

Delaunay 三角网剖分中的约束边嵌入算法

陈学工, 黄晶晶

(中南大学信息科学与工程学院, 长沙 410083)

摘要: 约束边嵌入是解决 D-三角网转变为 CD-三角网的一种非常有效的方法, 而 CD-三角网才能真实地虚拟地形地貌。该文研究了约束边嵌入 D-三角网的问题, 介绍了约束边嵌入算法的一些基本概念, 分析了现存算法的特点, 提出了改进的约束边嵌入算法——“插入-交换”算法。该算法能有效地处理各种特殊情况, 程序实现简单, 符合工程需求。

关键词: 约束边; Delaunay 三角剖分; 对角线

Algorithm of Inserting Constrained Edge into Delaunay Triangulation

CHEN Xue-gong, HUANG Jing-jing

(School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083)

【Abstract】 This paper focuses on the problem of inserting constrained edge into D-triangulation. It is a very effective method of changing D-triangulation into CD-triangulation that constrained edge is inserted into D-triangulation, and only CD-triangulation can present real terrain and relief. It introduces some basic conceptions about the algorithm of inserting constrained edge, analyses present algorithms' characteristics and presents a better algorithm of inserting constrained edge——“inserting-swapping” algorithm. The algorithm can effectively deal with all kinds of instances, and can be implemented by programs easily, and can accord with requirements of the project.

【Key words】 constrained edge; Delaunay triangulation; diagonal

地学领域中的大量离散数据不是独立的, 相互之间存在着一定的约束关系, 比如地表的山脊线、山谷线、断裂线等。用分割-归并法、逐点插入法或是逐步生长法来构建三角网时, 如果三角网中没有带约束数据, 则生成的数字地面模型是不能正确地表达地表的复杂关系, 也不能满足实际应用的需要, 于是在无约束数据的三角网中嵌入约束线段就成为一个关键的问题。本文重点研究约束边嵌入三角网的问题, 提出了“插入-交换”约束边嵌入的算法。

1 基本概念

定义 1 平面直线图(planar straight line graph), 它由顶点集 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 以及其中点组成的直线段(约束边)的集合 $L = \{p_i p_j \mid p_i \in P, p_j \in P, p_i, p_j \text{ 为该直线段的二端点}\}$ 组成, 并且 L 中任意两条直线段之间除端点外没有其他交点。PSLG 扩展了传统的以内、外环定义平面图形的方式, 可表示任意复杂的正则及非正则图形。三角网则可以看作一个平面直线图。

定义 2 与待嵌入边 l 相交的三角形组成的多边形, 称为 l 的影响域。图 1 中多边形 EFGHSIJ 是约束边 SE 的影响域。

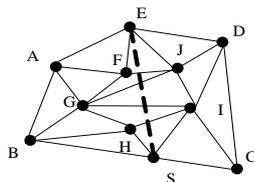


图 1 PSLG

定义 3 影响域中, 待嵌入约束边上的一端点称为起始点(如图 1 中的 S 端), 另一端点称为目标点(如图 1 中的 E 端)。

定义 4 影响域的对角线即待嵌入约束边所经三角形形成的多边形区域中与待嵌入约束边相交的边。

定理 1 对于采用 PSLG 作为输入的任意复杂多边形, 总可以通过普通边交换对其进行约束 Delaunay 三角剖分, 边交换的次数在最坏情况下为 $O(n^2)$ 。其中, n 为 P 中点的个数。

证明 见 Bern 和 Eppstein^[1] 的证明, 闵卫东^[2] 也给出了 PSLG 为正则多边形的证明。如果是传统的内外环定义复杂多边形, 章孝灿^[3] 也给出了证明。定理 1 是本文算法的理论基础, 它说明基于边交换的约束 DT 算法总是收敛的, 可以得到本文对边交换所作的扩展不会影响算法的收敛性的结论。

2 约束边嵌入算法

综合分析有关文献, 约束边嵌入算法可归纳为如下几种:

(1) $m+2$ 边形法。影响域为四边形时的算法在文献[4]中给出, 即“四边形对角线交换”算法。文献[5]中介绍了一种“ $(m+2)$ 边形对角线交换”算法, 从而解决了影响域任意复杂的情形。但程序实现工作量较大, 尤其是在处理重建新剖分后所得三角形与影响域外原有三角形的邻接关系时, 该算法显得笨拙。

(2) 轨迹生成法。文献[6]中提到的“轨迹生成”法, 易于实现, 因为该算法从约束边的一端出发, 对影响域中的所有对角线依次进行交换, 直到约束边嵌入为止。这种算法实际上是“四边形对角线交换”算法的多次调用, 因而程序实现简单明了。但这种算法也有其局限性, 如图 2 所示, 欲在普

基金项目: 国家“863”计划基金资助项目(2002AA135160)

作者简介: 陈学工(1965-), 男, 副教授、博士, 主研方向: 地理信息系统等; 黄晶晶, 硕士研究生

收稿日期: 2006-09-08 **E-mail:** cn1233@263.net

通三角剖分中嵌入虚线所示的约束边 MN 时就出现了交换不下去的情形。这一实例说明,当影响域为凹多边形时,“轨迹生成”法失效。

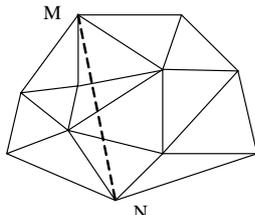


图 2 影响域为凹多边形

(3)如图 2 所示,当影响域为凹多边形时,“轨迹生成”法可能失效但容易发现,从 M 出发,在依次交换第 2、第 3 对角线后,影响域就变成了凸多边形,这时再用“轨迹生成”法即可完成。在任意影响域中强行嵌入约束边是否一定能够通过多次对角线交换来实现?如果是肯定的,则等高线的约束问题将比较容易被解决。文献[7]基于强可交换对角线的思想进行了肯定的证明,文献[7]认为影响域中的每个三角形至少有一条边在影响域的边界上,称为该三角形的交换边,并且除首末两个三角形外,每个三角形有且只有一条交换边。并提出了循环算法。

经研究表明该结论是不正确的。基于文献[7]证明前提的错误,文献[3]给出对角线可交换性的完善的证明。循环算法易于实现,但在处理复杂情况时有可能多次交换某一对角线,此时算法的效率将很低。

(4)广义边交换算法。文献[8]提出了另外一种处理交换对角线时遇到凹四边形的办法。这种算法的思想是逐条去除与任一约束边相交的边,若相交边的两关联三角形形成一凸四边形,则通过一普通边交换即可去除相交边,新产生的两个三角形中肯定有一个不在新形成的邻接多边形内。若相交边的两关联三角形形成一凹四边形,则通过广义边交换去除相交边,产生映象三角形。每产生映象三角形可看成是已将邻接多边形中的凹点压入栈中,同时逐步填充邻接多边形为凸。映象三角形在随后进行的 Delaunay 条件检查时通过由栈中弹出,通过边交换消除。该算法对复杂任意多边形的处理比较复杂。

(5)点插入算法。点插入算法是与以上 4 类算法完全不同的另一类算法。文献[9]中提出的算法称为中点插入法,其思想是对三角网进行追踪分析。如在三角网内没有发现某一约束边界,则采用中点插入算法恢复该约束边界,直至所有约束边界都被检测到为止。另一种插入算法是文献[10]提出的“外接圆交点”插入算法,其思想是在三角网中插入约束边经过的起始三角形的外接圆与约束边的交点,把交点作为新的起始点重复操作直到起始三角形的外接圆与目的三角形的外接圆相交为止。还有另一种插入算法文献[11]提出的“三角形交点”插入算法,其基本思想是将约束边与已形成的三角形集合求交,得到交点,再用新求得的交点对三角剖分结构进行动态修改。此类算法需要大量插入点和修改三角剖分的结构。

以上几类算法都各具特色。但对角线的交换受到凹四边形的影响。而插入点不需要考虑凸凹四边形的影响,在原始数据集中插入了比较多的点,改变了原数据集的精度,而且计算量比较大。针对这些问题,笔者经过研究,认为将点插入思想和对角线交换思想结合起来可以解决这些问题,提出

了“插入-交换”算法,解决约束边嵌入问题。

3 数据结构

算法的执行效率与数据结构之间存在密切的关系。一个好的数据结构有利于对数据进行高效的管理,从而将提高算法的执行效率。本文提出的算法用到以下数据结构:

(1)有序点表。该表保存散乱点集和预处理后的点序列。表中每个元素的结构为

```
typedef struct {
    double x,y,z; //点的坐标
}Point;
```

(2)有向边表。该表保存三角形的边、与该边相邻的三角形信息表中每个元素的结构为

```
typedef struct{
    int TriNo[2]; //两相邻三角形编号
    Point s,e; //有向边的起始和终止顶点
} Edge;
```

(3)三角形表。该表保存生成的各个三角形的边信息和顶点信息。表中每个元素的结构为

```
typedef struct{
    long eNo[3]; //3 条边号,按点号存储
    Point p[3]; //3 个点,逆时针存储
}Triangle;
```

(4)约束边表。该表保存每一条约束边的信息,包括约束边上的点。表中的每个元素的结构为

```
typedef struct{
    Point s,e; //保存约束边的起始和终止顶点
}ConstrainedEdge;
```

4 “插入-交换”算法

本算法只讨论约束边的嵌入时怎样处理与三角网中的边相交的问题,假定约束边的顶点已是三角网中的顶点(有些约束边的顶点是和离散点数据一起构成初始三角网,而有些约束边的顶点是在离散点数据建立初始三角网后再插入三角网)。基本思想是逐一去除与任一约束边 l 相交的边,相交边的两个相邻三角形形成一凸四边形,则通过边交换即可除掉相交边,新产生的两个三角形中肯定有一个不在新形成的影响域,减少了影响域三角形的个数。若相交边的两个相邻三角形形成一凹四边形,则在约束边上插入它与相交边的交点,新产生 4 个三角形中肯定有 3 个不在新形成的影响域内,减少了影响域中三角形的个数,将插入点作为约束边新的起始点,目的点不变再进行约束边的嵌入,直到约束边是三角形的某一边为止。

任一约束边嵌入三角网的算法具体描述如下:

已存在初始三角网数组 Tri , 有向边数组 $Edge$, 有序点表 $Point$, 约束边数组 $ConE$;

Step1 从约束边数组 $ConE$ 中取一条约束边 l 。

Step2 l 的一顶点为 p_1 , 从三角形数组 Tri 中找出以 p_1 点为顶点的三角形 T 。

Step3 l 的另一端为 p_2 , 若 p_2 也是 T 的一个顶点, 则如图 3(a)所示, 则转 Step7。

Step4 若 p_2 不是 T 的顶点, 则求射线 p_1p_2 与 p_1 的对边 e 的交点(图 3(b)), 若不存在交点, 则按逆时针方向搜索 T 中一个顶点为 p_1 的边的相邻三角形, 将这个三角形赋值给 T , 转 Step3。

Step5 如果 T 以及与 T 共 e 的三角形 T' 组成的是一个凸四边形, 则进行边交换(图 3(c)), 更新 T, T' , 三角形数组 Tri

和有向边数组 Edge, 转 Step3;

Step6 如果 T 以及与 T 共 e 的三角形 T' 组成的是一个凹四边形(图 3(d)), 则需要在 e 上插入一个新点 p3(e 与 p1p2 的交点), 将凹四边形分割为 4 个三角形(图 3(e)), 更新 T, T', 三角形数组 Tri 和有向边数组 Edge, 并将约束边 p1p2 分割成两个部分, 而且将 p3p2 赋值给 l 的 p1p2, 转 Step3。

Step7 结束。

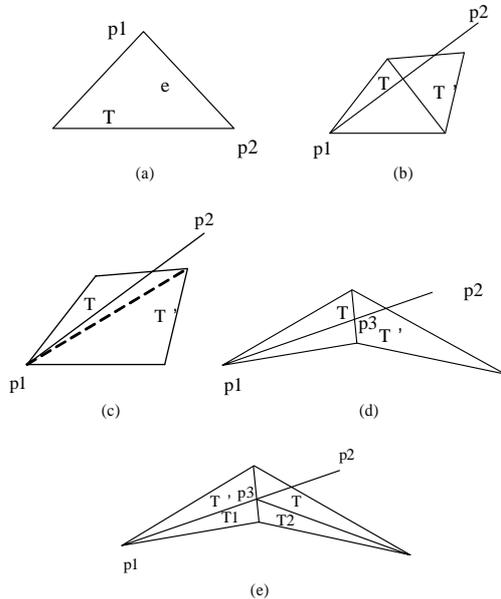


图 3 p1, p2 的各种处理情况

5 实例与结论

以图 4 具体说明点插入和对角线交换过程。输入 PSLG 中, $P=\{A,B,C,D,E,F,G\}$ 7 点, $L=\{EA\}$ 为一条约束边。图 4(a) 为无约束 Delaunay 三角化结果; 图 4(b) 为 DF 边上插入点 H, 生成新的 PSLG, $P=\{A,B,C,H,F,G\}$ 6 点, $L=\{HA\}$ 为新的约束边; 图 4(c) 为 CF 边交换后的结果; 图 4(d) 为 CG 边交换后的结果; 图 4(e) 为对 BG 边交换后的结果。最后进行 LOP 后得到最终约束 DT 结果。

笔者总结了约束边嵌入算法的算法, 提出了一种新的算法。与其他算法相比, 本文算法结合了对角线交换思想和点插入思想, 具有了以下优点:

- (1) 算法可以处理任意影响域的情况, 而且简单实用;
- (2) 算法的时间复杂度与约束边的影响域复杂程度不相关, 只与三角网中与约束边相交的边的条数相关;
- (3) 算法只需在遇到复杂影响域时插入点;
- (4) 算法能容易地扩展到处理约束边(如边界边)上有其他离散点的情况, 而且只要利用三角网的拓扑关系便能高效地解决等高线约束问题。

在实际工程中, 很多情况下离散点集三角剖分的约束条件即离散点分布在任意边界内(外边界和内孔), 常用的处理方法是先将离散点集和边界边的点一起生成初始 Delaunay 三角网, 再将边界边作为约束边嵌入三角网划分出边界内外区域, 最后进行边界剪裁得到最终结果。图 5 所示是运用“插入-交换法”基于实际工程项目的任意边界内离散点集形成的 Delaunay 三角网, 图 6 是图 5 的三角网进行可视化后的结果。

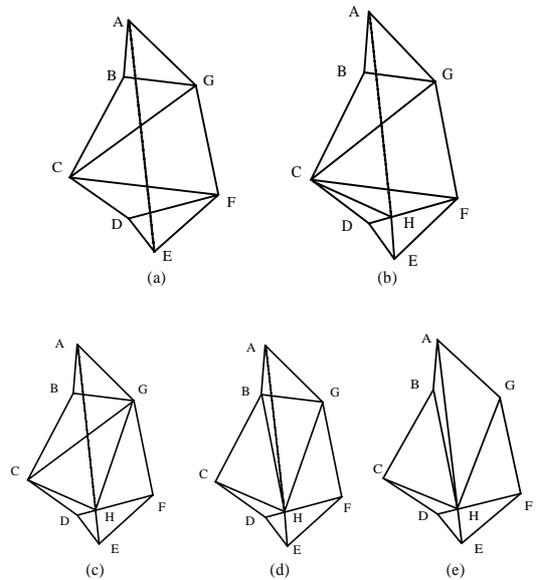


图 4 约束边的嵌入过程

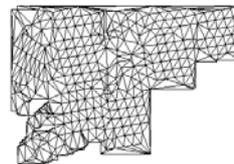


图 5 Delaunay 三角网

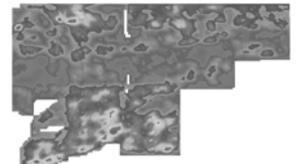


图 6 Delaunay 三角网的三维效果

参考文献

- 1 Bern M, Eppstein D. Mesh Generation and Optimal Triangulation[C]// Proc. of International Conference on Computing in Euclidean Geometry, Singapore. 1992: 23-90.
- 2 闵卫东, 唐泽圣. 二维任意域内点集的 Delaunay 三角划分的算法[J]. 计算机学报, 1995, 18(5): 357-364.
- 3 章孝灿. 快速高精度 DEM 生成技术研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2002.
- 4 卢朝阳, 吴成柯, 陆心如. 简单多边形的优化三角剖分[J]. 电子学报, 1991, 19(2): 82-87.
- 5 卢朝阳, 吴成柯, 陆心如. 优化 TSP 算法的完善及推广[J]. 电子学报, 1994, 22(1): 86-89.
- 6 周晓云, 刘慎权. 实现约束 Delaunay 三角剖分的健壮算法[J]. 计算机学报, 1996, 19(8): 613-624.
- 7 季立新. 约束 Delaunay 三角剖分中强行嵌入约束边的多对角线交换算法[J]. 计算机学报, 1999, 22(10): 1114-1118.
- 8 赵建军, 钟毅芳, 胡于进, 等. 基于面结构的三角化新方法[J]. 计算机学报, 2000, 23(9): 1003-1008.
- 9 简宪华, 崔汉国, 曾茂春, 等. 带内边界约束离散数据的 Delaunay 三角剖分算法研究[J]. 计算机工程, 2001, 27(5): 105-106.
- 10 易法令, 韩德志. 带特征线约束的 Delaunay 三角剖分最优算法的研究及实现[J]. 计算机工程, 2001, 27(6): 32-34.
- 11 崔汉国, 方锡武, 简宪华. 二维约束点集 Delaunay 三角剖分算法研究[J]. 海军工程大学学报, 2003, 15(6): 49-51.