad (17) \end{aligned}$$

似大地水准面高:

$$\zeta = \frac{Gm}{\gamma R_1} = \frac{4}{3\gamma} \pi G \rho_1 R_1^2 = 3.00 \text{ m}, \quad (18)$$

大地水准面高(该点在体内):

$$N = \frac{2}{3} \pi G \rho_1 (3R_1^2 - N^2) / \gamma = 4.50 \text{ m}, \quad (19)$$

这时:

$$N - \zeta = 4.50 - 3.00 = 1.50 \text{ m},$$

异常球顶点 P 处的重力异常或扰动重力垂直梯度:

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial h} = \frac{\partial \Delta g}{\partial R_1} = -\frac{8}{3} \pi G \rho_1 = -1676 \text{ E}, \quad (20)$$

将 Δg_b 和 $\partial \Delta g / \partial h$ 代入公式(9), 得

$$N - \zeta = -1.50 + 3.00 = 1.50 \text{ m}.$$

这一结果与由公式(18)和(19)算得的结果完全一致, 也与文献(1)用水准、重力算得的结果相同.

3.3 模型 III (均衡补偿的两个球体)

这里取得模型也与文献(1)相同(见图 4). 设异常体为半径(r_0)分别等于 30 km 互为补偿的两个均质球体, 它们的密度分别为 ρ_1 和 ρ_2 , 且 $\rho_1 = 3000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 = -3000 \text{ kg/m}^3$, 正密度的球体在上, 负密度的球体在下; 它与参与面相切于 P' 处; 两球心(O, O')的距离 $h_0 = 3000 \text{ m}$, 其连线与参考面垂直. 取正常重力 $\gamma = 9.79720 \text{ ms}^{-2}$, 显然, 从形式上看, 它们的质量得到完全的均衡补偿, 这时由扰动位(异常位)引起的似大地水准面高:

$$\zeta = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{Gm}{R_1} - \frac{Gm}{R_1 + h_0} \right) = \frac{\Delta g_0 R_1 h_0}{R_1 + h_0} = 6.996 \text{ m},$$

式中 $\Delta g_0 = Gm/R^2 = 2514 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$, m 为球之质量.

同理, 由文献(1)可推得大地水准面高:

$$N = \frac{\Delta g_0}{\gamma} \left(h_0 - \frac{h_0^2}{2r_0} + \frac{h_0 N}{r_0} \right) = 7.312 \text{ m}, \quad (22)$$

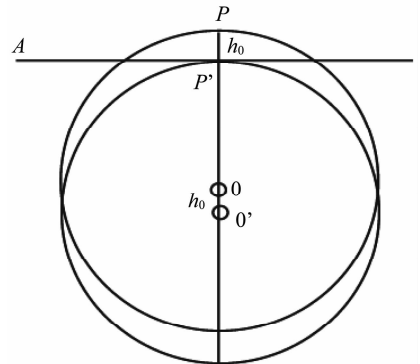


图 4 互为补偿的两个球体模型

Fig. 4 Two spheroid models of isostatic complement each other

从(21)、(22)式可得: $N - \zeta = 0.316 \text{ m}$.

由于二小球引起上一小球顶点 P 处的重力异常

$$\begin{aligned} \Delta g_p &= \frac{4}{3}\pi G\rho r_0 \left(1 - \frac{1}{(1+h_0/r_0)^2}\right) \\ &= 436 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}, \end{aligned} \quad (23)$$

在 Δg_p 减去层间改正 $377 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ 后便得 Δg_b ,

即 $\Delta g_b = 59 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$.

而重力异常垂直梯度:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta g}{\partial h} &= -\frac{4}{3}\pi G\rho \left(1 - \frac{1}{(1+h_0/r_0)^3}\right) \\ &= (-0.1676 + 0.1259) \times 10^5 \text{ s}^{-2} = -417\text{E}. \end{aligned}$$

将上述结果代入公式(9),可得 $N - \zeta = 0.372 \text{ m}$

此值与由公式(21)和(22)算得之结果 0.316 m 相比,互差为 0.056 m ,这也是相当小的.

虽然以上三个模型不能完全代表实际的地球,但由此证实,在距离地面达 3000 m 时,顾及高程二次项($N - \zeta$)公式(9)的精度是很高的,互差的最大值为 0.062 m ,最小值为 0 ,它们的均方根差为 0.048 m .

4 扰动重力垂直梯度的推求及其误差

扰动得力垂直梯度在大地重力学中的应用甚广^[17],关于扰动重力或重力异常的垂直梯度,目前可以用高精度重力仪实测得到,但这在崎岖地区是难以作到,本文采用了一种新的方法,即用地形质量进行计算.

山区的重力异常为地球表面质量分布所左右,从而它与地形高差极为相关,其相关系数达到 0.96 以上^[9],至于它的垂直梯度,更为地球表层的地形质量所制约,这从异常体引起的扰动重力 δg 及其垂直梯度 $\partial \delta g / \partial z$ 的表达式可以看出.由于 δg 仅与计算点 (x, y, z) 到异常体内的流动点 (u, v, w) 的距离的平方成反比,而其梯度则与距离的三次方成反比,即离计算点越近,效应越明显.

人们还可得知,若原来计算点 $P(x, y, z)$ 处的重力异常及其梯度分别为 $\Delta g, \partial \delta g / \partial z$,但当异常形体及它到计算点的距离等尺寸缩小 n 倍后的 $P'(1/nx, 1/ny, 1/nz)$ 处重力异常及其梯度分别为 $1/n\Delta g$ (缩小了 n 倍)、而 $\partial \delta g / \partial z$ 不变.因此,在研究较浅、较近异常体时,用重力梯度比用重力异常更为有利,它与异常体的大小(包括高差)相关得更好.如前所说,空间异常为地形起伏左右,则其梯度更是如此.这就是根据起伏的地形质量计算重力异常(扰动重力)垂直梯度的基本依据.本文遂用此法计算扰动重力的垂直梯度,并以 $(1 - 0.96) = 4\%$ 作为它的相

对代表误差.

设地面点为坐标原点(计算点) Z 轴垂直向下,一般因地形质量引起,扰动重力垂直梯度不大于 1000 ns^{-2} ,故用 40 ns^{-2} 作为它的代表误差.

现根据垂直梯度的柱坐标公式计算出测点上的异常垂直梯度.对于实心圆柱有^[19]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta g}{\partial z} &= -\frac{\partial \delta g}{\partial H} \\ &= 2\pi G\rho \left[\frac{Z+H}{(R^2 + (Z+H)^2)^{1/2}} - \frac{Z}{(R^2 + Z^2)^{1/2}} \right], \end{aligned} \quad (25)$$

对于空心情形:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta g}{\partial z} &= \frac{d\Delta g}{dz} \\ &= 2\pi\rho G \left[\frac{Z+H}{(R_2^2 + (Z+H)^2)^{1/2}} - \frac{Z}{(R_2^2 + Z^2)^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{Z+H}{(R_1^2 + (Z+H)^2)^{1/2}} + \frac{Z}{(R_1^2 + Z^2)^{1/2}} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

式中 G 为引力常数; ρ 为岩层密度; Z 为测点距高度为 H 的圆柱顶部中心的距离; R, R_1, R_2 , 分别为圆柱的半径及内、外半径.

值得指出: $\partial \delta g / \partial z$ 仍可用直角坐标的公式表示,这可充分利用数字地形模型的数据,但为便于讨论以下问题,现仍采用柱坐标公式,根据(25)、(26)式和较大比例尺的地形图,并依一定的环带读取的平均高,即可以进行计算.在假定各个环带的地形质量引起的梯度效应相等的前提下,可以根据第一个环节(半径)依次定出其它环带,详见文献(12),当推动 $I=9$ 环带后,相应的外半径为 165 km ,对于高度为 4 km 最外边的空心圆柱,它的梯度的效应也只有 8 ns^{-2} ,故计算半径可到 165 km 为止.

在地形质量计算垂直梯度时,我们对地表高程、岩石密度等引起的误差作如下分析:

设高程的误差(包括读取地形数据) $m_H = \pm 2 \text{ m}$,只要将(25)式的右边对 H 进行微分,并进行整理,可以得到异常垂直梯度的误差 m_H ,即:

$$m_{\text{chi}} = 2\pi G\rho \left[\frac{R_{i+1}}{(R_{i+1}^2 + H^2)^{3/2}} - \frac{R_1^2}{(R_1^2 + H^2)^{3/2}} \right] m_H, \quad (27)$$

由文献(12)可知由高程引起所有环带的误差: $m_H = \pm 27 \text{ ns}^{-2}$.

在垂直梯度计算中一般采用平面公式,为比较起见,现将其球面公式列出:

$$\frac{\partial \delta g}{\partial z} = \frac{\pi G\rho H}{R} \left(\frac{1}{\sin\phi/2} + 3\sin\phi/2 \right) \Big|_{\phi_0}^{\phi}, \quad (28)$$

其中 r 为地形质量的向径, ϕ_0 与 ϕ 为球面角距, H 为山岩高度(厚度). 经估算球面与平面的结果与互差很小, 故在计算中无需顾及地球的曲率.

综上所述, 由于用地形质量计算的误差, $m_r = \pm 40 \text{ ns}^{-2}$, 计算中高程引起误差 $m_{vh} = \pm 27 \text{ ns}^{-2}$, 岸石密度引起的误差, $m_{vp} = \pm 12 \text{ ns}^{-2}$, 则垂直梯度总的误差:

$$M_v = [40^2 + 27^2 + 12^2]^{1/2} = 50 \text{ ns}^{-2},$$

(当 $H < 4500 \text{ m}$) (29)

5 大地水准面的精度估算

当今一些国家和地区, 因建设需要, 似大地水准面的精度已接近于厘米级, 所采用的方法, 一是大地重力学方法, 例如用修正的莫洛金斯基公式, 二是 GPS 水准方法, 可从大地高减去正常高求得, 三是以上两种方法的综合和处理, 如此为精化大地水准面提供了必要条件.

根据(9)式, 可以推得, 大地水准面的误差的平方:

$$M_N^2 = \left[M_\xi^2 + \left(\frac{H}{\gamma} \right)^2 M_{\Delta g_b}^2 + \left(\frac{H}{\partial \gamma} \right)^2 M_v^2 \right]. \quad (30)$$

对于括号中第二项, 今设 $M_{\Delta g_b} = \pm 5 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$, $H=4000 \text{ m}$ 时, 其值为 4 cm^2 .

对括号中第三项, 由于 $M_v = 50 \text{ ns}^{-2}$, 当 $H=4000 \text{ m}$ 时, 其值为 16 cm^2 .

现讨论第一项, 设 $M_\xi^2 = 36 \text{ cm}^2$ (当 $M_\xi = \pm 6 \text{ cm}$ 时), 将上述结果代入上式后有: $M_N = [36 + 4 + 16]^{1/2} = \pm 7.5 \text{ cm}$

从上述可知, 在三项误差中占主要的还是似大地水准面的误差, 因此可以认为, 若似大地水准面的精度越高级别由此推求大地水准面的精度也相应较高.

6 结论与建议

(1) 随着新技术的不断出现^[20,21], 一方面似大地水准面可以更快速度和更高精度地获得, 这为精化大地水准提供了必要条件, 另一方面, 高精度的三维地形图像或数据能够大量地采集, 辅之以岩石密度的资料, 这样就为推求扰动重力垂直梯度创造了前提. 因此, 按本文的方法操作, 将使大地水准面得到精化, 当海拔在 4000 m 左右时, 大地水准面的精度可能小于 10 cm , 这对于高海拔地区, 例如我国中西部山区是有意义的.

(2) 模型的计算结果进一步表明: 大地水准面与似大地水准面偏差的表达式(9)是正确的, 且它不包含高程的三次及三次以上的各项.

(3) 用地形质量(有较详细的地形及岩石密度数据)计算扰动重力垂直梯度适合于山区, 特别是在那些难以攀登和难以用重力仪直接观测的山区更为适用.

(4) 在海拔较高的山区, 公式(9)中二次项的影响可能达到几十厘米, 然而时至今日, 尚未发现有人顾及这一改正, 建议予以考虑.

参 考 文 献 (References):

- [1] Yeremeev B, Yourkina M N. Height theory of Earth gravity [M]. Moscow: Mineral Press, 1972.
- [2] Heiskanen W A, Moritz H. Physical geodesy [M]. San Francisco: Freeman and Company, 1967.
- [3] Molodensky M S, Eremeev V F, Yourkina M J. Methods for study of the external gravitational field and figure of the Earth [M]. Jerusalem: Israel Progress for Scientific Transactions, 1962.
- [4] 管泽霖, 宁津生. 地球形状及外部重力场[M]. 北京: 测绘出版社, 1981.
Guan Z N, Ning J S. Earth shape and gravity field [M]. Beijing: Survey and Mapping Print Society, 1981.
- [5] 许厚泽, 陆仲连. 中国地球重力场与大地水准面[M]. 北京: 解放军出版社, 1997.
Xu H Z, Lu Z L. Gravity field and Geoid of China [M]. Beijing: Liberate Army Printer Society, 1997.
- [6] Sjöberg L E. On the quasigeoid to geoid separation [J]. Manuscripta Geodetica, 1995, 20: 182~192.
- [7] 边少锋, 张赤军. 论大地水准面与似大地水准的偏差[A]. 见: 陈俊勇主编庆祝陈永龄院士 90 寿辰文集(1999)[C]. 北京: 测绘出版社, 1999.
Bian S F, Zhang C J. Discussion of the bias between geoid and quasi-geoid [A]. The collection of congratulate academician cheng Y. L 90th birthday [M]. Beijing: Survey and Mapping Print Society, 1999.
- [8] Pelelin R P. Advanced geodesy [M]. Moscow: Mineral Press, 1978.
- [9] Sjöberg L E. A refined conversion from normal height to orthometric height [J]. Stud. Geophys. Geod, 2006, 50: 595~606.
- [10] Terzern R, Norak P, Moore P, Kuhn M, Vanick P. Explicit formula for the geoid-quasigeoid separation [J]. Stud. Geophys. Geod, 2006, 50: 607~618.
- [11] 张赤军. 珠穆朗玛峰大地水准面与高程的测定[J]. 科学通报, 1997, 42(23): 2543~2545.
Zhang C J. Determination of geoid and height of everest [J]. Chinese Science Bulletin, 1977, 42(23): 2543~2545.
- [12] Sjöberg L E. Effect of STRM global DEM on the determination of a high resolution geoid model—a case study in Iren [J]. Journal of Geodesy, 2005, 79(9): 540~551.
- [13] 张赤军, 边少锋. 大地水准面与似大地水准面之差及其模型检核[J]. 成都理工学院学报, 2002, 29(1): 105~109.
Zhang C J, Bian S F. Difference between geoid and quasi-geoid and its model verification [J]. Journal of Chengdu

- University of Technology, 2002, 29(1): 105~109.
- [14] Nahavandchi H. Two different methods of geoidal height determinations using a spherical harmonic representation of the geopotential, topographic corrections and the height anomaly geoidal height difference[J]. Journal of Geodesy, 2002, 76: 345~352.
- [15] Zhang C J. Determination of vertical gradient of gravity anomaly with topographic data[J]. Chinese Science Bulletin, 1999, 44(11): 656~660.
- [16] 张赤军,边少锋,周旭华,方剑,郝晓光,张为民. 重力垂直梯度的测定及其应用与潜力[J]. 地球物理学进展, 2007, 22(6): 1~6.
Zhang C J, Bian S F. Determination of gravity vertical gradient and its application potential [J]. Progress in Geophysics, 2007, 22(6): 1~6
- [17] Jiancheng L. Integral formula for computing the disturbing potential and deflection of vertical line from second order radial of disturbing potential [J]. Journal of Geodesy, 2005, 79(1-3): 64~70.
- [18] Wang Z T. Geoid and crustal structure in fennoscandia [J]. Kirkkonummi, Publication of the Finnish Geodetic Institute, 1998.
- [19] Elkins T A. Vertical gradient of gravity on axis for hollow and solid cylinders[J]. Geophysics, 1966, 31(4): 816.
- [20] Hirt C, Seeber G. Accuracy analysis of vertical deflection data observed with the Hannover digital zenith camera system TXK2-D[J]. Journal of Geodesy, 2008, 82(6): 347~356.
- [21] Hirt C, Flury J. Astronomical-topographic leveling using high precision astrogeodetic vertical deflection and digital terrain modes data [J]. Journal of Geodesy, 2008, 82(4, 5): 231~248.