

## GPS-重力边值问题\*

于锦海<sup>①②\*\*</sup> 张传定<sup>②</sup>

(①中国科学院测量与地球物理研究所, 武汉 430077; ②郑州信息工程大学, 郑州 450052)

**摘要** 详细研究了在  $O(T^2)$  精度下如何利用地面 GPS 和重力观测值确定地球外部重力场的问题, 以参考椭球面为界面建立起了完整的理论和相应的精度判断标准. 具体求解方法主要分成两个步骤: 地面重力观测值到参考椭球面上的调和延拓; 参考椭球面上 Neumann 外问题的积分解式. 得到的积分解式在  $O(T^2)$  精度下包含了重力场频谱的全部信息; 得到的公式不仅实用, 而且理论上有所突破, 在  $O(T^2)$  精度下解决了椭球界面边值问题的积分解.

**关键词** GPS-重力边值问题 积分解 调和延拓

经典的物理大地测量学以确定地球形状和外部重力场为目标形成了 Molodensky 边值问题或 Stokes 边值问题为核心的理论体系, 使用的基本数据类型是重力异常. 随着 GPS 的广泛应用, 地球几何形状可以在厘米级精度内以坐标形式确定下来; 同时当今的重力测量技术可以达到几个微伽的精度, 这就需要理论上能建立某类边值问题, 其理论和求解精度能足以保持 GPS 几何测量精度和重力测量精度的要求.

设  $S$  表示地球表面,  $w$  表示地球重力位,  $g = |\text{grad}w|_S$  是地面重力值, 则  $S$  和  $g$  可以分别由 GPS 和重力观测得到, 需要求解的是  $S$  外  $w$  的表达式. 根据重力位是由引力位与离心力位之和构成的, 因而便产生了下列所谓 GPS-重力边值问题的原始数学模型

$$\begin{cases} \text{Lap}w = 2\omega^2, & \text{在 } S \text{ 外,} \\ |\text{grad}w| = g, & \text{在 } S \text{ 上,} \\ v = O(r^{-1}), & \text{在无穷远处,} \end{cases} \quad (1)$$

其中  $v = w - \frac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2)$  是引力位,  $\omega$  是地球自转平均角速度,  $(x_1, x_2, x_3)$  是事先建立的地心坐标系,  $x_3$  是自转轴,  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ . 问题(1)被称为 GPS-重力边值问题是因为只需要地面  $S$  上的 GPS 和重力观测值便可独立地建立起问题(1). 由于问题(1)中的边界条件是非线性的, 因此问题(1)本质上是非线性边值问题. Bjerhammer 和 Svensson<sup>[1]</sup>, Sacerdote 和 Sansò<sup>[2]</sup> 等都在理论上研究过问题(1)的适定性; 于锦海和朱灼文<sup>[3]</sup> 也证明了问题(1)是适定的, 同时给出了理论上收敛的迭代解法. 然而从目前数学的发展看, 直接求解具有非线性特点的问题(1)是不可能的, 因此具体求解问题(1)时需作线性化处理.

设  $U$  是 Somogalia 正常重力位,  $\gamma = |\text{grad}U|$  是正常重力,  $T = w - U$  是扰动位, 略去  $O(T^2)$  以

2003-03-20 收稿, 2003-05-28 收修改稿

\* 人事部留学回国人员基金资助项目

\*\* 通信地址: 郑州测绘学院 0209, 450052

上的高阶量, 则可得到  $S$  上关于扰动位  $T$  的线性边值问题

$$\begin{cases} \text{Lap}T = 0, & \text{在}S\text{外,} \\ \frac{\partial T}{\partial h} = -\delta g, & \text{在}S\text{上,} \\ T = O(r^{-1}), & \text{在无穷远处,} \end{cases} \quad (2)$$

此处  $\delta g = g - \gamma$  是  $S$  上扰动重力,  $h$  是  $S$  上指向外侧的正常重力方向. 与目前常用的 Molodensky 问题相比, 问题(2)的主要优点有两点: 第一是问题(2)的解是存在的, 而且解可含有一阶球谐项, 因此包含了地球质心的信息, 比 Molodensky 问题有更深的物理意义; 第二是利用 GPS 数据可以直接确定界面  $S$  的形状, 从而能避免 Molodensky 问题中出现的高程基准不统一带来的计算困难. 在问题(2)中若将界面  $S$  近似地用地球平均球面替代, 便可得到典型的球域 Neumann 外问题, 其解可由 Hotine 积分给出. 值得指出的是球近似使得具有  $O(T^2)$  精度的问题(2)的精度退化成  $O(T \cdot \varepsilon^2)$ , 此处  $\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$  是参考椭球面的第二离心率, 其值约为  $6 \times 10^{-3}$ , 这里  $a, b$  分别参考椭球面的长半轴和短半轴.

本文的主要目的是在  $O(T^2)$  精度的范围内研究问题(2)的求解方法. 这样做的依据是: 首先问题(2)本身的精度是  $O(T^2)$ , 因而更高精度的求解方法无任何实际含义; 其次  $O(T^2)$  量级的精度足以满足现有的物理大地测量中观测精度的要求.

## 1 精度的评判标准

物理大地测量涉及的主要研究对象有两类: 其一是与扰动位相关的物理量; 其二是与坐标相关的几何量. 如何建立评判这两类不同量的精度评判标准呢? 显然如  $\varepsilon^2$  这样无量纲的量是最佳选择, 即: 使用相对精度. 下面利用 Bruns 公式来分析上述两类量的精度关系. 设  $\zeta$  为大地水准面差距, 则利用 Bruns 公式, 便有  $\zeta = \frac{T}{\gamma}$ . 对于正常重力位  $U$  和正常重力  $\gamma$  而言, 其近似值约为  $U \approx GM \cdot r^{-1}$ ,  $\gamma \approx GM \cdot r^{-2}$ , 其中  $G$  是万有引力常数,  $M$  是地球质量. 将上述近似值代入 Bruns 式可知<sup>[4]</sup>: 在地球表面附近近似地有下列关系式:

$$\frac{\zeta}{R} = \frac{T}{U} \quad (3)$$

此处  $R$  是地球平均半径. 注意(3)式两端都是无量纲的, 因而它们都可以作为精度评判标准的相对精度. 绝对精度可由相对精度乘以地球表面上相应量的实际值得得.

对于地球本身而言, 大地水准面差距  $\zeta$  的最大值约为 100 m, 因此  $\zeta$  的相对量级  $\frac{\zeta}{R}$  不超过  $1.5 \times 10^{-5}$ . 利用(3)式可知: 扰动位  $T$  的相对量级亦为  $1.5 \times 10^{-5}$ . 例如: 问题(2)精度为  $O(T^2)$ , 这就意味着问题(2)的相对精度至少可达到  $19^{-9}$ . 这样的相对精度用于确定大地水准面差距时绝对精度可达到  $10^{-9}R \approx 10^{-9} \times 6.4 \times 10^6 = 6.4 \times 10^{-3}$  m, 即: 绝对精度在厘米量级之内. 若考虑到重力值, 则对应的绝对精度为  $10^{-9} \times 9.8 \times 10^5 \approx 10^{-3}$  mGal, 即: 重力值的精度在微伽之内. 由此可见,  $O(T^2)$  的精度可以满足当前所有的观测要求. 总之, 对于如距离这样的几何量, 它的相对量级为该量与地球半径之比; 而对于如扰动位这样的物理量, 它的相对量级为该量与地

球表面上正常重力位的对应值之比, 其量级在  $1.5 \times 10^{-5}$  之内.

## 2 椭球界面下问题(2)的解析解

用  $\Sigma: \frac{x_1^2 + x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{b^2} = 1$  表示参考椭球面;  $(u, \theta, \lambda)$  表示椭球坐标系, 这里  $\lambda$  是经度,  $\theta$  是归化余纬, 它们与直角坐标系  $(x_1, x_2, x_3)$  的关系为<sup>[5,6]</sup>:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{u^2 + E^2} \sin \theta \cos \lambda, \\ x_2 = \sqrt{u^2 + E^2} \sin \theta \sin \lambda, \\ x_3 = u \cos \theta, \end{cases} \quad (4)$$

其中  $E^2 = a^2 - b^2$ . 特别  $\Sigma$  在坐标系  $(u, \theta, \lambda)$  中的方程为  $u = b$ .

若存在某种途径可将在地球表面  $S$  上  $Q'$  点观测的重力值  $g(Q')$  调和延拓到参考椭球面  $\Sigma$  对应的  $Q$  点上得到  $g(Q)$ , 这里  $Q'$  与  $Q$  具有相同经度和归化余纬, 则类似地可得到以  $\Sigma$  为界面的形式与问题(2)相同的边值问题, 简称椭球界面 Neumann 问题.

$$\begin{cases} \text{Lap}T = 0, & \text{在 } \Sigma \text{ 外,} \\ \frac{\partial T}{\partial h} = -\delta g(Q), & \text{在 } \Sigma \text{ 上,} \\ T = O(r^{-1}), & \text{在无穷远处,} \end{cases} \quad (5)$$

这里  $\delta g(Q)$  表示参考椭球面  $\Sigma$  上的扰动重力. 关于问题(5), 可以得到下列结论:

**定理 1** 若略去  $O(T \cdot \varepsilon^2)$  以上的高阶小量, 则问题(5)存在积分解式, 其表示式为

$$T(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{u_Q=b} K(P, Q) \cdot \delta g(Q) d\bar{S}_Q + \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \iint_{u_Q=b} N(P, Q) \cdot \delta g(Q) d\bar{S}_Q \quad (6)$$

其中  $P(u, \theta, \lambda)$  是待算点,  $Q(u_Q, \theta_Q, \lambda_Q)$  是  $\Sigma$  上积分变量,  $d\bar{S}_Q = b^2 \sin \theta_Q d\theta_Q d\lambda_Q$ . 若记

$$\cos \psi = \cos \theta \cos \theta_Q + \sin \theta \sin \theta_Q \cos(\lambda - \lambda_Q), \quad (7)$$

$$r_{PQ} = \sqrt{u^2 - 2bu \cos \psi + b^2}, \quad (8)$$

则

$$K(P, Q) = \frac{2}{r_{PQ}} + \frac{1}{b} \ln \frac{u(1 - \cos \psi)}{r_{PQ} + b - u \cos \psi}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} N(P, Q) = & \frac{u^2 - b^2}{u^2} \left[ \frac{1}{4} \frac{u^2 - b^2}{r_{PQ}^3} + \frac{1}{64} \frac{9ur_{PQ} - 9r_{PQ}^2 + 16b^2}{b^2 r_{PQ}} - \frac{7}{384} \frac{1}{u} + \frac{3}{320} \frac{b \cos \psi}{u^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{64} \frac{6b + 9u \cos \psi}{b^2} \ln \frac{u(1 - \cos \psi)}{r_{PQ} + b - u \cos \psi} - \frac{1}{64} \frac{1}{u} \ln \frac{2u}{r_{PQ} + u - b \cos \psi} \right] \\ & - \frac{D(P, Q)}{32} \frac{u^2 - b^2}{u^2} \left[ \frac{39r_{PQ} - 54u}{b^2} + \frac{45u(u - r_{PQ}) \cos \psi}{b^3} - \frac{32}{r_{PQ}} + \frac{16u(u - b \cos \psi)}{r_{PQ}^3} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{1}{u} - \frac{9}{10} \frac{b \cos \psi}{u^2} - \frac{9}{28} \frac{b^2 (3 \cos^2 \psi - 1)}{u^3} - \frac{7}{30} \frac{b^3 (5 \cos^2 \psi - 3 \cos \psi)}{u^4} \right. \\
 & \left. - \frac{15u^2 + 54bu \cos \psi - 45u^2 \cos^2 \psi}{b^3} \ln \frac{u(1 - \cos \psi)}{r_{PQ} + b - u \cos \psi} \right] \\
 & + \frac{C(P, Q)}{32} \frac{u^2 - b^2}{u^2} \left[ \frac{b^3 - 7b^2u \cos \psi + 27bu^2 \cos^2 \psi - 5u^3 \cos^3 \psi}{b^2} \frac{u + r_{PQ}}{ur_{PQ}(r_{PQ} + u - \cos \psi)} \right. \\
 & + \frac{7b^2 + 27bu \cos \psi - 5u^2 \cos^2 \psi + 10u^2 - 10ur_{PQ}}{b^3} - \frac{9}{20} \frac{b}{u^2} - \frac{9}{28} \frac{b^2 \cos \psi}{u^3} \\
 & \left. - \frac{29b^2u + 22bu^2 \cos \psi - 5u^3 \cos^2 \psi}{b^3 r_{PQ}} - \frac{7}{120} \frac{b^3 (5 \cos^2 \psi - 1)}{u^4} \right. \\
 & \left. - \frac{27bu - 15u^2 \cos \psi}{b^3} \ln \frac{u(1 - \cos \psi)}{r_{PQ} + b - u \cos \psi} \right] \\
 & + \frac{1}{16} \frac{9r_{PQ}^2 - 9ur_{PQ} + 16b^2}{b^2 r_{PQ}} - \frac{19}{96} \frac{1}{u} - \frac{3}{80} \frac{b \cos \psi}{u^2} - \frac{5}{892} \frac{b^2 (3 \cos^2 \psi - 1)}{u^3} \\
 & + \frac{1}{16u} \ln \frac{2u}{r_{PQ} + u - b \cos \psi} + \frac{10b - 9u \cos \psi}{16b^2} \ln \frac{u(1 - \cos \psi)}{r_{PQ} + b - u \cos \psi} \\
 & + \frac{C(P, Q)}{48} \left[ \frac{11b^2u + 35bu^2 \cos \psi + 5u^3 \cos^3 \psi}{b^3 r_{PQ}} - \frac{3b}{ur_{PQ}} \right. \\
 & + \left. \left( \frac{14b^3 + 24b^2u \cos \psi - 30bu^2 \cos^2 \psi - 5u^3 \cos^2 \psi}{b^3} - \frac{3b \cos \psi}{u} \right) \frac{b(u + r_{PQ})}{ur_{PQ}(r_{PQ} + u - b \cos \psi)} \right. \\
 & + \frac{24b^2 - 30bu \cos \psi - 5u^2 \cos^2 \psi - 10u(r_{PQ} - u)}{b^3} + \frac{199}{20} \frac{b}{u^2} + \frac{13}{14} \frac{b^2 \cos \psi}{u^3} \\
 & \left. - \frac{3b}{u^2} \ln \frac{2u}{r_{PQ} + u - b \cos \psi} + \frac{15u(2b + u \cos \psi)}{b^3} \ln \frac{u(1 - \cos \psi)}{r_{PQ} + b - u \cos \psi} \right] \\
 & - \frac{D(P, Q)}{8} \left[ \frac{8}{r_{PQ}} + \frac{20bu - 25br_{PQ} + 15u(u - r_{PQ}) \cos \psi}{2b^3} - \frac{u - r_{PQ}}{u^2} \right. \\
 & + \frac{199}{60} \frac{b \cos \psi}{u^2} + \frac{13}{84} \frac{b^3 (3 \cos^2 \psi - 1)}{u^3} - \frac{b \cos \psi}{u^2} \ln \frac{2u}{r_{PQ} + u - b \cos \psi} \\
 & \left. + \frac{20bu \cos \psi - 5u^2 (1 - 3 \cos^2 \psi)}{2b^3} \ln \frac{u(1 - \cos \psi)}{r_{PQ} + b - u \cos \psi} \right] + \frac{\sin \theta_Q}{2} K(P, Q), \tag{10}
 \end{aligned}$$

其中

$$D(P, Q) = - \frac{[\sin \theta \sin \theta_Q \sin(\lambda - \lambda_Q)]^2}{\sin^2 \psi}, \tag{11}$$

$$C(P, Q) = 2 \cos \psi \cdot D(P, Q) + \sin \theta \sin \theta_Q \cos(\lambda - \lambda_Q), \tag{12}$$

定理 1 的证明可从于锦海等人<sup>[7]</sup>中的定理与进一步推导和化简而得. 由于涉及到的项数

很多, 推导很长, 故这里不给出详细证明过程. 需要特别说明的是: 这里引用的记号  $\cos\psi$  和  $r_{PQ}$  不具有球坐标系下的几何意义, 究其理由是使用的坐标系是椭球坐标系的缘故.

定理 1 中核函数的项数虽然很多, 但这些项是由函数  $C(P, Q)$ ,  $D(P, Q)$ ,  $r_{PQ}$ ,  $\cos\psi$ ,  $\ln\frac{2u}{r_{PQ}+u-b\cos\psi}$  和  $\ln\frac{u(1-\cos\psi)}{r_{PQ}+b-u\cos\psi}$  简单复合而成, 因此数学结构极其简单, 易于在计算机上进行计算. 特别核函数  $K(P, Q)$  和  $N(P, Q)$  对应的奇异性与  $r_{PQ}^{-1}$  同阶, 这使得计算时无需对奇异点处进行特殊技术处理. 另外, 与传统的球谐级数解(或椭球谐级数解)相比, 定理 1 给出的积分式(6)包含了描述重力场的全部频谱信息, 其计算复杂程度至多相当于球谐级数的前十阶.

### 3 椭球面上重力赋值与精度分析

设  $Q'(u, \theta, \lambda)$  是地面  $S$  上任意一点,  $Q(b, \theta_Q, \lambda_Q)$  是参考椭球面  $\Sigma$  上的对应点, GPS 和重力测量可以分别得到  $Q'$  点的坐标  $(u, \theta, \lambda)$  和  $Q'$  点的重力  $g(Q')$ . 利用定理 1 进行重力场解算的关键是如何将  $Q'$  点的重力值  $g(Q')$  调和地延拓到  $Q$  点上的值  $g(Q)$ , 以及如何估计延拓精度. 理论上讲, 改进的 Runge 定理<sup>[8]</sup>保证了调和函数以及导数延拓的可能性, 因此本节的重点在于讨论具体的延拓方法和精度分析.

记  $\eta = u - b$ , 由于  $Q'$  和  $Q$  有相同的经度和归化余纬, 而  $\eta$  和有向距离  $QQ'$  的量级大致相同, 因此根据 Taylor 展开式, 略去  $O(\eta^4)$  后便有

$$g(Q') = g(Q) + \frac{\partial g(Q)}{\partial u} \eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(Q)}{\partial u^2} \eta^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 g(Q)}{\partial u^3} \eta^3. \quad (13)$$

对于地球而言,  $\eta$  的最大值不超过 9 km, 从而  $\eta$  的相对量级为  $\frac{\eta}{R} \leq 1.5 \times 10^{-3}$ , 因而略去  $O(\eta^4)$  可保证  $O(T^2)$  量级的精度. 下面计算重力  $g$  的各阶导数值. 事实上, 略去  $O(T^2)$  量级后, 我们有

$$\begin{aligned} g &= |\text{grad}w| = |\text{grad}(U+T)| = \sqrt{\langle \text{grad}(U+T), \text{grad}(U+T) \rangle} \\ &= \sqrt{\gamma^2 + 2\langle \text{grad}U, \text{grad}T \rangle + |\text{grad}T|^2} = \gamma + \frac{1}{\gamma} \langle \text{grad}U, \text{grad}T \rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

由于  $\frac{1}{\gamma} \text{grad}U$  恰好是  $U$  的梯度方向, 因此  $\frac{1}{\gamma} \text{grad}U$  与  $h$  的方向相反, 从而(14)式可写成

$$g = \gamma - \frac{\partial T}{\partial h}. \quad (15)$$

将(15)式代入(13)式, 可得在精度  $O(T^2)$  下  $\Sigma$  上  $Q$  点处的重力延拓值为

$$g(Q) = g(Q') - \frac{\partial \gamma(Q)}{\partial u} \eta - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma(Q)}{\partial u^2} \eta^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \gamma(Q)}{\partial u^3} \eta^3 - \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} \eta. \quad (16)$$

若将  $U$  取成 Somigliana 正常重力位, 即:

$$U = \frac{fM}{E} \arctan \frac{E}{u} + \frac{\omega^2 a^2}{2} \frac{q}{q_0} \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) + \frac{\omega^2}{2} (u^2 + E^2) \sin^2 \theta, \quad (17)$$

其中  $f$  是万有引力常数,  $M$  是地球总质量,  $\omega$  是地球自转平均角速度,  $E = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,

$$q = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{3u^2}{E^2} \right) \arctan \frac{E}{u} - \frac{3u}{E} \right], \quad (18)$$

以及  $q_0 = q|_{u=b}$ . 记  $\varepsilon^2 = \frac{E^2}{b^2}$ , 经计算可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma(Q)}{\partial u} &= \sqrt{\frac{1+\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2 \cos^2 \theta}} \left[ \frac{2fMb}{a^4} + 6\omega^2(1+\varepsilon^2) \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) + \omega^2 \sin^2 \theta \right] \\ &\quad + \frac{2\varepsilon^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{(1+\varepsilon^2 \cos^2 \theta)^3}} \left[ \frac{fM}{a^3} + \frac{3\omega^2 a}{2b} \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) + \frac{\omega^2 b \sin^2 \theta}{a} \right], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma(Q)}{\partial u^2} &= \sqrt{\frac{1+\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2 \cos^2 \theta}} \left[ \frac{2fM(a^2-4b^2)}{a^6} - \frac{30\omega^2}{b} (1+\varepsilon^2) \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{(1+\varepsilon^2 \cos^2 \theta)^3}} \left[ \frac{6fM}{a^4} + O(\varepsilon^2) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{\partial^3 \gamma(Q)}{\partial u^3} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2 \cos^2 \theta}} \frac{24fM}{a^5} + O(\varepsilon^2). \quad (21)$$

将(19), (20)和(21)式代入(16)式, 便可得在  $O(T^2)$ 精度下重力在椭球面 $\Sigma$ 的延拓公式为

$$g(Q) = g(Q') - g_1(Q) - g_2(Q) - g_3(Q) - \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} \eta, \quad (22)$$

这里  $g_1(Q) = \frac{\partial \gamma(Q)}{\partial u} \eta$ ,  $g_2(Q) = \frac{\partial^2 \gamma(Q)}{\partial u^2} \eta^2$ ,  $g_3(Q) = \frac{\partial^3 \gamma(Q)}{\partial u^3} \eta^3$  分别称为关于  $\eta$  的一次, 二次, 三次改正项.

下面具体分析延拓公式(22)式中的每个改正项的量级:

(i) 当  $\eta \leq 100$  m 时, 改正项  $g_2(Q)$ ,  $g_3(Q)$ ,  $\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} \eta$  与  $O(T^2)$  的量级相同, (22)式可简化成

$$g(Q) = g(Q') - g_1(Q). \quad (23)$$

(ii) 当  $100 \text{ m} \leq \eta \leq 3000$  m 时,  $g_3(Q)$  与  $O(T^2)$  的量级相同, (22)式可写成

$$g(Q) = g(Q') - g_1(Q) - g_2(Q) - \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} \eta. \quad (24)$$

(iii) 当  $\eta \geq 3000$  m 时, 若顾及  $O(T^2)$  量级的影响, 改正项  $g_2(Q)$ ,  $g_3(Q)$ ,  $\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} \eta$  必须予以考虑.

对于  $\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} \eta$  而言, 由于忽略了  $O(T^2)$  量级, 故  $\frac{\partial^2 T}{\partial u^2}$  可用  $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$  代替. 计算过程中, 扰动位  $T$  的值严格来说应该从递归的方法得到, 即: 令  $g'(Q) = g(Q') - g_1(Q) - g_2(Q)$  作为地面重力值  $g(Q')$  在参考椭球面 $\Sigma$ 上的首阶近似, 以  $\delta_1 g = g'(Q) - \gamma(Q)$  替代公式(6)中  $\delta g$  得到近似解  $T_1$ ; 然后用值  $T_1$  再代入归算公式(22)中, 便可以在  $O(T^2)$  精度下得到  $g(Q')$  在  $\Sigma$  上的延拓值  $g(Q)$ . 用上述

的迭代计算方法将会增加许多的工作量, 因此本文建议用现有的重力场模型(如 OSU91 或 EGM96 等)代入公式(22)直接计算, 其前提要求是使用的重力场模型具有球近似的精度.

## 4 算例

本文给出了一个模拟计算实例. 采用 EGM96 模型, 将其转换成椭球模型, 然后按严格公式计算生成的全球  $5' \times 5'$  的椭球面平均扰动重力, 将高程异常作为计算对象, 其计算结果以厘米为单位. 计算结果表明按文中公式(6)能严格恢复模型高程异常, 差异在几个厘米范围; 而 Hotine 积分结果与模型值的差异在几十个厘米. 图 1 和图 2 分别给出了在东经  $70^\circ \sim 130^\circ$ , 北纬  $20^\circ \sim 60^\circ$  范围内分别用椭球积分分解(6)和 Hotine 积分恢复模型高程异常的差异. 理论上讲, 用公式(6)恢复模型高程异常的计算结果可控制在厘米量级以内, 这里产生几个厘米的误差的主要原因是模型数据离散化的结果. 上述的计算结果说明椭球面边值问题的解不仅理论精度高, 而且实际计算效果可靠.

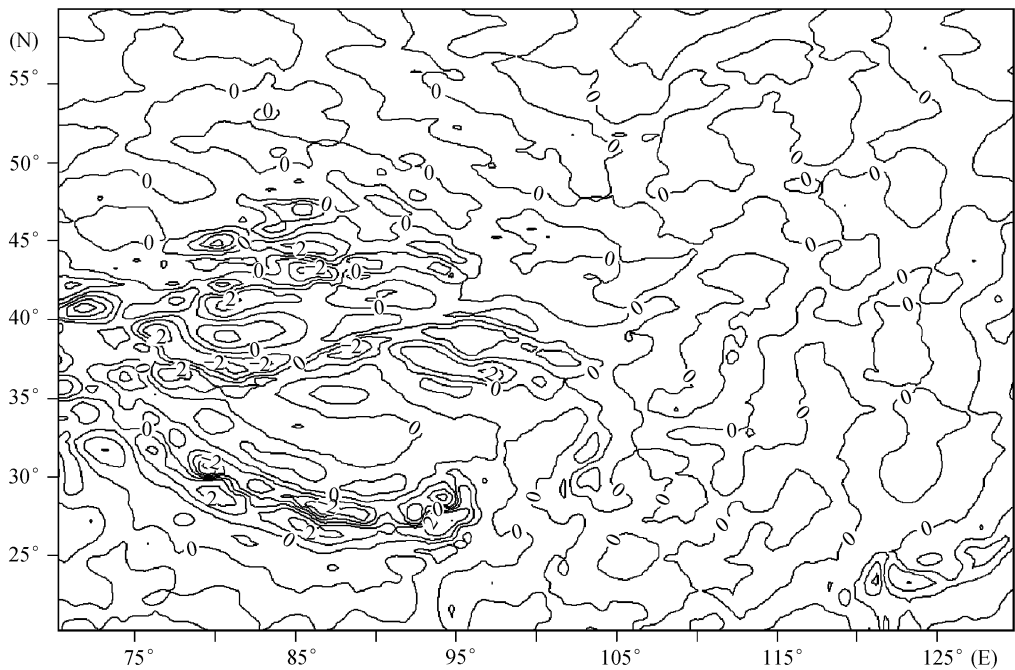


图 1 椭球积分分解对应的高程异常与模型的差异

## 5 若干说明

(1) 本文的推导都是在  $O(T^2)$  精度内进行的, 其相对精度可保证在  $10^{-9}$  内. 对于确定大地水准面等几何量而言, 其绝对精度可控制在厘米范围内. 因此, 本文所得到的结果理论上讲是真正的厘米级精度的结论. 然后, 在实际求解时, 要严格达到厘米级的精度, 除了理论保证外, 还需要实测数据(如 GPS 的定位精度和重力值的观测精度)有足够的精度和很好的分布.

(2) 本文的解式是以积分形式给出的, 与现有的 Molodensky 级数解相比, 我们的结论要简单得多. 这是因为现有物理大地测量中高精度的积分解式都需要进行迭代计算, 这正是这

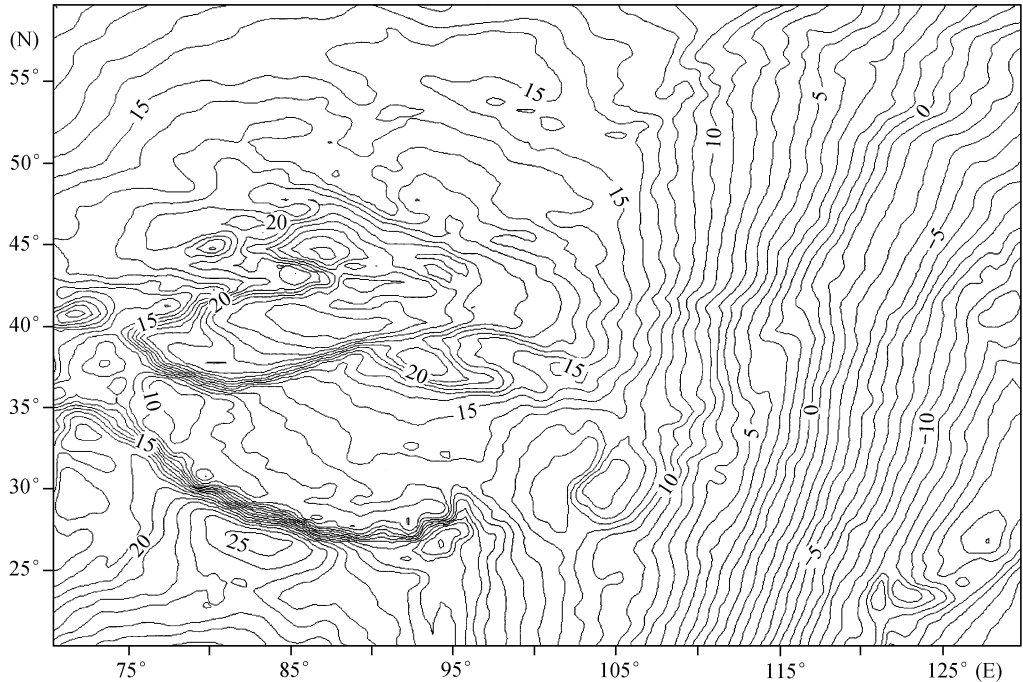


图 2 Hotine 积分对应的高程异常与模型的差异

些解式无法在实际中应用的原因。

(3) 如果以地球平均球面来替代参考椭球面, 并将地面重力值解析地归算到该球面上, 这将会引起两个较难处理的困难. 其一是延拓计算的复杂性增加; 其二是对球面而言所得边值问题是非法向的, 如要转换成球面法向边值问题, 仍需要作椭球改正.

(4) 相比于物理大地测量常用的 Molodensky 边值问题或 Stokes 边值问题, 本文所讨论的边值问题(5)在无穷处可以包含零阶和一阶球谐项. 这标志着可以用大地测量的方法来确定地球质量和地球质心. 事实上, 从解式(5)中可以独立地给出地球质量和质心这样的物理量. 限于篇幅, 将另文讨论地球质量和质心问题.

(5) GPS-重力边值问题从理论和计算上讲无疑要比 Molodensky 问题方便得多, 但由于物理大地测量学发展和历史的原因, 目前使用的主要数据类型仍然是重力异常. 利用 Stokes 公式将重力异常直接转换扰动重力是不可取的, 这无法使得计算精度提高. 目前若在大范围内对重力点进行 GPS 观测显然也是难以做到的, 因此本文提出的方法就目前而言适用于 GPS 数据分布较为密集的局部重力场的计算和精化, 但是随着 GPS 观测点的逐步增加, GPS-重力边值问题解法的研究将会越来越重要.

## 参 考 文 献

- 1 Bjerhammar A, Svensson L. On the geodetic boundary value problem for a satellite approach. Bull Geod, 1983, 57: 145-154
- 2 Sacerdote F, Sansò F. On the analysis of the fixed boundary gravimetry BVP. The second Hotine-Marussi symp. on mathematical geod. Pisa, 1989



- 3 于锦海, 朱灼文. 非线性固定重力边值问题. 中国科学, B 辑, 1994, 24(3): 294~302
- 4 Moritz H. Advanced physical geodesy. Karlsruhe: Herbert Wichmann verlag, 1985
- 5 Yu J H, Cao H S. Elliptical harmonic series and the original Stokes problem with the boundary of the reference ellipsoid. Jour of Geod, 1996, 70: 431~439
- 6 于锦海. 扰动重力位 Poisson 方程椭球 Stokes 边值问题. 中国科学, D 辑, 1997, 27(3): 214~220
- 7 Yu J H, Jekeli C, Zhu M. The Analytical Solutions of the Dirichlet and Neumann Boundary Value Problems with Ellipsoidal Boundary. Jour of Geod, 2003, 77: 33~50
- 8 于锦海. 基于改进 Runge 定理的调和延拓及其相应边值问题. 中国科学, D 辑, 1998, 28(6): 532~538