

GPS/重力边值问题实用公式推导及分析

张利明¹, 李斐², 章传银¹

(1. 中国测绘科学研究院, 北京 100039; 2. 武汉大学测绘遥感信息工程国家重点实验室, 武汉 430079)

摘要 基于 GPS/重力边值问题的连续趋近解, 推导了形式上更为简单, 物理意义更加明确的实用公式. 同时利用扰动重力的泰勒级数展开式直接证明了 GPS/重力边值问题实用公式的正确性, 并且进一步阐明其物理含义. 在实用公式中, 我们引入了扰动重力垂直梯度这个物理量, 这在观测数据多元化的今天具有积极意义.

关键词 物理大地测量, GPS/重力边值问题, 扰动重力, 扰动重力梯度

中图分类号 P223 **文献标识码** A **文章编号** 1004-2903(2008)06-1746-05

GPS/gravity boundary value problem and its practical formula

ZHANG Li-ming¹, LI Fei², ZHANG Chuan-yin¹

(1. Chinese Academy of Surveying and Mapping, Beijing 100039, China; 2. National Lab.

for Information Engineering in Surveying and Mapping and Remote Sensing, Wuhan University, Wuhan 430079, China)

Abstract Based on the approximate solution of the GPS/gravity boundary value problem (BVP), we deduce the practical formula which has a simple form and clear physical meanings. Meanwhile, using the Taylor series expression of gravity disturbances, we directly prove the correctness of the practical formula and analyze its physical implication in detail. It is very important for the variety of data that vertical gradient of gravity disturbances is introduced in the practical formula.

Keywords physical geodesy, GPS/gravity BVP, gravity disturbances, vertical gradient of gravity disturbances

0 引言

在 GPS 出现之前, 由于大地高无法获取, 人们对边值问题的研究主要集中于第三边值问题, 而对第二边值问题的研究主要停留在理论阶段. 随着卫星技术发展, 尤其是 GPS 卫星的成功应用, 我们可以快速、高精度地获取地面任意点的三维坐标, 这意味着地面任意点的大地高获取已经成为现实. GPS 技术为物理大地测量带来了新的机遇, 我们可以直接利用地面重力数据以及对应点的 GPS 大地高直接求得扰动重力, 从而使得物理大地测量第二边值问题跨越理论阶段成为现实可用的模型. 事实上, 已有不少大地测量学者在关注此问题的研究. 早在 1998 年, Moritz 简要论述了 GPS 出现后物理大地测量学科的变化, 提出了 GPS/重力边值问题基本概念; 李斐等人给出了 GPS/重力边值问题更为详

尽的论述和数学表达, 并且推导出了该问题的连续趋近解^[1,2]; 李叶才比较了 Stokes 积分和 Hotine 积分的性质, 指出 Hotine 积分是更有利于确定高精度大地水准面的方法^[3]; 于锦海等人详细研究了 O(T²)精度下如何利用 GPS 和重力观测值确定地球外部重力场的问题, 以参考椭球为界面建立起了完整的理论和相应的精度判断准则^[4,5]; 吴晓平等利用扰动重力边值问题计算的垂线偏差分量与高程异常有非常好的一致性, 指出了以扰动重力为边值的固定边值问题的优点^[6]. 而 Hotine 核与固定边值问题固有的优良属性^[7,8]必将成为重力场研究中的主要方法之一.

在本文中, 我们进一步分析了文献[1]中 GPS/重力边值问题的连续趋近解, 然后对该解式进一步简化, 详细推导了求解该问题更为实用的公式, 同时指明误差取舍情况, 最后利用扰动重力泰勒级数展

收稿日期 2008-03-10; 修回日期 2008-06-20.

基金项目 国家高技术研究发展计划(863 计划)、国家自然科学基金(40674005)、中国测绘科学研究院基本科研业务费专项、国家测绘局基础测绘项目和地理空间信息工程国家测绘局重点实验室开放基金联合资助.

作者简介 张利明, 男, 1977 年生, 山西阳曲人, 博士, 主要从事大地测量与地球重力场研究工作. (E-mail: zhanglm@casm.ac.cn)

开式直接证明了其正确性和物理意义所在. 在实用公式中, 扰动重力这一物理量的引入在数据类型不断丰富、原始数据不断积累, 尤其是卫星重力快速发展的今天无疑对重力场精细结构构建具有重要意义^[9~17].

1 GPS/重力边值问题

GPS/重力边值问题定义^[1]为: 以 GPS 观测得到的大地高数据及其对应点的重力观测数据, 计算该点的扰动重力, 并以地球自然表面为边界, 以其上的扰动重力 δg 为边值, 构建出关于地面扰动位的 Laplace 方程定解问题, 即:

求解扰动位 T , 满足:

$$\begin{cases} \Delta T = 0, \\ \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_S = -\delta g, \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_S$ 为扰动位 T 沿垂向 n 的导数; S 为地球自然表面. 方程(1)与传统的大地边值问题的关键区别在于:

- (1) 边界面 S 是已知的固定边界;
- (2) 边界条件为扰动重力 δg , 而非重力异常 Δg .

由于边界面 S 不是一个等位面, 问题(1)的求解较为复杂, 李斐等人应用连续趋近法得到问题(1)的级数解, 其一阶逼近解的形式为

$$T = T_0 + T_1 = \frac{R}{4\pi} \int_{\sigma} (\delta g + \delta g_1) H(\psi) d\sigma, \quad (2)$$

其中, ψ 为计算点与流动点之间的角距, $H(\psi)$ 为的 Hotine 核, R 为地球平均半径, σ 为单位球面, 而 δg_1 等于

$$\delta g_1 = \frac{R^2}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{h - h_p}{l_0^3} \left[\delta g - \frac{1}{8\pi} \int_{\sigma} \delta g H(\psi) d\sigma \right] d\sigma, \quad (3)$$

其中, l_0 为流动点与计算点之间对应的单位球面距. $h - h_p$ 为计算点与流动点之间的大地高差, 它可以由 GPS 观测准确获得.

2 GPS/重力边值问题的实用表达推导

观察 GPS/重力边值问题的一阶连续趋近解, 实际上形式还是比较复杂. 能不能推导出形式上更为简单, 而又不影响精度或在一定精度范围内等价的公式呢? 本节内容将回答这个问题.

在公式(3)中, 将 T_0 代入, 那么 δg_1 可以写成如下形式:

$$\delta g_1 = \frac{R^2}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{h - h_p}{l^3} \left[\delta g - \frac{T_0}{2R} \right] d\sigma. \quad (4)$$

假设有函数

$$\mu = \delta g - \frac{T_0}{2R}, \quad (5)$$

同时我们可以将 $(h - h_p)\mu$ 表示成如下形式

$$\begin{aligned} (h - h_p)\mu &= (h - h_p)\mu + h_p\mu_p - h_p\mu_p \\ &= -h_p(\mu - \mu_p) + (h\mu - h_p\mu_p). \end{aligned} \quad (6)$$

将上述等式代入方程(4), 可以得到

$$\begin{aligned} \delta g_1 &= -h \frac{R^2}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\mu - \mu_p}{l_0^3} d\sigma \\ &\quad + \frac{R^2}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{h\mu - (h\mu)_p}{l_0^3} d\sigma. \end{aligned} \quad (7)$$

应用物理大地测量中的球谐函数方法^[7], 可以将式(7)以球谐函数表达, 即

$$\begin{aligned} \delta g_1 &= \delta g_{11} + \delta g_{12} \\ &= \frac{h}{R} \sum_{n=0}^{\infty} n\mu_n - \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} n(h\mu)_n. \end{aligned} \quad (8)$$

设 μ 和 $h\mu$ 的球谐函数表达式为

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n$$

和

$$h\mu = \sum_{n=0}^{\infty} (h\mu)_n, \quad (9)$$

将等式

$$h \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n = h\mu = \sum_{n=0}^{\infty} (h\mu)_n$$

乘以 $\frac{1}{R}$, 同时与式(8)等式右边相加, 可以得到

$$\begin{aligned} \delta g_1 &= \delta g_{11} + \delta g_{12} = \frac{h}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\mu_n \\ &\quad - \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(h\mu)_n. \end{aligned} \quad (10)$$

在此, δg_1 可以分为两部分, 即

$$\delta g_{11} = \frac{h}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\mu_n$$

和

$$\delta g_{12} = -\frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(h\mu)_n. \quad (11)$$

将 δg 和 T_0 (注意, 这里 T_0 表示的意义为 T 的零阶近似, 而不是零阶谐函数) 表示为球谐函数形式 $\delta g = \sum \delta g_n$ 和 $T_0 = \sum T_n$, 考虑式(5), 式(11)可以转化为

$$\delta g_{11} = \frac{h}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\delta g_n - \frac{h}{2R^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)T_n. \quad (12)$$

根据物理大地测量学理论^[18,19], 可推出有以下

等式成立,即

$$\frac{1}{R} \sum_0^{\infty} (n+2) \delta g_n = - \frac{\partial \delta g}{\partial h}$$

和

$$\frac{1}{R} \sum_0^{\infty} (n+1) T_n = \delta g, \tag{13}$$

将式(13)代入(12),同时忽略 $\frac{h}{R}$ 量级误差,可以得出

$$\delta g_{11} = -h \frac{\partial \delta g}{\partial h}. \tag{14}$$

根据 δg_1 项的分解方法,同样可以将一阶地形项 ζ_1 分解为

$$\zeta_1 = \zeta_{11} + \zeta_{12}, \tag{15}$$

于是有

$$\begin{aligned} \zeta_{11} &= \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \delta g_{11} H(\psi) d\sigma \\ &= \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \left[-h \frac{\partial \delta g}{\partial h} \right] H(\psi) d\sigma, \end{aligned} \tag{16}$$

那么 ζ_{12} 可表示为

$$\zeta_{12} = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \delta g_{12} H(\psi) d\sigma, \tag{17}$$

Hotine 公式的球谐函数表达式为^[20]

$$\zeta_n = \frac{R}{(n+1)\gamma} \delta g_n, \tag{18}$$

将上式中 ζ 代之以 ζ_{12} , δg 代之以 δg_{12} , 顾及式(14),将 $n=0$ 到 ∞ 求和,考虑式(5),并且忽略误差为 $\frac{h}{R}$ 的数量级误差,那么有以下表达式成立

$$\zeta_{12} = -\frac{h}{\gamma} \delta g, \tag{19}$$

我们知道,扰动重力与扰动位之间的关系为

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial h},$$

将上式进一步变换可得到

$$\frac{\delta g}{\gamma} = -\frac{\partial T}{\partial h} \cdot \frac{1}{\gamma} = -\frac{\partial \left(\frac{T}{\gamma} \right)}{\partial h} = -\frac{\partial \zeta}{\partial h}, \tag{20}$$

那么式(19)则变为

$$\zeta_{12} = \frac{\partial \zeta}{\partial h} \cdot h, \tag{21}$$

这样公式(2)可以表示为

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \left(\delta g - \frac{\partial \delta g}{\partial h} h \right) H(\psi) d\sigma + \frac{\partial \zeta}{\partial h} h. \tag{22}$$

此方程形式简单,几何意义明显,在此称其为 GPS/重力边值问题的实用表达式. 我们可以简单的描述一下此公式物理含义,如图 1 所示,将地面扰动

重力归算到椭球(或球)面上,然后代入 Hotine 积分计算出椭球(或球)面上的高程异常,最后再加一个改正项,从而又归算到地面上.

3 GPS/重力边值问题实用表达简化与分析

回顾上节 GPS/重力边值问题的实用表达推导过程,我们多次忽略了 $\frac{h}{R}$ 量级误差影响. 事实上,在式(5)中,如果用 δg 近似替代 μ ,引起的相对误差量级也不会大于 $\frac{h}{R}$. 其实在实用表达推导过程中,已多次忽略了该项误差. 因此,在此可以将式(3)直接表示为

$$\delta g_1 = \frac{R^2}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{h-h_p}{l_0^3} \delta g d\sigma. \tag{23}$$

利用该式可以直接参照本文第 3 节的方法推导出 GPS/重力边值问题的实用表达,因此该式在忽略 $\frac{h}{R}$ 量级误差的情况下,与式(3)以及式(21)中的一阶项是等价的. 需要特别指出的是,与传统的 Molodensky 第三边值问题不同,由于在推导过程中 μ 的表达式不同,引起的误差量级也有所区别. 从定量化的角度分析,GPS/重力边值问题的实用表达要比在第三边值问题中忽略的误差小,其误差值约为第三边值问题的 33%.

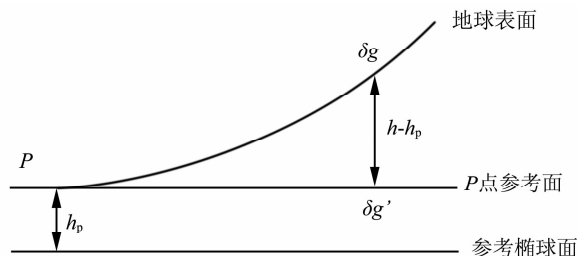


图 1 归化到 P 点参考面示意图

Fig. 1 Reduction to the reference level of point P

如图 1 所示,如果要将地面扰动重力归算到以大地高为 h_p 的点参考面上,那么在计算点 P 的高程异常时,式(22)中 h 必须以 $h-h_p$ 替代,而式中第二项为零,从而得到如下方程

$$T = \frac{R}{4\pi} \int_{\sigma} \left[\delta g - (h-h_p) \frac{\partial \delta g}{\partial h} \right] H(\psi) d\sigma. \tag{24}$$

事实上,可以将地球表面上的扰动重力 δg 延拓到 P 点的参考面上(如图 1),它们可以通过泰勒级数联

系起来^[21],即

$$\begin{aligned} \delta g = & \delta g' + (h - h_p) \frac{\partial \delta g}{\partial h} \\ & + \frac{1}{2}(h - h_p)^2 \frac{\partial^2 \delta g}{\partial h^2} + \dots \end{aligned} \quad (25)$$

因为 $\delta g'$ 是以 P 点为参考面上数据,因此可以利用 Hotine 积分求解高程异常,即

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \delta g' H(\psi) d\sigma, \quad (26)$$

在式(25)中,如果只考虑扰动重力梯度项,那么 P 点水准面上的 $\delta g'$ 可以表示为

$$\delta g' = \delta g - (h - h_p) \frac{\partial \delta g}{\partial h}. \quad (27)$$

将上式代入式(26),亦可得出与式(24)相同的表达式,我们将这个表达式称为 GPS/重力边值问题的实用公式. GPS/重力边值问题的实用公式具有简单,物理意义明确的特点. 它的几何意义是:扰动重力从地面归算到所计算点参考面上. 这样,各个计算点具有不同的参考面. 同时该实用公式引入扰动重力垂直梯度这一物理量,这在局部重力场确定中有着重要意义^[22,23].

从式(25)可以看出,该实用公式只是考虑到了泰勒级数展开式中的一阶项,而对包括二阶及以上的项进行了直接取舍. 在当前厘米级(似)大地水准面精度要求下,这种做法是否合适尚需进行深入研究. 在以重力异常为基本输入量的 Molodensky 边值问题中,章传银等人通过详细分析厘米级高程异常的地形影响特征,得出在我国丘陵及山区必须考虑 Molodensky 二阶项的影响^[24]. 因此定量地预估 GPS/重力边值问题二阶项影响,理论上推导适合厘米级(似)大地水准面的 GPS/重力边值问题公式将具有非常重要的意义.

4 结 语

GPS 技术的出现,不仅使物理大地测量的理论体系发生了改变,解决了物理大地测量中的一些难题,也为传统物理大地测量的理论和方法赋予了新的内涵. 本文详细的描述了 GPS/重力边值问题实用公式的推导过程,指出了忽略的误差量级以及几种表达式在忽略 $\frac{h}{R}$ 相对误差量级的等价性,同时对其物理意义进行了详尽的阐述,最后利用扰动重力的泰勒级数展开式直接证明了实用公式的正确性和物理意义. 事实上,相比第三边值问题而言,对 GPS/重力边值问题的研究还是初步的,尤其是在实

际应用阶段与第三边值问题还具有较大的差距. 因此,发挥 GPS 技术的优势,继续研究 GPS/重力边值问题,开发适合厘米级大地水准面的理论和实用模型将是以后的研究方向.

参 考 文 献 (References):

- [1] 李斐,陈武,岳建利. GPS/重力边值问题的求解及应用[J]. 地球物理学报,2003,46(5):595~599.
Li F, Chen W, Yue J Li. On solution and application of GPS/Gravity boundary value problem[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2003,46(5):595~599.
- [2] 李斐,岳建利,张利明. 应用 GPS 重力数据确定(似)大地水准面[J]. 地球物理学报,2005,48(2):294~298.
Li F, Yue J L, Zhang L M. Determination of Geoid by GPS/Gravity Data[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2005,48(2), 294~298.
- [3] 李叶才. 关于 Hotine 积分的有关注记[J]. 武汉测绘科技大学学报,1989,14(1):38~47.
Li Y C. Some notes on hotine integration[J]. Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, 1989,14(1):38~47.
- [4] 于锦海,张传定. GPS-重力边值问题[J]. 中国科学 D 辑,2003,33(10):988~996.
Yu J H, Zhang C D. GPS-Gravity boundary value problem[J]. Science in China(Series D),2003,33(10):988~996.
- [5] 于锦海,张传定. 卫星测高混合边值问题的球谐级数解法[J]. 地球物理学报,2005,48(3):561~566.
Yu J H, Zhang C D. A solution method for the satellite altimetry problem with the spherical harmonic series[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2005,48(3):561~566.
- [6] 吴晓平,李姗姗,张传定. 扰动重力边值问题与实际数据处理的研究[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2003,28(SI):73~78.
Wu X P, Li S S. Problem of the Boundary Value of Disturbing Gravity and Practical Data Processing[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2003,28(SI):73~78.
- [7] Vanicek P, Zhang C Y, Sjoberg L E. A Comparison of Stokes and Hotine's Approaches to Geoid Computation[J]. Manu. Geod, 17(1992),29~35.
- [8] Bjerhammar A, Svensson L. On the geodetic boundary value problem for a fixed boundary surface-A satellite approach[J]. Bull. Geod, 57(1983),382~393.
- [9] 周旭华,吴斌,许厚泽,彭碧波. 数值模拟估算低低卫-卫跟踪观测技术反演地球重力场的空间分辨率[J]. 地球物理学报,2005,48(2):282~287.
Zhou X H, Wu B, Xu H Z, Peng B B. Resolution estimation of Earth gravity field recovery through the low-low satellite to satellite technology by numerical simulation[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2005,48(2):282~287.
- [10] 张利明,李斐. 确定(似)大地水准面的方法分析及适用性研究[J]. 地球物理学进展,2005,20(1):198~203.

- Zhang L M, Li F. Research and analysis of quasi-geoid determination[J]. *Progress In Geophysics*, 2005, 20(1): 198~203.
- [11] 孙和平, 徐建桥, 黎琼. 地球重力场的精细频谱结构及其应用[J]. *地球物理学进展*, 2006, 21(2): 345~352.
- Sun H P, Xu J Q, Li Q. Detail spectral structure of Earth's gravity field and its application[J]. *Progress In Geophysics*, 2006, 21(2): 345~352.
- [12] 陈石, 张健. 重力位场谱分析方法研究综述[J]. *地球物理学进展*, 2006, 21(4): 1113~1119.
- Chen S, Zhang J. The view of the spectral analysis method of gravity potential field[J]. *Progress In Geophysics*, 2006, 21(4): 1113~1119.
- [13] 刘少华. 2006 年下半年三次重要地球物理会议概述[J]. *地球物理学进展*, 2006, 21(4): 1370~1372.
- Liu S H. A summary on three important geophysics meeting in the second half year of 2006[J]. *Progress In Geophysics*, 2006, 21(4): 1370~1372.
- [14] 周江存, 孙和平. 海潮对卫星重力场恢复的影响[J]. *地球物理学报*, 2007, 50(1): 115~121.
- Zhou J C, Sun H P. Effect of ocean tide on recovery of satellite gravity field[J]. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2007, 50(1): 115~121.
- [15] 张兴福, 沈云中, 胡雷鸣. 基于 CHAMP 短弧长动力学轨道的地球重力场模型[J]. *地球物理学报*, 2007, 50(1): 106~110.
- Zhang X F, Shen Y Z, Hu L M. A gravity field model based on CHAMP short-arc dynamical orbits[J]. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2007, 50(1): 106~110.
- [16] 王谦身, 滕吉文, 王光杰, 张雪梅, 张洪双. 应用卫星重力信息对横断山系地区布格重力异常特异分布的纠正[J]. *地球物理学进展*, 2007, 22(2): 345~352.
- Wang Q S, Teng J W, Wang G J, Zhang X M, Zhang H S. The correction for special pattern of Bouguer gravity anomaly in Heng Duan Mts area by using satellite gravity[J]. *Progress in Geophysics* (in Chinese), 2007, 22(2): 345~352.
- [17] 韩保民, 许厚泽. 重力场恢复中的基于星载 GPS 的低轨卫星简化动力学定轨方法研究[J]. *地球物理学进展*, 2007, 22(1): 73~79.
- Han B M, Xu H Z. GPS-based reduced-dynamic orbit determination for gravity field recovery[J]. *Progress in Geophysics* (in Chinese), 2007, 22(1): 73~79.
- [18] Heiskanen W A, Moritz H. *Physical Geodesy*[M]. San Francisco and London: W H Freeman Co, 1967.
- [19] Molodensky M S, Eremeev V F, Yurkina M I. *Methods for study of the external gravitational field and figure of the earth* [M]. Translated from the 1960 original, The Israeli Programme for the Translation of Scientific Publications, Jerusalem, Israel, 1962.
- [20] 边少锋, 骆鸣津, 高金耀, 张赤军. 用地表、低空重力资料解算三类大地测量边值问题[J]. *自然科学进展* 2006, 16(7): 835~842.
- Bian S F, Luo M J, Gao J Y, Zhang C J. The method of Solving three kinds of geodetic boundary value problem by ground and low-altitude gravity data[J]. *Progress in Natural Science*, 16(7): 835~842.
- [21] Moritz H. *Advanced physical geodesy*[M]. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1980.
- [22] 张赤军, 边少锋. 地面扰动重力垂直梯度的确定[J]. *地球物理学进展*, 2005, 20(4): 969~973.
- Zhang C J, Bian S F. Determination of disturbing gravity vertical gradient in Earth's surface[J]. *Progress In Geophysics*, 2005, 20(4): 969~973.
- [23] 边少峰, 纪兵. 重力梯度仪的发展及其应用[J]. *地球物理学进展*, 2006, 21(2): 660~664.
- Bian S F, Ji B. The development and application of the gravity gradiometer[J]. *Progress In Geophysics*, 2006, 21(2): 660~664.
- [24] 章传银, 晁定波, 丁剑, 等. 厘米级高程异常地形影响的算法及特征分析[J]. *测绘学报*, 2006, 35(4): 208~314.
- Zhang C Y, Chao D B, Ding J, *et al.* Arithmetic and characters analysis of terrain effects for CM-order precision height anomaly[J]. *Acta geodaetica et cartographica*, 2006, 35(4): 208~314.