基于有限元方法的陆海大地水准面衔接

刘缵武[1,2]，　陶大欣[2]，　姚　红[1,2]，　于锦海[3]，　陈　涛[1]
(1. 信息工程大学理学院,郑州 450001；　2. 信息工程大学测绘学院,郑州 450052；　3. 中国科学院研究生院,北京 100049)

摘　要　大陆上用重力数据和 GPS 水准数据确定(似)大地水准面,海洋上用卫星测高数据确定(似)大地水准面. 由于沿海地区和近岸海域往往缺少完好的重力数据,近岸海域卫星测高数据质量相对较差,两类大地水准面在陆海相接区域精度偏低且存在拼合差. 纯几何方法拟合陆海局部区域大地水准面,不能顾及大地水准面的物理特性,拟合结果不稳定. 顾及到大地水准面的物理特性,依据其在局部所应满足的数学物理方程,拟合陆海局部区域大地水准面问题,转化为 Laplace 第一边值问题. 讨论了有限元法衔接陆海局部区域大地水准面的数学思想,给出了相应的数学模型.

关键词　有限元法,陆海大地水准面衔接,数学模型

中图分类号　P313　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1004-2903(2008)04-1138-05

Joining the mainland geoid and the ocean geoid by the finite element method

LIU Zuan-wu[1,2]，　TAO Da-xin[2]，　YAO Hong[1,2]，　YU Jin-hai[3]，　CHEN Tao[1]
(1. *Basis Pedagogic Department*, *Information Engineering University*, *Zhengzhou* 450052, *China*;
2. *Institute of Surveying and Mapping*, *Information Engineering University*, *Zhengzhou* 450052, *China*;
3. *Graduate University of Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100049, *China*)

Abstract　The mainland geoid is derived mainly from land gravity data and GPS measurements, and the ocean geoid is derived mainly from the satellite altimeter data. The difference between mainland geoid and ocean geoid along their merge boundary area is caused because of the sparse gravity data and the poor quality of satellite altimeter data. Taking account of the physical characteristics of geoid, and according to the equations of mathematical physics of geoid in a local area, we transform the mainland-ocean merge geoid problem into the Laplace boundary value problem. Then, the ideas of mathematics joining the mainland geoid and the ocean geoid along their merge boundary area is discussed based on the finite element method, and a relevant mathematical model is given in the paper.

Keywords　finite element method, mainland-ocean merge geoid, mathematical model

0　引　言

我国大陆地区(似)大地水准面是利用高分辨率 DTM 和重力资料推算的重力大地水准面,并经与我国 GPS 水准所构成的高程异常控制网拟合,已具有分米级精度[1]. 我国海域大地水准面主要是利用卫星测高数据计算垂线偏差反解出来的,即由卫星测高剖面梯度数据计算海洋重力垂线偏差,再用 Molodensky 公式反解大地水准面高. 尽管海洋上没有大地水准面高的直接观测值,不能以实测值作检核,但目前我国海域大地水准面内部检核已具有厘米级精度[2]. 可以认为陆海两类大地水准面都已达到足够的精度,可以满足多数用户的需要.

由重力数据和 GPS 水准数据确定的大陆(似)大地水准面,和由卫星测高数据确定的海洋(似)大地水准面,从理论上讲,如果所采用的参考椭球相同,在陆海相接区域两类大地水准面应是无隙拼合,它们可以构成一个完整的包括陆地和海洋在内的大地水准面. 但遗憾的是,由于沿海地区和近岸海域往往缺少完好的重力数据,这降低了计算大陆沿海陆地局部区域重力大地水准面的精度;而卫星测高数据在近岸海域质量相对较差,这也影响了近岸海域

收稿日期　2007-11-10；　**修回日期**　2008-02-20.
基金项目　国家自然科学基金项目(40374001,40674039)联合资助.
作者简介　刘缵武,教授，主要从事数学结合地球物理学方面的研究.(E-mail:liuzuanwu@163.com)

测高大地水准面的精度. 因此,两类大地水准面在陆海相接地区精度偏低且存在拼合差.

由鉴于此,分析研究陆海两个大地水准面的拼接问题已显得很有必要. 一种方案是,在陆海毗邻的局部地区,利用沿海大陆部分实测格网平均重力异常和近岸海区测高格网平均重力异常,重新推算陆海毗邻局部区域统一的重力大地水准面. 如前所述,这里所采用的陆海毗邻区域的数据质量较差,以此构建的局部大地水准面往往失真.

目前,在陆海交接的区域,多是用“几何法”进行曲面拟合[3],以使大陆上的重力大地水准面和海洋上的测高大地水准面衔接起来. 例如,平面拟合,二次曲面拟合,多面函数拟合,样条拟合等. 显然,这种纯几何的方法拟合的曲面不具有大地水准面的物理特性,其拟合结果往往不稳定.

2 拼接陆海大地水准面的有限元思想

我们知道,大地水准面是一个均衡物理面,大地水准面高 N 可以用一个调和函数 $N(x,y,z)$ 来表示[4,5],它满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}=0, \tag{1}$$

在陆海交接的局部区域,N 可以看作是 x,y 的二元函数 $N(x,y)$,它满足 2 维 Laplace 第一边值问题

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}=0, \tag{2}$$

$$N(x,y)|_L=f(x,y), \tag{3}$$

式中 ,L 表示所选陆海毗邻局部区域的边界,$f(x,y)$ 为其上点的已知大地水准面高.

有限元法解 Laplace 边值问题,首先根据变分原理[5~7],将上述问题转化为求以下泛函的极小值问题,

$$\begin{cases} J[u(x,y)]=\dfrac{1}{2}\iint\limits_D[{u_x}^2+{u_y}^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Rightarrow\min \\ u(x,y)|_L=f(x,y) \end{cases}, \tag{4}$$

然后构造由分段(片)连续函数构成的有限维函数空间,利用有限元方法[6~8],便得到有限元方程组. 最后解这个代数方程组[9,10]就得到陆海毗邻局部区域大地水准面高的有限元近似解.

3 拼接陆海大地水准面的有限元模型

有限元方法的逼近精度,依赖于边界已知点的数值精度,也和边界已知点的数量有关. 由于陆海毗邻区域边界大地水准面布网比较稀疏,尤其是毗邻区域(带状)横向边界内部点大地水准面高的质量较差,不宜作为定解点采用. 为提高有限元法的逼近精度,首先加密边界点.

3.1 加密边界点

设边界上相邻两已知点占有区间$[a,b]$,端点处大地水准面高已知. 在$[a,b]$上大地水准面高(用 $u(x)$ 表示)对应 Laplace 边值问题

$$\begin{cases} u_{xx}=0, & x\in(a,b) \\ u(a)=u_a, & u(b)=u_b \end{cases}, \tag{5}$$

则相应变分问题为

$$\begin{cases} J(u)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^b u_x^2 dx\Rightarrow\min \\ u(a)=u_a, \quad u(b)=u_b \end{cases}, \tag{6}$$

3.1.1 划分单元

用节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 将区间$[a,b]$剖分为 n 个不重叠的小区间(单元)

$$E_i=[x_i,x_{i+1}], \quad h_i=x_{i+1}-x_i,$$
$$i=0,1,2,\cdots,n-1,$$

(一般情况下可采用均匀分划).

3.1.2 建立线性元

设在 E_i 上 $u(x)$是线性函数(由于 $u(x)$光滑程度较好,也可用高次元逼近),节点处 $u(x_i)=u_i$, $u(x_{i+1})=u_{i+1}$已知,则

$$u(x)=\frac{x_{i+1}-x}{h_i}u_i+\frac{x-x_i}{h_i}u_{i+1}$$

$$x\in E_i, ?i=0,1.2,\cdots,n-1.$$

从而在$[a,b]$上有

$$u(x)=\sum_{i=0}^n u_i\varphi_i(x), \quad x\in[a,b] \tag{7}$$

式中 $\varphi_i(x)$为整体节点基函数:

$$\begin{cases} \varphi_i(x)=\begin{cases}(x-x_{i-1})/h_{i-1}, & x\in[x_{i-1},x_i] \\ (x_{i+1}-x)/h_i, & x\in[x_i,x_{i+1}] \\ 0, & 其它\end{cases} \\ \varphi_0(x)=\begin{cases}(x_1-x)/h_0, & x\in[x_0,x_1] \\ 0, & 其它\end{cases} \\ \varphi_n(x)=\begin{cases}(x-x_{n-1})/h_{n-1}, & x\in[x_{n-1},x_n] \\ 0, & 其它\end{cases} \end{cases}$$

$$且\begin{cases} \varphi_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j \\ 0, & i\neq j\end{cases} \\ \varphi_i(x)\varphi_j(x)=0, & |i-j|\geqslant 2 \\ \varphi'_i(x)\varphi'_j(x)=0, & |i-j|\geqslant 2 \end{cases}$$

3.1.3 构造有限元方程

依据有限元方法[5],问题(5)对应有限元方程

$$\boldsymbol{Ku}=\boldsymbol{b}, \tag{8}$$

式中

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1,n-1} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n-1,1} & k_{n-1,2} & \cdots & k_{n-1,n-1} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} \dfrac{u_a}{h_0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dfrac{u_b}{h_{n-1}} \end{bmatrix},$$

$$k_{ij}=\int_a^b \varphi'_i(x)\varphi'_j(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} \dfrac{1}{h_{i-1}}+\dfrac{1}{h_i}, & j=i \\ -\dfrac{1}{h_i}, & j=i+1 \\ -\dfrac{1}{h_{i-1}}, & j=i-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

$$i=1,2,\cdots,n-1$$

$\boldsymbol{K}$ 是三对角对称正定矩阵,可用追赶法解方程(8).将解 $u_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 连同 $u_0=u_a, u_n=u_b$ 代入(7)式,即得边界段 $[a,b]$ 上大地水准面高的有限元近似解表达式,据此可以计算该边界段上一切需要的边界点大地水准面高数值.

3.2 拼接陆海大地水准面的有限元法

现在陆海毗邻局部区域边界上已经有了比较稠密的精度较高的大地水准面高数值.有限元法拼接陆海大地水准面,即在陆海毗邻局部区域逼近大地水准面,类似于上节讨论,需要经过以下步骤.

3.2.1 划分单元

把陆海毗邻局部区域分割成一系列三角形单元的组合,三角形的顶点称为节点.注意:(1)为了方便构造插值型函数,要求每个单元的顶点只能是相邻单元的顶点.(2)为了保证有限元解有较好的精度,要求每个单元中尽量避免出现大的钝角、大的边长和很小的内角.(3)如参考高分辨率的数字地形模型(DTM),可在地形变化较大的地方把单元分的细密些;而变化比较平缓处,相应的三角网格可以稀一点.相隔很远的单元之间,相应边长可相差数倍,但从稀到密应是逐渐过渡的,而不是急剧变化的.(4)单元的编号可以任意,但节点编号的顺序将直接影响有限元方程组系数阵的结构(带宽).我们要求所有两个相邻节点编号之差的绝对值中的最大者尽量小.

3.2.2 建立线性元

在每个单元上,不妨假定大地水准面高 N 是点位(x, y)的线性函数 $u(x,y)$,即设

$$u=ax+by+c, \tag{9}$$

利用该单元 $e=\Delta P_iP_jP_m$(它们的顺序是逆时针的)上三个节点所对应的值 u_i,u_j,u_m,由线性方程组

$$\begin{cases} ax_i+by_i+c=u_i \\ ax_j+by_j+c=u_j \\ ax_m+by_m+c=u_m \end{cases}$$

解得模型参数

$$a=\frac{1}{2\Delta_e}\left[\begin{vmatrix} y_j & 1 \\ y_m & 1 \end{vmatrix}u_i+\begin{vmatrix} y_m & 1 \\ y_i & 1 \end{vmatrix}u_j+\begin{vmatrix} y_i & 1 \\ y_j & 1 \end{vmatrix}u_m\right],$$

$$b=\frac{1}{2\Delta_e}\left[-\begin{vmatrix} x_j & 1 \\ x_m & 1 \end{vmatrix}u_i-\begin{vmatrix} x_m & 1 \\ x_i & 1 \end{vmatrix}u_j-\begin{vmatrix} x_i & 1 \\ x_j & 1 \end{vmatrix}u_m\right],$$

$$c=\frac{1}{2\Delta_e}\left[\begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix}u_i+\begin{vmatrix} x_m & y_m \\ x_i & y_i \end{vmatrix}u_j+\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}u_m\right],$$

其中

$$\Delta_e=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \end{vmatrix}$$

是三角形单元 $e=\Delta P_iP_jP_m$ 的面积.把它们代入(9)式,得到单元 e 上的插值函数

$$u=f_i(x,y)u_i+f_j(x,y)u_j+f_m(x,y)u_m, \tag{10}$$

其中

$$f_i=\frac{1}{2\Delta_e}[a_ix+b_iy+c_i],$$

$$a_i=\begin{vmatrix} y_j & 1 \\ y_m & 1 \end{vmatrix}, b_i=-\begin{vmatrix} x_j & 1 \\ x_m & 1 \end{vmatrix}, c_i=\begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix},$$

f_j,f_m 以及常数 a_j,b_j,c_j,a_m,b_m,c_m 的表达式,可以由 f_i,a_i,b_i,c_i 的表达式通过脚标轮换 $i\to j\to m\to i$ 得到.记 $\boldsymbol{u}_e=[u_i,u_j,u_m]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{f}=[f_i,f_j,f_m]^{\mathrm{T}}$ 在单元 e 上则有

$$u=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_e.$$

3.2.3 构建刚度矩阵

在单元 $e=\Delta P_iP_jP_m$ 上,单元刚度矩阵

$$\boldsymbol{K}_e=\begin{bmatrix} k^e_{ii} & k^e_{ij} & k^e_{im} \\ k^e_{ji} & k^e_{jj} & k^e_{jm} \\ k^e_{mi} & k^e_{mj} & k^e_{mm} \end{bmatrix}$$

其中

$$k^e_{st}=\Delta_e\left[\frac{\partial f_s}{\partial x}\frac{\partial f_t}{\partial x}+\frac{\partial f_s}{\partial y}\frac{\partial f_t}{\partial y}\right]$$

$$=\frac{1}{4\Delta_e}(a_sa_t+b_sb_t)\ (s,t=i,j,m)$$

依据有限元方法,有限元方程为

$$\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{u}_e = \boldsymbol{0}. \tag{11}$$

容易验证系数矩阵 $\boldsymbol{K}_e$ 是对称正定矩阵.

为了便于叠加，需对 $\boldsymbol{u}_e$，$\boldsymbol{K}_e$ 进行扩充. 设所选陆海毗邻局部区域经剖分后共有 NE 个单元，N 个节点，则可将 $\boldsymbol{u}_e$，$\boldsymbol{K}_e$ 分别扩充成 N 维向量和 $N\times N$ 方阵. 单元节点的编号序数 i,j,m 可按实际大小放在向量和矩阵的相应行列上. 例如，当 $i<j<m$ 时

$$\boldsymbol{K}_e = \begin{bmatrix} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & k_{jj}^e & \cdots & k_{ji}^e & \cdots & k_{jm}^e & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & k_{ij}^e & \cdots & k_{ii}^e & \cdots & k_{im}^e & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & k_{mj}^e & \cdots & k_{mi}^e & \cdots & k_{mm}^e & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_e = (\cdots, u_{ei}, \cdots, u_{ej}, \cdots, u_{em}, \cdots)^{\mathrm{T}}.$$

在扩充以后，我们可以把所有单元上的有限元方程叠加：

$$\sum_{n=1}^{NE} K_{en}\boldsymbol{u}_{en} = \boldsymbol{0} \text{ 或 } \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \tag{12}$$

其中

$$\boldsymbol{K} = \sum_{n=1}^{NE} K_{en}, \quad \boldsymbol{u} = \sum_{n=1}^{NE} \boldsymbol{u}_{en} = (u_1, u_2, \cdots, u_N)^{\mathrm{T}},$$

$\boldsymbol{K}$ 是对称正定稀疏矩阵.

3.2.4　求解陆海局域大地水准面

设陆海毗邻区域边界上已知点值 u_{L_n} $(n=1,2,3,\cdots,p)$，令

$$\boldsymbol{u}_L = (\cdots, u_{L_1}, \cdots, u_{L_2}, \cdots, u_{L_p}, \cdots)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{u}_D = (u_i, \cdots, u_{L_1-1}, 0, u_{L_1+1}, \cdots, u_{L_2-1}, 0, u_{L_2+1}, \cdots, u_{L_p-1}, 0, u_{L_p+1}, \cdots, u_N)^{\mathrm{T}},$$

则(12)式为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_D + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_L = \boldsymbol{0}. \tag{13}$$

记 $\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_L$，则(13)式变为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_D = \boldsymbol{g}. \tag{14}$$

在具体计算时，只需先计算单元刚度矩阵(的元素)(由单元刚度矩阵的对称性，只需计算其上三角部分的元素)，按其脚标编号对号入座，即可形成总刚矩阵 $\boldsymbol{K}$. 从方程组(14)中解得所有内插点值 u_i，再由边界点值 u_{L_n} 和给定的插值多项式，即可得单元 $e=\Delta P_iP_jP_m$ 上大地水准面高的近似解 $u(x,y)$ 的表达式

$$u = f_i(x,y)u_i + f_j(x,y)u_j + f_m(x,y)u_m.$$

4　结　语

利用沿海大陆部分实测重力异常和近岸海区测高重力异常，推算陆海局部区域统一的重力大地水准面. 由于陆海交接区域的数据质量较差，由此推算的局部大地水准面不可靠.

大地水准面是一个均衡物理面，在数学上可以用一个调和函数来表示大地水准面高 N，在陆海交接的局部区域，其数学模型可表现为 Laplace 第一边值问题.

有限元法解 Laplace 边值问题是一种最有效的数值方法之一. 它用分片线性但整体连续的曲面逼近陆海毗邻局部区域大地水准面.

有限元方法的逼近精度，依赖于边界已知点的数值精度，也和边界已知点的数量有关. 陆海毗邻区域大地水准面布点比较稀疏，尤其是毗邻区域带横向边界内部点大地水准面高的质量较差. 为提高逼近精度，采用有限元法加密边界点.

由于陆海毗邻区域没有高精度的大地水准面高的直接观测值，以本文给出的方法计算大地水准面不能以实测数据作检核. 我们采用目前最新的重力场模型在某局部区域进行了试算，其拟合残差值为厘米级精度，表明本文所建立的数学模型切实可行.

参　考　文　献(References)：

[1] 鲍李峰，陆洋，王勇，许厚泽. 由 ERS-1 波形重构确定我国近海平均海平面[J]. 地球物理学进展，2007，22(2)：427～431.
Bao L F, Lu Y, Wang Y, *et al*. Coastal mean sea surface height by retracking ERS-1 altimeter waveform data[J]. Progress in Geophysics (in Chinese), 2007,22(2):426～431..

[2] 李建成，宁津生，陈俊勇，晁定波. 中国海域大地水准面和重力异常的确定[J]. 测绘学报，2003, 32(2)，114～119.
Li J C, Ning J S, Chen J Y, Chao D B. Geoid determination in China sea areas[J]. Acta Geodaeticaet Cartographica Sinica(in Chinese),2003,32(2): 114～119.

[3] 陈俊勇，李建成，宁津生，等. 中国似大地水准面[J]. 测绘学报，2002,31(增刊)，1～6.
Chen J Y, Li J C, Ning J S, et al. On a Chinese new quasi geoid[J]. Acta Geodaeticaet Cartographica Sinica (in Chinese), 2002,31(Sup),1～6.

[4] 李　斐，岳建利，张利明. 应用 GPSP 重力数据确定(似)大地水准面[J]. 地球物理学报，2005，48(2)：294～298
Li F, Yue J L, Zhang L M. Determination of geoid by GPS/Gravity data[J]. Chinese J. Geophys. (in Chinese), 2005, 48 (2): 294～298

[5] 张利明，李裴. 确定(似)大地水准面的方法分析及适用性研究[J]. 地球物理学进展，2005，20(1)：198～203.
Zhang L M, Li F. Research and analysis of quasi-geoid determination [J]. Progress in Geophysics (in Chinese), 2005,20 (1):198～203.

[6] 薛东川，王尚旭，焦淑静. 起伏地表复杂介质波动方程有限元数

值模拟方法[J].地球物理学进展,2007,22(2):522～529.
Xue D C, Wang S X, Jiao S J. Wave equation finite-element modeling including rugged topography and complicated medium [J]. Progress in Geophysics (in Chinese), 2007,22(2):522～529.

[7] 王若,王妙月,卢元林.三维三分量CSAMT法有限元正演模拟研究初探[J].地球物理学进展,2007,22(2):579～585.
Wang R, Wang M Y, Lu Y L. Preliminary study on 3D3C CSAMT method modeling using finite element method[J]. Progress in Geophysics (in Chinese), 2007,22(2):579～585.

[8] 汤井田,任政勇,化希瑞.任意地球物理模型的三角形和四面体有限单元剖分[J].地球物理学进展,2006,21(4):1272～1280.
Tang J T, Ren Z Y, Hua X R. Triangle and tetrahedral finite element meshing from arbitrary geophysical model data[J]. Progress in Geophysics (in Chinese), 2006,21(4):1272～1280.

[9] 刘缵武.矩阵论及其应用[M].北京:解放军出版社,2002 .
Liu Z W. Matrix Analysis With Applications[M]. Beijing: PLA Press,2002.

[10] 魏光祖,袁忠信,王恩三,等.索伯列夫空间与偏微分方程[M].开封:河南大学出版社,1994.
Wei G Z, Yuan Z X, Wang E S, *et al*. Sobolev Space and Partial Differential Equation[M]. Kaifeng: Henan University Press, 1994.