

# 总场-散射场方法在二维 ADI-FDTD 中的实现

郑奎松, 葛德彪

(西安电子科技大学 理学院 陕西 西安 710071)

**摘要:** 提出了一种新的交替方向隐式时域有限差分激励源加入的总场-散射场方法. 在总场边界附近, 二维 TM 波的电磁场格点在每个子时间步都需要加入入射波的相应分量. 根据交替方向隐式时域有限差分迭代公式及格点在总场边界的具体位置共有 14 种情况需要修正, 其中电场格点有 10 种情况. 该方法继承了常规时域有限差分加源的特点, 而且保持了交替方向隐式时域有限差分求解线性方程组的形式不变. 在入射波为平面波时, 计算表明, 当计算时间步长为 Courant-Friedrich-Levy 稳定性条件所限制时间步长的 5 倍时, 总场区的入射波仍具有很好的场量等值线. 利用该方法给出的金属方柱和前端有介质涂层的复杂目标金属机翼散射的数值计算结果验证了其有效性.

**关键词:** 电磁散射; 交替方向隐式时域有限差分方法; 总场-散射场方法; 雷达截面  
**中图分类号:** TN011   **文献标识码:** A   **文章编号:** 1001-240X(2006)02-0205-06

## Implementation of the total-field/scattered-field technique in the 2D ADI-FDTD

ZHENG Kui-song, GE De-biao

(School of Science, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

**Abstract:** The total-field/scattered-field technique of the incident wave introduced into the total field region is dealt with for alternative direction implicit finite-difference time-domain method. By observing the grid points at the vicinity of connecting boundary for the two-dimensional TM wave, the incident wave field components should be added in each sub time step. Based on the computational formulations and the particular location of grid points at or near the connecting boundary, there are 14 cases to be considered, including 10 cases for electric field grid points. This technique inherits the characteristics for the introduction of the incident wave in the conventional FDTD method. The solution to linear system equations in this technique is also consistent with that in the ADI-FDTD method. It is demonstrated that the plane wave can be successfully introduced into the total field region by this technique, even when the time step size is 4 times longer than that of the Courant-Friedrich-Levy limit. Finally, the radar cross sections for a conducting column and an airfoil coated with a lossy medium is computed, showing the feasibility of the proposed technique.

**Key Words:** electromagnetic scattering; ADI-FDTD method; total-field/scattered-field technique; radar cross section

时域有限差分(FDTD)方法是求解 Maxwell 方程的直接时域方法<sup>[1~3]</sup>. 由于传统 FDTD 算法采用显式差分格式, 其时间步长受到 Courant-Friedrich-Levy(CFL)条件限制. 为了克服这一局限性, 在 1999 年提出了交替方向隐式时域有限差分(ADI-FDTD)方法<sup>[4,5]</sup>, 该算法的时间步选取不再受 CFL 稳定性条件的限制, 只与

计算精度有关.

当目标结构或者非均匀网格的最小尺寸远小于波长(或脉冲波有效频段中的最短波长)时,若用常规 FDTD,其时间步长受到 CFL 条件限制,导致计算总时间步数非常大.若采用 ADI-FDTD 就可选择较大的时间步长,节省计算时间,提高效率.文献[6]给出了复杂目标对柱面波散射的二维 ADI-FDTD 方法,但这种算法计算电磁散射时,入射场的设置和引入至关重要.文献[7]给出了一种入射平面波引入方式,但这种加源方式是基于 Berenger 场分裂完全匹配层(PML)的基础上,公式推导复杂,并且在文章中没有给出复杂目标的散射例子.笔者提出了一种基于文献[3]的总场-散射场入射波加入方法.这种方法与常规 FDTD 所用加源方法思路一致,具有继承性,便于操作者掌握,易于实现.

## 1 在二维 ADI-FDTD 中由总场边界加入入射波

### 1.1 二维 TM 波情况

对于二维 TM 波情况,在 ADI-FDTD 中空间离散仍采用 Yee 元胞和常规 FDTD 一样.但在时间的离散取样上,ADI-FDTD 中电场和磁场在  $t = n \Delta t$  和  $(n + 1/2) \Delta t$  时刻都同时取样,而不像常规 FDTD 那样电场与磁场交替取样.并且,在对麦克斯韦方程进行差分离散时,沿时间轴推进区分为两个子时间步,即  $n \rightarrow n + 1/2$  和  $n + 1/2 \rightarrow n + 1$ .在这两个子时间步采取交替隐式差分离散方式:在子时间步  $n \rightarrow n + 1/2$ ,对方程中的  $x$  方向导数取隐式差分格式,  $y$  方向取显式,而在子时间步  $n + 1/2 \rightarrow n + 1$ ,对  $x$  方向导数取显式差分格式,对  $y$  方向导数取隐式<sup>[4,5]</sup>.

根据交替隐式差分规则,可导出二维 TM 波( $E_z$ ,  $H_x$  和  $H_y$ )的 ADI-FDTD 方程<sup>[4,5]</sup>.限于篇幅,这里只给出二维 TM 波第一个子时间步,即  $n \rightarrow n + 1/2$  的离散方程,第二个子时间步  $n + 1/2 \rightarrow n + 1$  的离散方程可类似得到.在  $n \rightarrow n + 1/2$  子时间步,电场分量  $E_z$  的推进计算式为

$$a_i E_z^{n+1/2}(i-1, j) + b_i E_z^{n+1/2}(i, j) + c_i E_z^{n+1/2}(i+1, j) = d_i \quad (1)$$

式中  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  和  $d_i$  为迭代方程的系数,其表达式为

$$\begin{aligned} a_i &= -\frac{1}{(\Delta x)^2} \cdot \frac{\Delta t}{2\epsilon(i, j)} \cdot \frac{\Delta t}{2\mu(i-1/2, j)} \quad (2) \\ b_i &= 1 + \frac{1}{(\Delta x)^2} \cdot \frac{\Delta t}{2\epsilon(i, j)} \cdot \left[ \frac{\Delta t}{2\mu(i-1/2, j)} + \frac{\Delta t}{2\mu(i+1/2, j)} \right] \\ c_i &= -\frac{1}{(\Delta x)^2} \cdot \frac{\Delta t}{2\epsilon(i, j)} \cdot \frac{\Delta t}{2\mu(i+1/2, j)} \\ d_i &= E_z^n(i, j) - \frac{\Delta t}{2\epsilon(i, j) \Delta y} \cdot [H_x^n(i, j+1/2) - H_x^n(i, j-1/2)] + \\ &\quad \frac{\Delta t}{2\epsilon(i, j) \Delta x} \cdot [H_y^n(i+1/2, j) - H_y^n(i-1/2, j)] \end{aligned}$$

磁场分量的推进计算式为

$$H_x^{n+1/2}(i, j+1/2) = H_x^n(i, j+1/2) - \frac{\Delta t}{2\mu(i, j+1/2) \cdot \Delta y} \cdot [E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i, j)] \quad (3)$$

$$\begin{aligned} H_y^{n+1/2}(i+1/2, j) &= H_y^n(i+1/2, j) + \frac{\Delta t}{2\mu(i+1/2, j) \cdot \Delta x} \cdot \\ &\quad [E_z^{n+1/2}(i+1, j) - E_z^{n+1/2}(i, j)] \end{aligned} \quad (4)$$

由式(1)和(2)可见,在计算  $n + 1/2$  时刻  $E_z(i, j)$  时涉及到 7 个格点  $n$  时刻的场值,其空间位置如图 1 所示,其中 3 个电场格点是沿  $x$  轴排列.图中实心圆点(●)为电场格点,箭头(→)代表磁场格点.式(1)又可写为矩阵形式

$$A \cdot X = Y \quad ,$$

其中  $A$ ,  $X$  和  $Y$  分别为

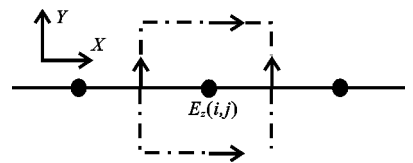


图1 电场分量计算时所涉及到的邻近 7 个格点

$$X = \begin{bmatrix} E_z^{n+1/2}(1, j) \\ E_z^{n+1/2}(i, j) \\ E_z^{n+1/2}(i_{\max}, j) \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_i \\ d_{i_{\max}} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{i_{\max}-1} & b_{i_{\max}-1} & c_{i_{\max}-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_{i_{\max}} & b_{i_{\max}} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

从式(5)可见,  $A$  为三对角条带矩阵, 其首、末元素  $b_1, c_1$  及  $a_{i_{\max}}, b_{i_{\max}}$  需要用吸收边界条件得到. 磁场分量  $H_x$  和  $H_y$  在  $n \rightarrow n + 1/2$  子时间步的计算式(3)和(4)都只涉及到 3 个格点, 如图 2 所示.

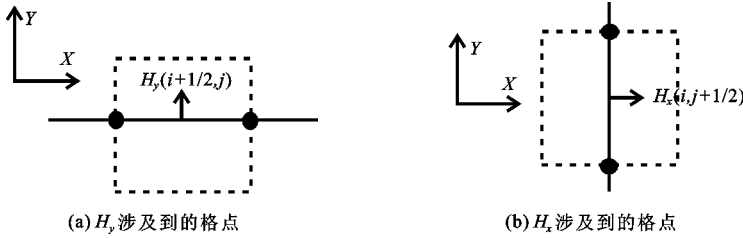


图 2 磁场分量计算时所涉及到的邻近 3 个格点

### 1.2 总场区入射平面波的引入

在散射计算中通常将计算区域划分为总场区和散射场区, 两个区域之间的界面称为总场边界. 散射体位于总场区内, 总场边界附近为无源区, 即电导率  $\sigma = 0$  和导磁率  $\sigma_m = 0$ . 设总场边界上的场分量格点属于总场, 距总场边界  $1/2$  个网格处为总场外边界, 其上场分量属于散射场. 具体来说, 总场区边界范围为  $i_0 \leq i \leq i_a$  且  $j_0 \leq j \leq j_b$ , 其周围是散射场区. 对于 TM 波, 总场边界上有  $E_z$  和  $H_y$  (或  $H_x$ ) 格点, 而总场外边界上只有  $H_x$  或  $H_y$  格点.

公式(1)~(4)所涉及到的格点或者全部属于总场, 或者全部属于散射场. 在总场边界处, 公式中出现一部分格点属于总场, 另一部分属于散射场的情况. 因此, 若认定式(1)和(2)中各项均为总场, 就必须在属于散射场格点项中加上入射场; 或认定式(1)和(2)中各项均为散射场, 就必须在属于总场格点项中减去入射场.

以电场  $E_z$  为例说明如何在总场边界处引入入射平面波. 在  $n \rightarrow n + 1/2$  子时间步, 用(1)和(2)计算电场  $E_z$  时共涉及到 7 个格点. 在总场边界处如果计算的电场格点位于总场边界上, 位于散射场区的格点就需要加上入射场; 如果计算的电场格点位于散射场, 则位于总场区的格点需要减去入射场. 图 3 列出了关于电场  $E_z$  格点需要在总场边界的 4 个边界上修正的 10 种情况. 图中阴影区代表总场. (a) (b) 为总场边界的左侧界面, (c) 为下侧边界, (d) (e) 分别为左下和左上角, (f) (g) 为总场边界的右侧界面, (h) 为上侧边界, (i) (j) 分别为右下和右上角.

根据总场-散射场加入入射波的条件, 可依次给出上述 10 种情况总场边界处的 ADI-FDTD 计算公式. 限于篇幅, 下面只详细讨论图 3(a) 的情况. 观察图 3(a), 式(1)和(2)中只有电场  $E_z(i_0 + 1, j)$  在总场边界上, 其余 6 个格点均属于散射场. 于是式(1)改写为

$$a_{i_0-1} E_z^{n+1/2}(i_0 - 2, j) + b_{i_0-1} E_z^{n+1/2}(i_0 - 1, j) + c_{i_0-1} E_z^{n+1/2}(i_0, j) - c_{i_0-1} E_z^{n+1/2}(i_0, j)_{\text{inc}} = d_{i_0-1} \Big|_{\text{ADI}}, \quad (6)$$

式中下标 inc 代表入射波,  $d_{i_0-1} \Big|_{\text{ADI}}$  如式(2)所示. 则式(6)可改写为

$$a_{i_0-1} E_z^{n+1/2}(i_0 - 2, j) + b_{i_0-1} E_z^{n+1/2}(i_0 - 1, j) + c_{i_0-1} E_z^{n+1/2}(i_0, j) = d'_{i_0-1} \Big|_{\text{ADI}}, \quad (7)$$

其中 
$$d'_{i_0-1} \Big|_{\text{ADI}} = d_{i_0-1} \Big|_{\text{ADI}} + c_{i_0-1} E_z^{n+1/2}(i_0, j)_{\text{inc}}. \quad (8)$$

图 3 中(b)~(j)的 9 种情况可仿照上述过程逐一得出相应公式, 在这里不再一一赘述. 在  $n \rightarrow n + 1/2$  子时间步, 参照公式(3)和(4)及图 2 所示的场量节点示意图, 磁场  $H_x$  和  $H_y$  的相应总场边界条件各有 2 种情况需要对离散方程进行修正, 由于篇幅限制这里略去.

对于  $n + 1/2 \rightarrow n + 1$  子时间步, 电磁场各分量的总场边界条件均可类似得出. 利用总场-散射场的边界条件可在总场区引入平面波.

对于二维 TE 波情况, 可利用对偶原理得出相应公式.

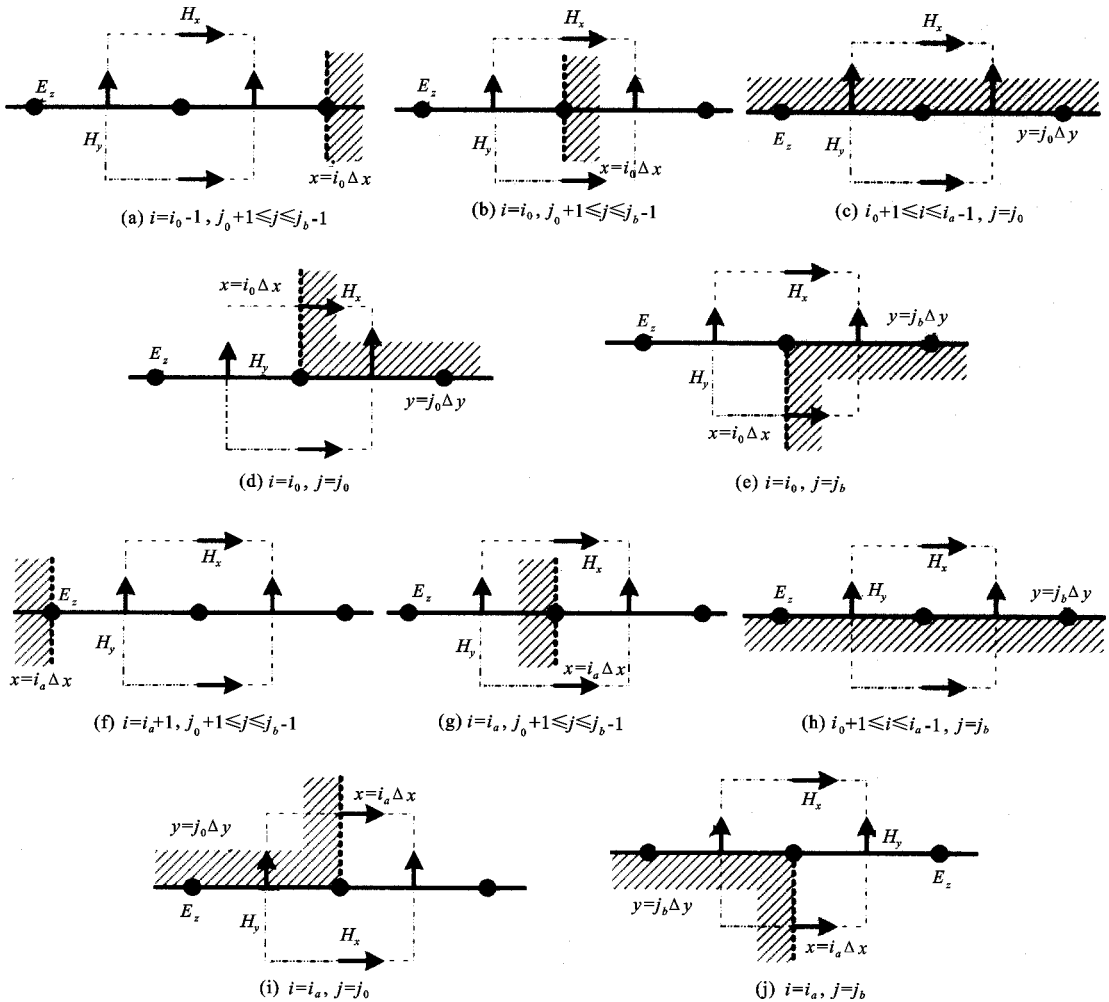


图 3 总场边界处 7 个格点排布的 10 种情况示意图

## 2 数值结果

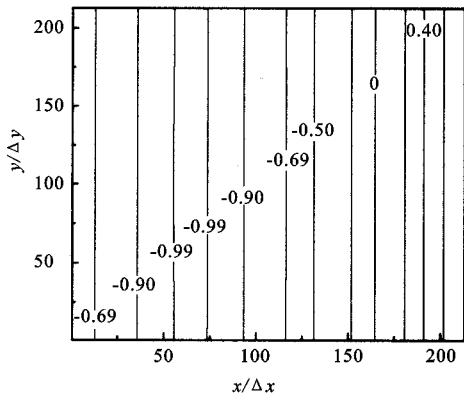
为了验证上述总场边界条件的正确性,下面给出 3 个典型算例.

### 2.1 验证平面波加入

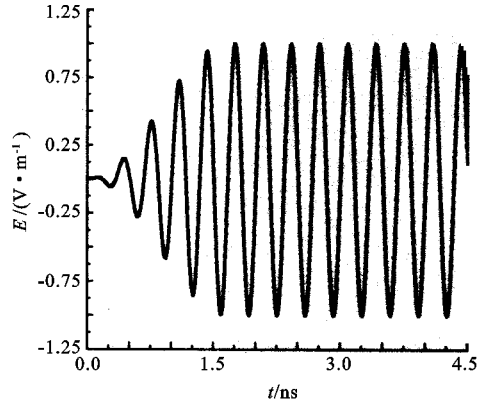
主要验证上一节提出的平面波的加入方法. ADI-FDTD 计算域为  $(-126: 126, -126: 126)$  (单位为离散空间间隔), 总场边界为  $(-106: 106, -106: 106)$ , 计算域中无散射目标. 计算时, 设入射平面波波长  $\lambda = 0.1 \text{ m}$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0.25 \times 10^{-3} \text{ m}$ , 平面波从左向右传播 (TM 波). 满足 CFL 稳定性条件的最大时间步长  $\Delta t_{\text{courant}} = 0.589 \text{ ps}$ , ADI-FDTD 计算时间步长取  $\Delta t_{\text{ADI}} = 2.945 \text{ ps}$ . 计算结果见图 4. 图 4(a) 表示在某个时刻总场区内入射平面波场的  $E_z$  场量的振幅等值线, 其中等值线上的数值为振幅的量值; 图 4(b) 为检测总场区内一点的场值随时间的变化情况, 其中在总场边界加入入射源时采用了升余弦脉冲函数加窗技术. 因此, 从图 4 可清楚地看出, 在 ADI-FDTD 总场区加入了均匀的平面波.

### 2.2 金属方柱

设边长为  $a = 2\lambda$ ,  $\lambda = 1 \times 10^{-2} \text{ m}$ ,  $\delta = \lambda/40$ , 平面波从左边入射到目标. 满足 CFL 稳定性条件的最大时间步长  $\Delta t_{\text{courant}} = 0.589 \text{ ps}$ . ADI-FDTD 计算中取  $\Delta t_{\text{ADI}} = 2.945 \text{ ps}$ , 双站 RCS 结果见图 5. 作为比较, 图中还给出了矩量法 (MoM) 的计算结果, 两者符合很好. 附带说明, 计算 RCS 需要近远场外推, 在 ADI-FDTD 中, 外推过程与常规 FDTD 基本相同, 并且不用考虑常规 FDTD 中电场与磁场分量的半个时间步的差异.



(a) 平面波  $E_z$  场量振幅等值线



(b) 检测一点的场值变化情况

图 4 总场区内加入入射平面波 (TM 波)

从图 5 可发现 随着时间步长  $\Delta t_{ADI}$  的增大 ,ADI-FDTD 计算结果与 FDTD 方法计算得到的结果不完全相同 ,这一方面是由于离散误差和数值计算误差所造成的 ;另一方面是由于吸收边界条件截断效果随着时间步长  $\Delta t_{ADI}$  的增大而出现吸收效果不好所造成的 ,这个原因在后面的工作中得到了证实 ,ADI-FDTD 方法中选取何种吸收边界是笔者下一步工作的重点.

### 2.3 前端有介质涂层的机翼模型

前端有介质涂层的二维复杂目标机翼的离散模型如图 6(a) 所示. 复杂目标的建模可参考文献 [8]. 平面波迎头照射. 机翼最大尺寸沿  $x$  方向 24.00 cm ,沿  $y$  方向 2.16 cm ,机翼前端涂层为有耗介质层 ,电磁参数为  $\epsilon = (19.86 + i 2.18)\epsilon_0$  , $\mu = \mu_0$ . FDTD 计算时离散间隔  $\delta$  为 0.25 mm ,机翼的目标区域约为  $980 \times 105\delta^2$ . 入射源采用高斯脉冲形式<sup>[31]</sup> ,其中  $\tau = 25$  ps , $t_0 = 0.8\tau$ . 分别用 ADI-FDTD 和常规 FDTD 计算前端有介质涂层的机翼模型的后向 RCS 结果见图 6(b). 在常规 FDTD 中 ,稳定性条件要求时间步长最大值  $\Delta t_{courant} = 0.589$  ps ,本例取为  $\Delta t_{FDTD} = \delta / (2c) = 0.417$  ps. ADI-FDTD 两次计算所取的时间步长  $\Delta t_{ADI}$  分别为 0.417 ps 和 2.085 ps ,计算结果如图 6(b)所示. 从图可见 ,ADI-FDTD 和 FDTD 的结果符合很好. 为了获得散射目标完全响应的时域波形 ,利用 ADI-FDTD 方法在上述两种时间步长情况计算所耗的时间分别为 923.90 s 和 193.28 s ,第 2 次计算时间大约为第 1 次的 1/5 ,表明加大时间步长可减少计算所耗时间.

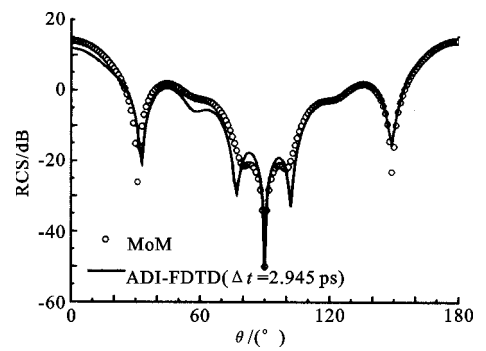
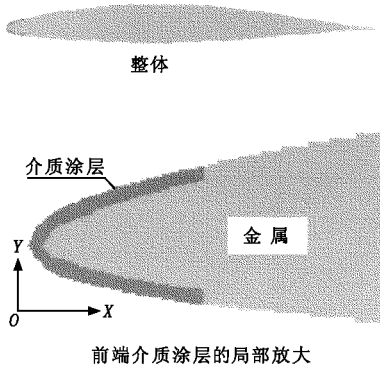
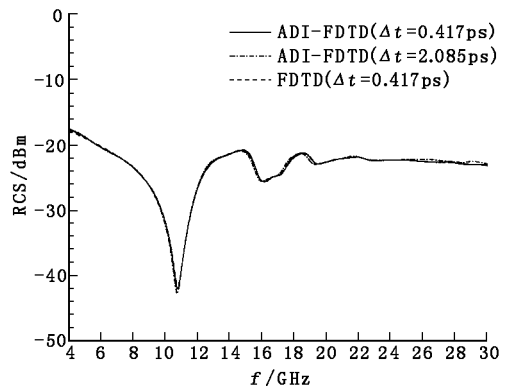


图 5 金属方柱的双站 RCS (TE 波)



(a) 离散模型



(b) 后向 RCS

图 6 前端有介质涂层的机翼模型 (TM 波)

### 3 结 论

在 ADI-FDTD 方法中将空间沿坐标轴的方向导数交替采用隐式差分格式, 随时间轴逐步推进计算时, 需把常规 FDTD 的时间步  $n \rightarrow n+1$  区分为两个子时间步, 即  $n \rightarrow n+1/2$  和  $n+1/2 \rightarrow n+1$ . 因此, 在总场边界处利用等效原理引入入射平面波时也需要分为两个子时间步进行. 对于各子时间步, 根据计算格点在总场边界处的位置, 二维 TM 波的电场分量  $E_z$  需要修正的情况有 10 种, 磁场分量  $H_x$  和  $H_y$  各有 2 种情况需要修正. 这样, 就可在 ADI-FDTD 计算域的总场区成功地引入平面波, 从而能方便地模拟电磁散射问题.

数值算例表明 ADI-FDTD 入射波加入方法是可行的, 特别是当 ADI-FDTD 方法的时间步达到 CFL 稳定性条件所限制时间步的 5 倍时, 利用总场-散射场方法在总场区加入的入射平面波仍然具有良好的振幅等值线, 这为计算目标电磁散射提供了很好的激励源. 数值结果也说明了总场边界条件不仅具有计算规则目标(即简单目标散射)的能力, 也具有计算复杂目标电磁散射问题的能力. 当 ADI-FDTD 方法时间步长为 CFL 稳定性条件所限制时间步长的 5 倍时, 计算总时间相应地减小为原来的约 1/5, 节省了计算时间, 提高了计算效率, 并且计算精度保持在可接受的范围之内. 此外, 比较图 5 和图 6 给出的计算结果可发现, 在瞬态场照射下目标的后向 RCS 结果比稳态场照射下目标的双站 RCS 计算精度要好得多.

#### 参考文献:

- [1] Yee K S. Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media[J]. IEEE Trans on Antennas Propagat, 1966, 14(3):302-307.
- [2] Taflov A, Hagness S C. Computational Electrodynamics—the Finite-Difference Time-domain Method[M]. Boston: Artech House, 2000.
- [3] 葛德彪, 阎玉波. 电磁波时域有限差分方法[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2002.
- [4] Zheng F, Chen Z, Zhang J. A Finite-Difference Time-Domain Method without the Courant Stability Conditions[J]. IEEE Microwave and Guided Wave Letters, 1999, 9(11):441-443.
- [5] Namiki T. A New FDTD Algorithm Based on Alternating-Direction Implicit Method[J]. IEEE Trans on Microwave Theory Tech, 1999, 47(10):2003-2007.
- [6] Zheng Kuisong, Ge Debiao, Tian Chunming. 2D ADI-FDTD Method Applied to EM Scattering with Cylindrical Wave Source Illumination[J]. Journal of Xidian University, 2005, 32(2):197-200.
- [7] 汤 炜, 阎玉波, 李清亮, 等. 一种新时域交替隐式差分算法在散射问题中的应用[J]. 物理学报, 2004, 53(12):4173-4180.
- [8] Yan Yubo, Shi Shouyuan, Ge Debiao. Complex Object Modeling for the FDTD Method[J]. Journal of Xidian University, 1998, 25(3):389-392.

(编辑: 郭 华)

(上接第 172 页)

#### 参考文献:

- [1] Li F K, Held D N. Doppler Parameter Estimation for Spaceborne Synthetic Aperture Radar[J]. IEEE Trans on GRS, 1985, 23(1):47-56.
- [2] Wahl D E, Eichel P H, Ghiglia D C, et al. Phase Gradient Autofocus—a Robust Tool for High Resolution SAR Phase Correction [J]. IEEE Trans on AES, 1994, 30(3):827-835.
- [3] Zheng Yiming, Bao Zheng. An Improved Phase Error Estimation Algorithm[J]. Journal of Xidian University, 2001, 28(4):472-477.
- [4] 武昕伟, 朱兆达. 一种基于最小熵准则的 SAR 图像自聚焦算法[J]. 系统工程与电子技术, 2003, 25(7):865-869.
- [5] Mallat S. 信号处理的小波导引[M]. 北京: 机械工业出版社, 2003. 24-28.
- [6] 张澄波. 综合孔径雷达原理、系统分析与应用[M]. 北京: 科学出版社, 1989. 163-178.

(编辑: 郭 华)

