

MIMO 系统中 16-QAM 信号的软值输出半正定松弛检测

徐 信^① 蔡跃明^{①②} 徐友云^①

^①(解放军理工大学通信工程学院 南京 210007)

^②(东南大学移动通信国家重点实验室 南京 210096)

摘 要: 使用最优化理论与方法研究了 MIMO 系统中 16-QAM 信号的软值输出半正定松弛检测问题, 推导了 16-QAM 信号的软值输出半正定松弛检测器软值计算所需附加的约束条件, 并提出了一种降维近似处理方法, 通过降维近似处理大大降低了软输出检测器的复杂度。仿真结果表明: 通过附加约束条件和降维近似处理, 软值输出半正定松弛检测器获得了较好的检测性能, 降维近似处理降低了软输出 SDR 检测器的运算复杂度, 但会产生 0.2~0.4dB 的性能损失。

关键词: 多输入多输出; 半正定松弛; 软输入软输出; 检测

中图分类号: TN911.23

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)07-1651-05

Soft Semi-definite Relaxation for Detection of 16-QAM Signaling in MIMO Systems

Xu Xin^① Cai Yue-ming^{①②} Xu You-yun^①

^①(Institute of Communications Engineering, PLAUST, Nanjing 210007, China)

^②(National Mobile Communications Research Laboratory, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: In this paper, soft semi-definite relaxation for detection of 16-QAM signaling in MIMO systems is investigated. Additional constraints and dimension-reduction approximation method are proposed, which can be used to calculate the Log-Likelihood Ratio (LLR) and reduce dimensions of the SDR detection, respectively. Simulations show that the soft SDR detector exhibits a better performance in a flat-fading MIMO channels, and the complexity of the soft detector is considerably reduced by reducing the dimensions of the SDR programming, but the performance loss leads by dimension reduction is about 0.2 to 0.4 dB.

Key words: Multiple-Input Multiple-Output(MIMO); Semi-definite relaxation; Soft-in soft-out; Detection

1 引言

众所周知, ML 检测问题是一个非确定多项式时间(NP-hard)问题^[1], 目前还没有多项式时间复杂度的算法能够求解 ML 检测问题。在次优 MIMO 检测算法^[2]方面, 迫零(ZF)检测器、最小均方误差(MMSE)检测器、排序串行干扰消除(OSIC)检测器和基于网格规约的检测器等均受到了广泛关注。由于 ML 检测器求解的是一个非凸优化问题, 复杂度高, 而半正定松弛(SDR)检测算法使用凸规划方法对非凸优化问题予以近似, 可以使用有效的多项式时间算法, 如内点法^[3]进行求解。文献[4]提出了特定用于 16-QAM 信号的 SDR 检测方法, 但没有研究软值输出问题; 文献[5]研究了 QPSK 调制方式下的 SDR 检测算法及其软值输出方法, 但没有对高阶调制时的软值输出问题进行研究。此外, 使用 SDR 检测算法计算比特软值输出时需要多次求解 SDR 优化问题, 如何使用 SDR 检测算法计算比特软值和如何降低 SDR 优化问

题的维数以减小运算复杂度等是亟待解决的问题。

论文后续部分组织如下: 第 2 节对 MIMO 系统实数域模型进行了介绍; 第 3 节分别对最优化问题的松弛和半正定松弛、16-QAM 信号的硬判半正定松弛检测和软输出半正定松弛检测进行了讨论, 提出了软输出半正定松弛检测的附加约束条件和降维近似方法, 降低了检测算法的运算复杂度; 第 4 节给出了仿真结果; 最后是简要结论。

文中变量使用以下符号表示方法: 大写黑体字母表示矩阵, 小写黑体字母表示矢量, 小写字母表示标量, $(\cdot)^T$ 表示矩阵转置, \mathcal{C} 表示复数域, $\text{diag}\{\mathbf{X}\}$ 表示矩阵 \mathbf{X} 的对角元素组成的矢量, \mathbf{I} 表示单位矩阵, $\mathbf{0}$ 表示全 0 矢量, $\mathbf{1}$ 表示全 1 矢量, $\Re\{\cdot\}$ 和 $\Im\{\cdot\}$ 分别表示实部和虚部, $\text{Tr}\{\cdot\}$ 表示迹操作, $\text{rank}(\cdot)$ 表示求秩操作, $\|\cdot\|$ 表示标准范数, $\mathbf{X} \succ= \mathbf{0}$ 表示 \mathbf{X} 是半正定的。

2 系统模型

考虑一个 \bar{N} 根发射天线, \bar{M} 根接收天线的 MIMO 系统, 假定信道为窄带平坦衰落信道, 则 MIMO 信道输入输出关系可以写为

2006-11-20 收到, 2007-07-12 改回

江苏省自然科学基金(BK2006002)和东南大学移动通信国家重点实验室开放研究基金(N200601)资助课题

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{n}} \quad (1)$$

其中 $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^{\tilde{N} \times 1}$ 为发射信号矢量; $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{C}^{\tilde{M} \times 1}$ 为接收信号矢量; $\tilde{\mathbf{H}} = [\tilde{h}_{ij}]$ 是由均值为 0、单位方差、独立同分布的复高斯随机变量构成的 $\tilde{M} \times \tilde{N}$ 的信道矩阵, \tilde{h}_{ij} 表示发射天线 j 到接收天线 i 之间的信道衰落系数; $\tilde{\mathbf{n}} \in \mathbb{C}^{\tilde{M} \times 1}$ 为零均值、协方差矩阵为 $\sigma^2 \mathbf{I}$ 的复高斯噪声矢量。本文假定发送数据符号为 16-QAM 调制, 即 $\tilde{x}_i (i = 1, \dots, \tilde{N})$ 的实部和虚部均属于集合 $\{\pm 1, \pm 3\}$ 。

为避免在 MIMO 检测过程中对复值变量进行处理, 将模型式(1)等效为实数域模型如下:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (2)$$

$$\text{其中 } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \Re\{\tilde{\mathbf{y}}\} \\ \Im\{\tilde{\mathbf{y}}\} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Re\{\tilde{\mathbf{x}}\} \\ \Im\{\tilde{\mathbf{x}}\} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \Re\{\tilde{\mathbf{n}}\} \\ \Im\{\tilde{\mathbf{n}}\} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \Re\{\tilde{\mathbf{H}}\} & -\Im\{\tilde{\mathbf{H}}\} \\ \Im\{\tilde{\mathbf{H}}\} & \Re\{\tilde{\mathbf{H}}\} \end{bmatrix}.$$

使用 MIMO 系统模型的实数域表示后, 16-QAM 信号的 ML 检测器可以表示为具有整数约束的组合优化问题^[4]

$$\text{ML: } \begin{cases} \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 \\ \text{s.t. } x_i \in \{\pm 1, \pm 3\} \end{cases} \quad (3)$$

下面我们将在此基础上展开半正定松弛检测的相关讨论。

3 半正定松弛检测

3.1 松弛和半正定松弛的基本概念^[1]

一般来说, 一个最优化问题能够表示为

$$f^* = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} f(\mathbf{x}) \quad (4)$$

其中 \mathbf{x} 是决策变量, \mathcal{S} , $f(\mathbf{x})$ 和 f^* 分别表示可行域、目标函数和最小目标值。

如果 $\mathcal{S} \subset \mathcal{U}$, 则以下问题

$$g^* = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{U}} f(\mathbf{x}) \quad (5)$$

称为问题(4)的松弛。松弛的目的是通过适当选择集合 \mathcal{U} , 以使松弛问题的求解较原问题的求解简单。但是, 松弛问题的解不能直接作为原问题的近似解, 这是因为该解可能不在集合 \mathcal{S} 中, 为此, 通常需要使用近似技术将松弛解转换为原问题的近似解。

对于 QPSK 调制(BPSK 调制类似), ML 检测问题可表示为

$$\text{ML: } \min_{\mathbf{x} \in \{-1, +1\}^N} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 \quad (6)$$

其中 $N = 2\tilde{N}$ 。令 $J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2$, $J(\mathbf{x}) = -2\mathbf{x}^T \mathbf{H}^T \mathbf{y} + \mathbf{x}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{x}$, 则最大似然解可表示为

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \{-1, +1\}^N} J(\mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{x} \in \{-1, +1\}^N} J(\mathbf{x}) \quad (7)$$

若令 $\mathbf{w}^T = [\mathbf{x}^T \ 1]$, 则上述 ML 检测问题可以转化为以下的布尔(二进制)二次规划(BQP)问题:

$$\min_{\mathbf{w} \in \{-1, +1\}^{N+1}} \mathbf{w}^T \mathcal{L}_Q \mathbf{w} \quad (8)$$

其中 $\mathcal{L}_Q = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \mathbf{H} & -\mathbf{H}^T \mathbf{y} \\ -\mathbf{y}^T \mathbf{H} & \mathbf{y}^T \mathbf{y} \end{bmatrix}$ 是对称矩阵。为了便于对半正定

松弛进行表述, 我们重构上述 BQP 问题。由于 $\mathbf{w}^T \mathcal{L}_Q \mathbf{w} = \text{Tr}\{\mathbf{w}\mathbf{w}^T \mathcal{L}_Q\}$, 故尔上述 BQP 问题等效为以下问题:

$$\begin{cases} \min \text{Tr}\{\mathbf{W}\mathcal{L}_Q\} \\ \text{s.t. } \mathbf{W} = \mathbf{w}\mathbf{w}^T, \mathbf{w} \in \{-1, +1\}^{N+1} \\ W_{ii} = 1, \quad i = 1, \dots, N+1 \end{cases} \quad (9)$$

其中约束 $\mathbf{W} = \mathbf{w}\mathbf{w}^T$ 暗示 \mathbf{W} 是对称、半正定和秩 1 的。由于 $\mathbf{W} = \mathbf{w}\mathbf{w}^T$ 约束, 上述 BQP 问题是非凸优化问题。如果从上述问题中去掉秩 1 约束, 则可获得以下松弛问题:

$$\begin{cases} \min \text{Tr}\{\mathbf{W}\mathcal{L}_Q\} \\ \text{s.t. } \mathbf{W} \succcurlyeq 0 \\ W_{ii} = 1, \quad i = 1, \dots, N+1 \end{cases} \quad (10)$$

其中 $\mathbf{W} \succcurlyeq 0$ 意味着 \mathbf{W} 是对称和半正定的。问题式(10)是一个半正定规划问题, 所以, 称问题式(10)是问题式(8)的半正定松弛。通过半正定松弛处理, 问题式(10)变为凸优化问题, 它不存在局部最大问题, 并且人们已经开发出了有效的基于内点法^[3]的优化算法来求解此类半正定松弛问题。

3.2 16-QAM 信号的半正定松弛检测^[4]

对于 16-QAM 调制信号, 星座约束 $x_i \in \{\pm 1, \pm 3\}$, ($i = 1, \dots, N$) 可以表示为

$$(x_i + 1)(x_i - 1)(x_i + 3)(x_i - 3) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (11)$$

引入辅助变量 $t_i = x_i^2, (i = 1, \dots, N)$, 则 ML 检测问题式(3)可以重写为

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{t}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 \\ \text{s.t. } x_i^2 - t_i = 0, \quad i = 1, \dots, N \\ t_i^2 - 10t_i + 9 = 0, \quad i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (12)$$

构造矢量 $\mathbf{w}^T = [\mathbf{x}^T \ \mathbf{t}^T \ 1]$, 并令 $\mathbf{W} = \mathbf{w}\mathbf{w}^T$, 则 $\mathbf{W} =$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{1,1} & \mathbf{W}_{1,2} & \mathbf{W}_{1,3} \\ \mathbf{W}_{2,1} & \mathbf{W}_{2,2} & \mathbf{W}_{2,3} \\ \mathbf{W}_{3,1} & \mathbf{W}_{3,2} & \mathbf{W}_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}\mathbf{x}^T & \mathbf{x}\mathbf{t}^T & \mathbf{x} \\ \mathbf{t}\mathbf{x}^T & \mathbf{t}\mathbf{t}^T & \mathbf{t} \\ \mathbf{x}^T & \mathbf{t}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } \mathbf{W}_{i,j} (i, j = 1, 2, 3)$$

表示分块矩阵 \mathbf{W} 中的第 (i, j) 个子块。所以, 问题式(12)等效为以下秩 1 约束的非凸二次规划问题

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{W}} \text{Tr}\left\{ \mathbf{W} \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \mathbf{H} & \mathbf{0} & -\mathbf{H}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{y}^T \mathbf{H} & \mathbf{0} & \mathbf{y}^T \mathbf{y} \end{bmatrix} \right\} \\ \text{s.t. } \text{diag}\{\mathbf{W}_{1,1}\} - \mathbf{W}_{2,3} = \mathbf{0} \\ \text{diag}\{\mathbf{W}_{2,2}\} - 10\mathbf{W}_{2,3} + 9\mathbf{1} = \mathbf{0} \\ \mathbf{W} \succcurlyeq \mathbf{0} \\ \mathbf{W}_{3,3} = 1 \\ \text{rank}(\mathbf{W}) = 1 \end{cases} \quad (13)$$

去掉秩 1 约束后, 上述最大似然检测问题变为以下凸的半正定松弛优化问题

$$\text{SDR: } \begin{cases} \min_{\mathbf{W}} \text{Tr} \left\{ \mathbf{W} \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \mathbf{H} & \mathbf{0} & -\mathbf{H}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{y}^T \mathbf{H} & \mathbf{0} & \mathbf{y}^T \mathbf{y} \end{bmatrix} \right\} \\ \text{s.t. } \text{diag}\{\mathbf{W}_{1,1}\} - \mathbf{W}_{2,3} = \mathbf{0} \\ \text{diag}\{\mathbf{W}_{2,2}\} - 10\mathbf{W}_{2,3} + 9\mathbf{I} = \mathbf{0} \\ \mathbf{W} \succ = \mathbf{0} \\ \mathbf{W}_{3,3} = 1 \end{cases} \quad (14)$$

如果 SDR 的最优变量 \mathbf{W} 的秩为 1, 则松弛是紧的, \mathbf{x} 的 ML 解是 \mathbf{W} 矩阵最后一列的前 N 个元素; 否则, SDR 仅是 ML 的近似。有 3 种方法可以根据变量 \mathbf{W} 得到近似的 \mathbf{x} :

(1) 简单量化法

$$\hat{x}_i = \text{quantize}(\mathbf{W}_{i,2N+1}), \quad i = 1, \dots, N \quad (15)$$

其中 $\text{quantize}(\alpha)$ 将元素 α 四舍五入至集合 $\{\pm 1, \pm 3\}$ 中最接近的元素。

(2) 特征值分解法

令 \mathbf{d} 表示矩阵 $\tilde{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{1,1} & \mathbf{W}_{1,3} \\ \mathbf{W}_{3,1} & 1 \end{bmatrix}$ 的最大特征值所对应的特征向量, 则

$$\hat{x}_i = \text{quantize} \left(\frac{\mathbf{d}_i}{\mathbf{d}_{N+1}} \right), \quad i = 1, \dots, N \quad (16)$$

(3) 随机化法

令 $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{V}^T \mathbf{V}$ 是矩阵 $\tilde{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{1,1} & \mathbf{W}_{1,3} \\ \mathbf{W}_{3,1} & 1 \end{bmatrix}$ 的 Cholesky 分解, \mathbf{v}_i 表示 \mathbf{V} 的列, 则

$$\hat{x}_i = \text{quantize} \left(\frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{r}}{\mathbf{v}_{N+1}^T \mathbf{r}} \right), \quad i = 1, \dots, N \quad (17)$$

其中 \mathbf{r} 是均匀分布于 $(N+1)$ 维单位球面上的随机矢量, 即 \mathbf{r} 满足约束 $\|\mathbf{r}\| = 1$ 。 \mathbf{r} 可以通过产生独立同分布的高斯随机矢量并归一化获得^[1], 即

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}, \quad \mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}) \quad (18)$$

为提高近似程度, 随机化过程可重复多次, 取其中使目标函数值最小的解作为检测结果即可。

3.3 16-QAM 信号半正定松弛检测的软值计算方法

通常情况下, MIMO 通信系统均使用信道编码(如 Turbo 码或 LDPC 码等)来提高系统的误比特率(BER)性能, 这就要求 MIMO 检测器能够输出每一信息比特 $b_k (k=1, \dots, M_c \tilde{N})$ 为 +1 或 -1 的软对数似然比(LLR)信息, 其中 b_k 表示组成发送符号矢量 \mathbf{x} 的比特矢量 \mathbf{b} 中的第 k 比特信息, M_c 为每调制复符号包含的数据比特数。信道译码器需要根据 MIMO 检测器送出的后验概率(APP)信息对 b_k 的值做出评估。软值输出半正定松弛检测 MIMO 系统的结构示意图如图 1 所示。

MIMO 检测器需输出的每一信息比特 $b_k (k=1, \dots, M_c \tilde{N})$ 的 LLR 定义为^[5]

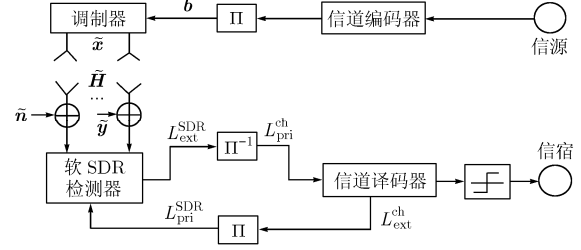


图 1 软值输出半正定松弛检测 MIMO 系统的结构示意图

$$L_{\text{app}}^{\text{SDR}}(b_k | \mathbf{y}) \equiv \ln \left(\frac{P(b_k = +1 | \mathbf{y})}{P(b_k = -1 | \mathbf{y})} \right) \quad (19)$$

假定 \mathbf{b} 中的数据比特之间已经通过信道编码和交织变得统计独立, 则应用贝叶斯定理可以得到

$$L_{\text{app}}^{\text{SDR}}(b_k | \mathbf{y}) = L_{\text{pri}}^{\text{SDR}}(b_k) + L_{\text{ext}}^{\text{SDR}}(b_k | \mathbf{y}) \quad (20)$$

其中 $L_{\text{pri}}^{\text{SDR}}(b_k)$ 表示信息比特的先验信息, 由下式给出

$$L_{\text{pri}}^{\text{SDR}}(b_k) = \ln \left(\frac{P(b_k = +1)}{P(b_k = -1)} \right), \quad k = 1, \dots, M_c \tilde{N} \quad (21)$$

而 $L_{\text{ext}}^{\text{SDR}}(b_k | \mathbf{y})$ 表示外信息, 可表示为

$$L_{\text{ext}}^{\text{SDR}}(b_k | \mathbf{y}) = \ln \frac{\sum_{\mathbf{b} \in \mathcal{X}_{k,+1}^{M_c \tilde{N}}} P(\mathbf{y} | \mathbf{x}) \exp \left(\frac{1}{2} \mathbf{b}_{[k]}^T \mathbf{L}_{\text{pri},[k]}^{\text{SDR}} \right)}{\sum_{\mathbf{b} \in \mathcal{X}_{k,-1}^{M_c \tilde{N}}} P(\mathbf{y} | \mathbf{x}) \exp \left(\frac{1}{2} \mathbf{b}_{[k]}^T \mathbf{L}_{\text{pri},[k]}^{\text{SDR}} \right)} \quad (22)$$

其中集合 $\mathcal{X}_{k,+1}^{M_c \tilde{N}}$ (或 $\mathcal{X}_{k,-1}^{M_c \tilde{N}}$) 表示第 k 比特信息 $b_k = +1$ (或 $b_k = -1$) 的所有可能的矢量 \mathbf{b} , $\mathbf{b}_{[k]}$ 表示去除第 k 比特后的 \mathbf{b} 子矢量 ($\mathbf{L}_{\text{pri},[k]}^{\text{SDR}}$ 同)。对于 MIMO 系统模型式(2), 高斯似然密度 $P(\mathbf{y} | \mathbf{x})$ 由下式给出

$$P(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \frac{\exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 \right)}{(2\pi\sigma^2)^{\tilde{M}}} \quad (23)$$

由式(22)和式(23)可以看出, 在外信息的计算过程中涉及到求取指数函数之和的对数的计算, 为便于硬件实现, 通常利用如下 Jac-log 近似^[6]

$$\text{Jac ln}(a_1, a_2) \equiv \ln(e^{a_1} + e^{a_2}) \approx \max(a_1, a_2) \quad (24)$$

在 Jac-log 近似和式(23)给定的高斯似然密度条件下, 式(22)变为

$$L_{\text{ext}}^{\text{SDR}}(b_k | \mathbf{y}) \approx \min_{\mathbf{b} \in \mathcal{X}_{k,+1}^{M_c \tilde{N}}} \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 - \frac{1}{2} \mathbf{b}_{[k]}^T \mathbf{L}_{\text{pri},[k]}^{\text{SDR}} \right\} - \min_{\mathbf{b} \in \mathcal{X}_{k,-1}^{M_c \tilde{N}}} \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 - \frac{1}{2} \mathbf{b}_{[k]}^T \mathbf{L}_{\text{pri},[k]}^{\text{SDR}} \right\} \quad (25)$$

我们可以使用全搜索方式来计算式(25)中的最小值和比特外信息, 但更为有效的方法是使用前面提到的半正定松弛技术直接进行计算。

我们发现计算每一信息比特 $k \in \{1, \dots, M_c \tilde{N}\}$ 的外信息需要求解 2 次最优化问题, 因此每一 MIMO 检测过程共需求解 $2M_c \tilde{N}$ 次最优化问题; 另外, 在其中的 $M_c \tilde{N}$ 次最优化问题的求解中, 变量 b_k 的值与发送的比特值相同。如果假定硬判半正定松弛检测的结果是正确的, 并以此作为发送的 $M_c \tilde{N}$ 比特信息, 则软输出半正定松弛检测器只需求解

$(M_c \tilde{N} + 1)$ 次最优化问题^[5]即可。

结合 3.2 节讨论的 16-QAM 调制信号的半正定松弛检测方法，我们将软输出半正定松弛检测器的检测过程归纳如下：

$$(1) \text{以 } \min_W \text{Tr}\{\mathbf{W}\mathcal{L}_Q\} = \min_W \text{Tr}\left\{\mathbf{W} \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \mathbf{H} & \mathbf{0} & -\mathbf{H}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{y}^T \mathbf{H} & \mathbf{0} & \mathbf{y}^T \mathbf{y} \end{bmatrix}\right\}$$

作为优化目标求解 SDR 问题，检测结果 $\hat{\mathbf{x}}^\dagger = \arg \min_W \{\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2\}$ 作为发送的符号矢量，即假定 $\hat{\mathbf{x}}^\dagger$ 检测正确。同时，根据 0,1 比特与星座符号之间的映射关系将 $\hat{\mathbf{x}}^\dagger$ 转换为 $M_c \tilde{N} \times 1$ 的比特矢量 $\hat{\mathbf{b}}^\dagger$ 。

(2) 由于调制方式为 16-QAM， $\hat{\mathbf{x}}^\dagger$ 的每一维对应 2 比特；对于 $\hat{\mathbf{x}}^\dagger$ 中的每一比特 \hat{b}_k^\dagger ，确定 $b_k = -\hat{b}_k^\dagger$ 相对应符号的约束条件，并在此约束条件下求解新的 SDR 问题，产生的检测结果记为 $\hat{\mathbf{x}}^{(k)}$ 。本文重点对附加约束条件的设定和降维近似处理方法进行了研究，详细内容将在下一小节讨论；设定相应的约束条件是为了能获得满足 $b_k = -\hat{b}_k^\dagger$ 条件的 $\hat{\mathbf{x}}^{(k)}$ ，降维近似处理是为了降低 SDR 优化问题的维数以减小运算复杂度。

(3) 根据检测结果 $\hat{\mathbf{x}}^\dagger$ 和 $\hat{\mathbf{x}}^{(k)}$ ，经由下式计算出第 k 比特的外信息至信道译码器：

$$L_{\text{ext}}^{\text{SDR}}(b_k | \mathbf{y}) \approx \frac{-\hat{b}_k^\dagger}{2\sigma^2} \left[\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}^\dagger\|_2^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}^{(k)}\|_2^2 \right] \quad (26)$$

3.4 附加约束条件和降维近似

对于格雷编码 16-QAM 调制，图 2 示出了其中的一种比特和符号映射关系及相应的矩形星座图。对于 $b_k = -\hat{b}_k^\dagger$ ，总能根据 \hat{b}_k^\dagger 的不同取值和 \hat{b}_k^\dagger 所对应位置的奇偶性将 b_k 所对应的 16-QAM 符号 x_i 的取值范围分为 4 种情况：(1) $x_i \in \{-3, -1\}$ ；(2) $x_i \in \{+1, +3\}$ ；(3) $x_i \in \{-1, +1\}$ ；(4) $x_i \in \{-3, +3\}$ 。其中 $i = \lfloor k/2 \rfloor$ ， x_i 、 b_k 与 \hat{b}_k^\dagger 之间的取值关系如表 1 所示。

	奇比特	偶比特					
+3	0	0	•	•	•	•	
+1	0	1	•	•	•	•	
-1	1	1	•	•	•	•	
-3	1	0	•	•	•	•	
			0010	0011	0001	0000	
			0110	0111	0101	0100	
			1110	1111	1101	1100	
			1010	1011	1001	1000	

图 2 比特与符号映射关系及相应的 16-QAM 星座图

表 1 x_i 、 b_k 与 \hat{b}_k^\dagger 之间的取值关系

\hat{b}_k^\dagger	k 为奇数		k 为偶数	
	比特 '0'	比特 '1'	比特 '0'	比特 '1'
$b_k = -\hat{b}_k^\dagger$	比特 '1'	比特 '0'	比特 '1'	比特 '0'
x_i	$\{-3, -1\}$	$\{+1, +3\}$	$\{-1, +1\}$	$\{-3, +3\}$

针对以上 4 种取值情况，可推导出需要附加的 SDR 约束条件分别为

$$(1) (x_i + 3)(x_i + 1) = 0, i = \lfloor k/2 \rfloor, \text{推导出 } x_i^2 + 4x_i + 3 = 0, \text{因此, 附加约束条件为}$$

$$\mathbf{W}(i, i) + 4\mathbf{W}(i, 2N + 1) + 3 = 0 \quad (27)$$

$$(2) (x_i - 1)(x_i - 3) = 0, i = \lfloor k/2 \rfloor, \text{推导出 } x_i^2 - 4x_i + 3 = 0, \text{因此, 附加约束条件为}$$

$$\mathbf{W}(i, i) - 4\mathbf{W}(i, 2N + 1) + 3 = 0 \quad (28)$$

$$(3) (x_i + 1)(x_i - 1) = 0, i = \lfloor k/2 \rfloor, \text{推导出 } x_i^2 - 1 = 0, t_i - 1 = 0, t_i^2 - 1 = 0, \text{因此, 附加约束条件为}$$

$$\mathbf{W}(i, i) - 1 = 0, \mathbf{W}(N + i, 2N + 1) - 1 = 0, \mathbf{W}(N + i, N + i) - 1 = 0 \quad (29)$$

$$(4) (x_i + 3)(x_i - 3) = 0, i = \lfloor k/2 \rfloor, \text{推导出 } x_i^2 - 9 = 0, t_i - 9 = 0, t_i^2 - 81 = 0, \text{因此, 附加约束条件为}$$

$$\mathbf{W}(i, i) - 9 = 0, \mathbf{W}(N + i, 2N + 1) - 9 = 0, \mathbf{W}(N + i, N + i) - 81 = 0 \quad (30)$$

上述 SDR 优化问题的维数为 $(2N + 1)$ 维。如果能够降低 SDR 优化问题的维数，则可以大大减小 SDR 检测器的运算复杂度。

降维处理的思路是根据 \hat{b}_k^\dagger 的取值和 \hat{b}_k^\dagger 所对应位置的奇偶性直接近似确定 b_k 所对应的 16-QAM 符号 $x_i, i = \lfloor k/2 \rfloor$ 的值，此时，不必再在附加约束条件的基础上求解 $(2N + 1)$ 维的 SDR 优化问题，只需求解去掉 x_i 影响后的 $(2N - 1)$ 维的 SDR 优化问题即可。为此，假定 b_k 所对应的 16-QAM 符号 x_i 的取值为满足上述约束条件且距离 \hat{b}_k^\dagger 所对应的 16-QAM 符号 $\hat{x}_{k,i}^\dagger, i = \lfloor k/2 \rfloor$ 最近的符号点。

我们在上述合理假设和图 2 所示比特与符号映射关系下，可以给出 x_i 、 b_k 与 \hat{b}_k^\dagger 和 $\hat{x}_{k,i}^\dagger$ 之间的取值关系如表 2 所示。

表 2 x_i 、 b_k 与 \hat{b}_k^\dagger 和 $\hat{x}_{k,i}^\dagger$ 之间的取值关系

\hat{b}_k^\dagger	k 为奇数				k 为偶数			
	比特 '0'		比特 '1'		比特 '0'		比特 '1'	
$\hat{x}_{k,i}^\dagger$	+3	+1	-1	-3	+3	-3	+1	-1
$b_k = -\hat{b}_k^\dagger$	比特 '1'		比特 '0'		比特 '1'		比特 '0'	
x_i	$\{-1\}$		$\{+1\}$		$\{+1\}$	$\{-1\}$	$\{+3\}$	$\{-3\}$

由于直接确定了 x_i 的值,所以在求解第 k 比特信息所对应的 SDR 优化问题时需要将 x_i 的影响从接收信号和信道矩阵中消除。降维后的 SDR 优化问题的目标函数变为

$$\min_{\mathbf{W}'} \text{Tr}\{\mathbf{W}'\mathcal{L}'_Q\} = \min_{\mathbf{W}'} \text{Tr} \left\{ \mathbf{W}' \begin{bmatrix} \mathbf{H}'^T \mathbf{H}' & \mathbf{0} & -\mathbf{H}'^T \mathbf{y}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{y}'^T \mathbf{H}' & \mathbf{0} & \mathbf{y}'^T \mathbf{y}' \end{bmatrix} \right\} \quad (31)$$

其中 \mathbf{x}' 和辅助变量 \mathbf{t}' 分别降低了 1 维, \mathbf{W}' 降低为 $(2N-1)$ 维, $\mathbf{y}' = \mathbf{y} - x_i \mathbf{h}_i$, \mathbf{h}_i 表示 \mathbf{H} 的第 i 列, \mathbf{H}' 为 \mathbf{H} 去掉 \mathbf{h}_i 后得到的信道矩阵。

求解出最优的 \mathbf{x}' 矢量后需要与 x_i 一起重构检测结果 $\hat{\mathbf{x}}^{(k)}$, 进而根据式(26)计算比特外信息。降维近似后 SDR 检测问题的维数由原来的 $(2N+1)$ 维降低为 $(2N-1)$ 维, 因此检测复杂度大大降低。

4 仿真结果

本文使用 MATLAB 仿真软件和 SeDuMi^[7]、YALMIP^[8] 工具包分别对 4 根发射天线、4 根接收天线的未编码和编码 MIMO 系统进行了性能仿真, MIMO 信道为窄带平坦瑞利衰落信道, 信道编码为交织长度为 9216 的 (23,35) Turbo 码, 码率为 $R_c = 1/2$, 交织器为 128 行的分组交织器; SDR 检测器随机量化方法的重复次数为 100 次; Turbo 码迭代次数为 5 次; 不进行大迭代。仿真中采用文献[6]中的比特信噪比定义方法。仿真结果如下:

图 3 是使用硬判 SDR 检测器的 4×4 未编码 MIMO 系统的仿真性能。由仿真图中可以看出: 简单量化方法的硬判性能与特征值分解方法的硬判性能基本相同, 而 100 次重复的随机量化方法的硬判性能优于前两种量化方法的硬判性能, 在 10^{-2} 误码率时性能要好约 1dB。但与 ML 检测器相比, SDR 硬判检测器的性能在高信噪比端还有较大差距。

图 4 是使用软输出 SDR 检测器的 4×4 编码 MIMO 系统的仿真性能。由于简单量化方法的硬判性能与特征值分解方法的硬判性能基本相同, 所以只对采用简单量化方法和随机量化方法的软输出 SDR 检测器性能进行了仿真比较。由仿真图可以发现: 软输出 SDR 检测器获得了较好的误比特率性能; 采用随机量化方法的软输出 SDR 检测器性能明显优于采用简单量化方法的软输出 SDR 检测器性能, 在 10^{-3} 误比特率时性能相差约 1.6dB; 采用低复杂度降维近似方法的软输出 SDR 检测器相比附加约束条件的软输出 SDR 检测器性能有所损失, 信噪比损失约 0.2 至 0.4dB。

5 结论

本文使用最优化理论和方法研究了 MIMO 系统中 16-QAM 信号的软值输出半正定松弛检测问题, 推导出了 16-QAM 信号的软值输出半正定松弛检测器软值计算所需附加的约束条件, 并提出了一种降维近似处理方法, 通过附加

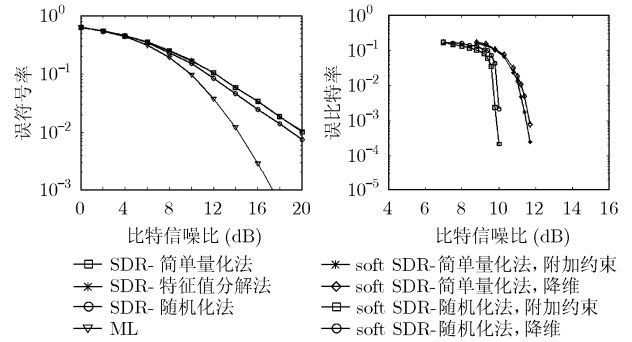


图 3 不同量化方式下硬判 SDR MIMO 检测器性能

图 4 不同量化方式下软输出 SDR MIMO 检测器性能

约束条件和降维近似处理, 获得了较好的检测性能, 同时降维近似处理大大降低了检测复杂度, 但降维近似会产生约 0.2 至 0.4dB 的性能损失。

参考文献

- [1] Ma W K, Davidson T N, Wong K M, Luo Z Q, and Ching P C. Quasi-maximum-likelihood multiuser detection using semi-definite relaxation with application to synchronous CDMA. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2002, 50(4): 912-922.
- [2] Windpassinger C. Detection and precoding for multiple-input multiple-output channels. [PhD Dissertation], Erlangen University, 2004.
- [3] Helmberg C, Rendl F, Vanderbei R J, and Wolkowicz H. An interior point method for semi-definite programming. *SIAM J. Optim.*, 1996, 6(2): 342-361.
- [4] Wiesel Y C E A and Shamai S. Semidefinite relaxation for detection of 16-QAM signaling in mimo channels. *IEEE Signal Processing Letters*, 2005, 12(9): 653-656.
- [5] Steingrimsson B, Zhi-Quan Luo, and Wong K M. Soft quasi-maximum-likelihood detection for multiple-antenna wireless channels. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2003, 51(11): 2710-2719.
- [6] Hochwald B M and Brink S T. Achieving near-capacity on a multiple-antenna channel. *IEEE Trans. on Commun.*, 2003, 51(3): 389-399.
- [7] Sturm J. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 1999, 11(12): 625-653.
- [8] Löfberg Johan. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, Taipei, Taiwan, Sept. 2-4, 2004: 284-289.

徐 信: 男, 1970 年生, 博士生, 研究方向为 OFDM 信道估计技术、MIMO 检测技术、FPGA 实现技术等。
 蔡跃明: 男, 1961 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为移动通信和信号处理。
 徐友云: 男, 1966 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为移动通信和信道编码。