附　　录

弹性圆环应力场、位移场的求解:

设有圆环 S，内外周边为两个同心圆 L_0 和 L_1;
圆环所受外力（见图 5）为:

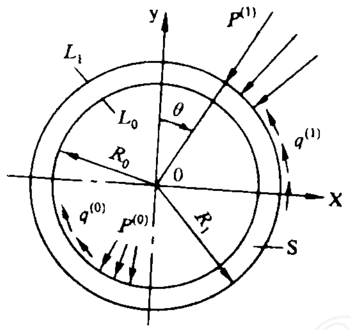

图 5　弹性圆环计算图

Fig. 5　The calculation illustration of the elastic ring

当 $r=R_0$ 时，$\begin{cases} P^{(0)} = P_0^{(0)} + P_2^{(0)}\cos 2\theta \\ q^{(0)} = q_2^{(0)}\sin 2\theta \end{cases}$　　(A－1)

当 $r=R_1$ 时，$\begin{cases} p^{(1)} = p_0^{(1)} + p_2^{(1)}\cos 2\theta \\ q^{(1)} = q_2^{(1)}\sin 2\theta \end{cases}$　　(A－2)

对于所研究的环，其边界条件可以表示为:

当 $r=R_j$　（$j=0$，1）时，

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = P^{(j)} - iq^{(j)} = A_0^{(j)} + A_2^{(j)}e^{i2\theta} + A_{-2}^{(j)}e^{-i2\theta} \tag{A-3}$$

式中:

$$\begin{cases} A_0^{(j)} = p_0^{(j)} \\ A_2^{(j)} = \dfrac{1}{2}\left(p_2^{(j)} - q_2^{(j)}\right) \\ A_{-2}^{(j)} = \dfrac{1}{2}\left(p_2^{(j)} - q_2^{(j)}\right) \end{cases}$$

在弹性圆环中各应力分量满足下述关系式:

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \Phi - \Phi' - e^{2i\theta}(\overline{Z}\cdot\Phi' + \psi) \tag{A-4}$$

式中：Φ 和 ψ—复变数 Z 的柯洛索夫函数.

复变数 Z 与极坐标有如下关系：

$$Z = re^{i\theta} \quad ; \quad \overline{Z} = re^{-i\theta} \qquad (A-5)$$

将柯洛索夫函数变换成 Z 的幂级数形式：

$$\Phi(Z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \cdot Z^k \quad ; \quad \psi(Z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k \cdot Z^k \qquad (A-6)$$

然后将式(A-5)，(A-6)代入(A-4)式有：

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty}\left[(1-k)a_k r^k + \overline{a}_{-k} r^{-k} - b_{k-2} r^{k-2}\right]e^{ik\theta} \qquad (A-7)$$

(A-7)式在边界 $r = R_j (j=0,\ 1)$ 上应满足边界条件式(A-3)，即有：

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left[(1-k)a_k R_j^k + \overline{a}_{-k} R_j^{-k} - b_{k-2} R_j^{k-2}\right]e^{ik\theta} = A_0^{(j)} + A_2^{(j)} e^{i2\theta} + A_{-2}^{(j)} e^{-i2\theta}$$

比较等式两边不依赖于 θ 的项，得出两个方程：

$$a_0 + \overline{a}_0 - b_{-2} R_j^{-2} = P_0^{(j)} \qquad (j=0,\ 1) \qquad (A-8)$$

比较等式两边带有 $e^{ik\theta}$ 的项有：

当 $k \neq \pm 2$ 时，$a_k = \overline{a}_{-k} = b_{k-2} = \overline{b}_{-k-2} = 0$

当 $k = \pm 2$ 时，$(1-k)a_k \cdot R_j^k + \overline{a}_{-k} \cdot R_j^{-k} - b_{k-2} \cdot R_j^{k-2} = A_k^{(j)}$ $(j=0,\ 1)$ $(A-9)$

(A-9)式两边乘以 R_j^{2-k}，然后以第二方程(j-1)减去第一方程(j-0)得：

$$(1-k)\left(R_1^2 - R_0^2\right)a_k + \left(R_1^{2-2k} - R_0^{2-2k}\right)\overline{a}_{-k} = A_k^{(1)} \cdot R_1^{2-k} - A_k^{(0)} \cdot R_0^{2-k} \qquad (A-10)$$

变换上式中下角 k 的正负号，并取系数 a 的共轭值，将有：

$$(1+k)\left(R_1^2 - R_0^2\right)\overline{a}_{-k} + \left(R_1^{2+2k} - R_0^{2+2k}\right)a_k = A_{-k}^{(1)} \cdot R_1^{2+k} - A_{-k}^{(0)} \cdot R_0^{2+k} \qquad (A-11)$$

将 $k=2$ 代入(A-10)，(A-11)式并联解两方程可以求得系数 a_2，$\overline{a}_{-2}$ 为：

$$a_2 = \left(a_{21} \cdot p_2^{(1)} + a_{22} \cdot q_2^{(1)} + a_{23} \cdot p_2^{(0)} + a_{24} \cdot q_2^{(0)}\right) / R_0^2$$

$$\overline{a}_{-2} = (\overline{a}_{-21} \cdot p_2^{(1)} + \overline{a}_{-22} \cdot q_2^{(1)} + \overline{a}_{-23} \cdot p_2^{(0)} + a_{-24} \cdot q_2^{(0)}) \cdot R_0^2 \qquad (A-12)$$

式中: $a_{21}=(3+c^2)\cdot c^2/H$; $a_{22}=-(3-c^2)c^2\cdot/H$

$$
\begin{aligned}
&a_{31}=-(3c^2+1)/H \quad ; \quad a_{24}=(3c^2-1)/H \\
&\bar{a}_{-21}=-c^2(2c^4+c^2+1)/H \quad ; \quad \bar{a}_{-22}=c^2(c^2+1)/H \\
&\bar{a}_{-23}=c^2(c^4+c^2+2)/H \quad ; \quad \bar{a}_{-24}=-c^4(c^2+1)/H \\
&H=2(c^2-1)^3 \quad ; \quad c=R_1/R_0
\end{aligned}
\tag{A-13}
$$

将a_2, $\bar{a}_{-2}$代入(A−9)式可以求出$k=2$时，系数b_0及$\bar{b}_{-4}$为:

$$
\begin{aligned}
&b_0=b_{01}p_2^{(1)}+b_{02}q_2^{(1)}+b_{03}p_2^{(0)}+b_{04}q_2^{(0)} \\
&\bar{b}_{-4}=(\bar{b}_{-41}p_2^{(1)}+\bar{b}_{-42}q_2^{(1)}+\bar{b}_{-43}p_2^{(0)}+\bar{b}_{-44}q_2^{(0)})R_0^4
\end{aligned}
\tag{A-14}
$$

式中: $b_{01}=-2c^2(c^4+c^2+2)/H$; $b_{02}=4c^2/H$

$$
\begin{aligned}
&b_{03}=2(2c^4+c^2+1)/H \quad ; \quad b_{04}=-4c^4/H \\
&\bar{b}_{-41}=-2c^4(3c^2+1)/H \quad ; \quad \bar{b}_{-42}=4c^4/H \\
&\bar{b}_{-43}=2c^4(c^2+3)/H \quad ; \quad \bar{b}_{-44}=-4c^6/H
\end{aligned}
\tag{A-15}
$$

由(A−8)式可以求出:

$$
a_0=\frac{1}{2}\cdot\frac{p_0^{(1)}\cdot c^2-p_0^{(0)}}{c^2-1} \quad ; \quad b_{-2}=\frac{\left(p_0^{(1)}-p_0^{(0)}\right)\cdot R_1^2}{c^2-1}
\tag{A-16}
$$

将(A−12), (A−14), (A−16)式代入(A−6)式即确定出了满足边界条件的柯洛索夫函数 Φ 和 ψ. 此时弹性圆环的应力由下式确定:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_r+\sigma_\theta=2(\Phi(Z)+\overline{\Phi(Z)})=Re[\Phi(Z)] \\
&\sigma_\theta-\sigma_r+2i\tau r\theta=2[Z\Phi'(Z)+\psi(Z)]\cdot e^{i2\theta}
\end{aligned}
\tag{A-17}
$$

将Φ, ψ代入(A−17)，并解方程即得弹性圆环的应力场为:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_r=\frac{1}{c^2-1}\left[c^2p_0^{(1)}-p_0^{(0)}-\left(p_0^{(1)}-p_0^{(0)}\right)\frac{R_1^2}{r^2}\right]+\left(4\bar{a}_{-2}r^{-2}-b_0-\bar{b}_{-4}r^{-4}\right)\cos2\theta \\
&\sigma_\theta=\frac{1}{c^2-1}\left[c^2p_0^{(1)}-p_0^{(0)}+\left(p_0^{(1)}-p_0^{(0)}\right)\frac{R_1^2}{r^2}\right]+\left(4a_2r^2+b_0+\bar{b}_{-4}r^{-4}\right)\cos2\theta \\
&\tau_{r\theta}=\left(2a_2r^2+2\bar{a}_{-2}r^{-2}+b_0-\bar{b}_{-4}r^{-4}\right)\sin2\theta
\end{aligned}
\tag{A-18}
$$

环的位移由弹性力学中的下述关系式来确定：

$$2G(u+iv)=e^{-i\theta}[x\varphi(Z)-Z\overline{\varphi}(Z)-\Psi(Z)] \tag{A-19}$$

式中：u，v 分别为径向和周向位移；$\varphi(Z)$，$\Psi(Z)$为复合势：

$$\begin{aligned}\varphi(Z)&=\int\Phi(Z)dZ=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}\cdot Z^{k+1}+c\\ \Psi(Z)&=\int\psi(Z)dZ=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{b_k}{k+1}\cdot Z^{k+1}+c_1\end{aligned} \tag{A-20}$$

将(A−20)式代人(A−19)式即可求得环的位移：

$$\begin{cases}u=u_0+\dfrac{1}{2G}[x\left(\dfrac{a_2}{3}r^3-\overline{a}_{-2}r^{-1}\right)-\overline{a}_{-2}r^{-1}-a_2r^3+\dfrac{\overline{b}_{-4}}{3}r^{-3}-b_0r]\cos2\theta\\ v=\dfrac{1}{2G}[x\left(\dfrac{a_2}{3}r^3-\overline{a}_{-2}r^{-1}\right)-\overline{a}_{-2}r^{-1}+a_2r^3+\dfrac{\overline{b}_{-4}}{3}r^{-3}-b_0r]\sin2\theta\end{cases} \tag{A-21}$$

式中：$u_0=\dfrac{r}{4G(c^2-1)}\{p_0^{(0)}\left[c^2(x-1)+2\left(\dfrac{R_1}{r}\right)^2\right]-p_0^{(0)}\left[x-1+2\left(\dfrac{R_1}{r}\right)^2\right]\}$

$x=3-4\mu$

a_2，$\overline{a}_{-2}$，b_0，$\overline{b}_{-4}$同(A−12)，(A−14)式.