

2 + 1 维 $SU(2)$ 格点规范场胶球波函数的高阶 RPA 计算*

惠萍¹⁾

(广东教育学院物理系 广州 510303)

摘要 采用无规相近似(RPA)耦合集团展开方法求解薛定谔本征值方程,计算高阶胶球波函数.在计算中,用空心 Wilson 圈图作为试探波函数,对特殊 Wilson 圈图作近似处理,计算出的 2 + 1 维 $SU(2)$ 格点规范场的六阶和七阶胶球波函数的 μ_0^F 和 μ_2^F 及相关参数 ζ 在弱耦合区($\beta = 4.8-9.6$)出现较好的标度行为,七阶真空能量在整个区域($\beta = 0.8-8.0$)与六阶真空能量一致.

关键词 格点规范场 胶球波函数 真空能量

1 引言

1980 年 J. P. GREENSITE^[1] 导出格点规范理论真空态的薛定谔本征值方程,虽然此方程无法严格求解,但为进一步研究真空态和胶球态打下了理论基础. 1993 年 SMITH^[2] 等人提出了一种截断本征值方程的近似方法,计算出的 2 + 1 维 $SU(2)$ 群的胶球质量没有好的标度性. 求解薛定谔本征值方程有数值计算和解析计算两种方法,其中解析计算的优点具有清晰的物理图象和物理过程,近年来在低阶解析计算方面已取得了一些很有意义的成果^[3-6],但高阶计算却无进展,因为高阶计算的复杂程度是难以想象的,例如:文献^[3,4]提出的保持连续极限截断本征值方程的集团展开的方法,在计算 2 + 1 维 $SU(2)$ LGT 的四阶真空波函数时,只涉及到 70 个独立 Wilson 圈图,计算过程已是相当的复杂了,到了 5 阶计算,独立 Wilson 圈图达到了 400 多个^[7],这是因为在低阶计算中, Wilson 圈图“繁殖”得特别快,所以解析计算的发展受到了限制. 如何找到更好的方法使计算简化,并能改善计算结果的标度行为和收敛性,是一项艰难的工作. 文献^[8,9]提出了将无规相

近似(RPA)方法应用到耦合集团展开方法中,给出了高阶计算中重叠 Wilson 圈图和多图组合的 Wilson 圈图的近似处理方法,大大地简化了高阶计算的复杂性,并成功地用于 2 + 1 维 $SU(3)$ 格点规范理论(LGT)的真空波函数和胶球质量的计算,把 2 + 1 维 $SU(3)$ 格点规范理论的计算从原来的三阶提高到四阶,而且得到的真空波函数显示出收敛的趋势,胶球质量^[9]也比较早的结果有所改善. 最近将上述方法运用于 2 + 1 维 $SU(2)$ 格点规范场真空波函数的计算^[10]中,计算结果在弱耦合区中显示了良好的标度性. 但将这种方法推广到七阶胶球波函数的计算中时,涉及到大量的、复杂的和重叠图的七阶 Wilson 圈图使计算工作难以进行下去,计算过程要比六阶真空波函数以及七阶胶球质量的计算要复杂得多,为了克服高阶复杂图形计算的困难,本文把运算中出现的特殊图形作近似处理,在试探波函数中不保留特殊图形,使七阶胶球波函数的计算成为可能. 本文首先将这种方法的六阶胶球质量和真空能量的计算结果与保留特殊图方法的六阶计算结果加以比较,并进一步计算出弱耦合区的七阶胶球波函数、相关参数以及真空能量.

2004-07-05 收稿

* 广东省自然科学基金资助(33446),广东教育学院教授、博士科研专项经费资助

1) E-mail: huiping519@tom.com

2 薛定谔本征值方程和求解方法

2+1 维 $SU(2)$ LGT 的 Kogut-Susskind 哈密顿量 H 是:

$$H = \frac{g^2}{2a} \left[\sum_l E_l^\alpha E_l^\alpha - \frac{4}{g^4} \sum_p \text{Tr} U_p \right], \quad (2.1)$$

其中 $E_l^\alpha |0\rangle = |0\rangle$, $\text{Tr} U_p = \text{Tr} U_1 U_2 U_3 U_4$, a 是格距, g 为无量纲的耦合常数, 它与不变荷 e 的关系为 $g^2 = e^2 a$. 在 $1/g^2 \rightarrow \infty$ 的弱耦合区, $a \rightarrow 0$.

真空波函数和胶球波函数的表达式分别为

$$| \Omega \rangle = e^{R(U)} | 0 \rangle, \\ | F \rangle = \left[F(U) - \frac{\langle \Omega | F(U) | \Omega \rangle}{\langle \Omega | \Omega \rangle} \right] | \Omega \rangle, \quad (2.2)$$

其中 $R(U)$ 和 $F(U)$ 由 Wilson 圈图组成. $R(U)$ 和 $F(U)$ 按照各阶空心图的展开式可表示为

$$R(U) = \sum_i R_i(U), \\ F(U) = \sum_i F_i(U), \quad (2.3)$$

计算 $R(U)$ 和 $F(U)$ 中的每一个图的长波长极限可以得到

$$R(U) = - \frac{\mu_0}{e^2} \int \text{Tr} F^2 dx^2 - \\ \frac{\mu_2}{e^6} \int \text{Tr} (DF)^2 dx^2 + \dots, \\ F(U) = - \frac{\mu_0^F}{e^2} \int \text{Tr} F^2 dx^2 - \\ \frac{\mu_2^F}{e^6} \int \text{Tr} (DF)^2 dx^2 + \dots,$$

其中 μ_0 和 μ_2 及 μ_0^F 和 μ_2^F 由 $R(U)$ 和 $F(U)$ 展开系数来决定, $\zeta_0 = |\mu_2|/\mu_0$ 和 $\zeta = |\mu_2^F|/\mu_0^F$ 分别为真空波函数和胶球波函数的相关常数, F 为规范场张量, D 为协变微分. $R(U)$ 和 $F(U)$ 所满足的本征值方程分别为

$$H | \Omega \rangle = \epsilon_0 | \Omega \rangle, H | F \rangle = \epsilon_F | F \rangle. \quad (2.4)$$

设 $w = \frac{2a}{g^2} H$, 则 $w | \Omega \rangle = w_0 | \Omega \rangle$, 由此得到真空能量 ϵ_0 与 w_0 的关系为 $\epsilon_0 = w_0 g^2 / 2a$. 由(2.1)和(2.2)式导出:

$$\sum_l \{ [E_l^\alpha, [E_l^\alpha, R]] + [E_l^\alpha, R] [E_l^\alpha, R] \} - \\ \frac{4}{g^4} \sum_p \text{Tr} U_p = w_0, \quad (2.5) \\ \sum_l \{ [E_l^\alpha, [E_l^\alpha, F(U)]] +$$

$$2 [E_l^\alpha, F(U)] [E_l^\alpha, R(U)] \} -$$


$$\Delta w F(U) = \text{const}, \quad (2.6)$$

其中 Δw 为胶球质量隙: $\Delta w = \epsilon_F - w_0$, 胶球质量 $m = \Delta w \frac{g^2}{2a} = \Delta w e^2 / 2$.


把本征方程(2.5)和(2.6)在 $N=7$ 阶截断得

$$\sum_l \left[E_l^\alpha, \left[E_l^\alpha, \sum_{n=1}^N R_n \right] \right] + \\ \sum_{n+n' \leq N} [E_l^\alpha, R_n] [E_l^\alpha, R_{n'}] \} - \\ \frac{4}{g^4} \sum_p \text{Tr} U_p = w_0, \quad (2.7)$$

$$\sum_l \left[E_l^\alpha, \left[E_l^\alpha, \sum_{n=1}^N F_n \right] \right] + \\ \sum_{n+n' \leq N} [E_l^\alpha, F_n] [E_l^\alpha, R_{n'}] \} - \\ \Delta w \sum_n F_n = \text{const}, \quad (2.8)$$

计算中, $i+j$ 阶图是由 $[E, R_i] [E, R_j]$ 的计算所产生的. 对于七阶计算, (2.7)和(2.8)式所涉及的图形多而复杂, 使解析计算变得十分艰难, 例如, 对于六阶计算涉及 55 个图形, 但在七阶计算中, 光是七阶图就有 109 个, 这里还不包括特殊图形. 在方程(2.7)中, 计算量最大和最复杂的是 $[E, R_3] [E, R_4]$, $[E, R_2] [E, R_5]$ 和 $[E, R_1] [E, R_6]$ 三项中所涉及到的七阶重叠交错图, 且计算过程中会产生很多特殊的怪图. 为了使计算能进行下去, 必须简化计算过程, 参照文献[4]的近似方法, 将所有的特殊图形做近似处理, 在试探波函数中, 这些特殊图形将不保留. 在计算过程中, 特殊图形从四阶计算开始出现, 在四阶计算中存在一个特殊图形 , 它出现在下面的对易式中:

$$[E, \square] [E, \square] \rightarrow 2 [\square - 1/2 \square] \approx 0.$$

在计算时, 将等式右边括号中的两项同时去掉. 另外一个四阶特殊图形  不是独立的, 它出现在下面是式子中:

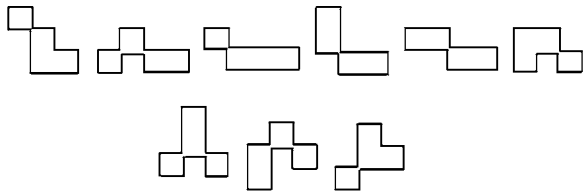
$$[E, \square] [E, \square] \rightarrow 2 [\square - 1/2 \square].$$

在计算中, 利用么模条件 $2\delta_{\alpha\beta} = 2(U^3)_{\alpha\beta} - 2(\text{Tr} U)(U^2)_{\alpha\beta} + [(\text{Tr} U)^2 - \text{Tr}(U^2)] U_{\alpha\beta}$ (其中 U 是任意 Wilson 圈图) 把它用独立的相关图表示出来:

$$\square \square = [\square \square - \square \square + \square \square] / 2.$$

为了分析这种近似处理方法对计算结果产生的影响,本文将这种方法的六阶胶球质量和真空能量的计算结果与保留特殊图的结果加以比较来说明:在一至六阶计算中,五阶特殊图有两个

六阶特殊图有 9 个



在方程(2.7)和(2.8)计算中,取 $N = 6$,将这些图形作近似处理后,可以得到 55 个一至六阶独立图形和 55 条独立方程(过程省略),利用 Feymann-Hellman 定理可以解出六阶胶球质量和真空能量如图 1 和图 2 所示.从图 1 和图 2 看到:在弱耦合区($\beta > 4.0$),不保留特殊图的六阶胶球质量比保留特殊图的胶球质量^[11]略低;

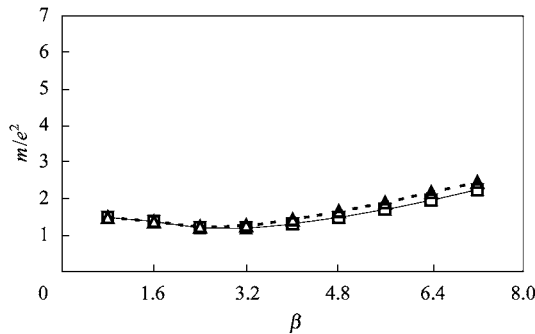


图 1 六阶胶球质量的比较

.....□..... 不采用特殊图的六阶结果
---△--- 采用特殊图的六阶结果

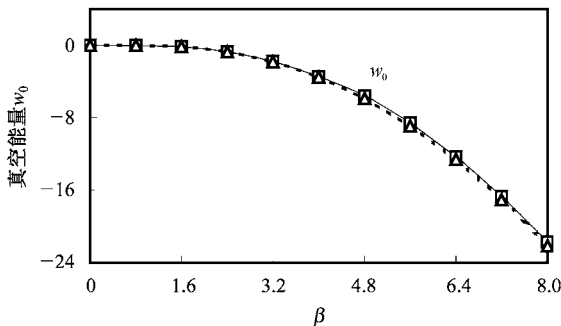
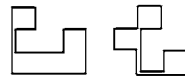


图 2 六阶的真空能量的比较

.....□..... 不采用特殊图的六阶结果
---△--- 采用特殊图形六阶结果

在整个区域($\beta = 0.8-8.0$)不保留特殊图的六阶

真空能量与保留特殊图的真空能量几乎重合.在七阶计算中,存在更多复杂的特殊图,如



使计算无法进行,所以采用上述近似方法对特殊图进行近似处理.

按照文献[8,9]提出的 RPA 方法,在七阶计算中,对所涉及的双图组态或多图组态中较小的图取平均值,而保留较大的图,例如:

$$\begin{aligned} \square \square &= \langle \square \rangle \square, & \square \square &= \langle \square \rangle \square, \\ \square \square &= \langle \square \rangle \square. \end{aligned}$$

七阶计算和六阶计算一样,小图的平均值共 4 个,分别用 $x(3), x(4), x(7)$ 和 $x(8)$ 表示:

$$\begin{aligned} x(3) &= \langle \square \rangle, & x(4) &= \langle \square \rangle, \\ x(7) &= \langle \square \rangle, & x(8) &= \langle \square \rangle, \end{aligned}$$

(2.3)式中的 $F(U)$ 与 $R(U)$ 的七阶展开形式相同,只是展开系数不同.不包括特殊图形,一阶和二阶图都是 1 个,三阶图 2 个,四阶图 5 个,五阶图 12 个,六阶图 35 个,七阶图 109 个,图 3 只列出部分七阶独立空心图:

$$F_7 = a_1 \square + a_2 \square + a_3 \square + a_4 \square + a_5 \square + a_6 \square + a_7 \square + a_8 \square + \dots + a_{109} \square$$

图 3 七阶空心图

计算中,一到五阶图的 $F(U)$ 展开系数表示为 $z(1), z(2), z(5), z(6), z(9)-z(25)$, $R(U)$ 的展开系数为 $x(1), x(2), x(5), x(6), x(9), \dots, x(25)$.

值得说明的是,在对易关系的计算中,应考虑到了各种圈图的方位不同对计算图形的贡献,例如:

$$\begin{aligned} [E, \square][E, \square] &\rightarrow (1/2)[E, \square][E, \square] + \\ &(1/2)[E, \square][E, \square], [E, \square][E, \square] \rightarrow \\ &(1/4)[E, \square][E, \square] + (1/2)[E, \square][E, \square] + \\ &(1/4)[E, \square][E, \square], \end{aligned}$$

采用这种方法得到真空能量 w_0 的表达式为

$$w_0 = -4x(1)^2 - 3x(2)^2 - x(5)^2 - 2x(6)^2.$$

$$\text{设 } w' = w + x(1)' \square + x(2)' \square + x(5)' \square + x(6)' \square,$$

应用 Feymann 定理可以得到 $x(3), x(4), x(7)$ 和 $x(8)$ 所满足的方程:

$$x(3) = \frac{\partial w'}{\partial x(1)'} = - \left[8x(1) + 6x(2) \frac{\partial x(2)}{\partial x(1)} + \right.$$

$$\left. 2x(5) \frac{\partial x(5)}{\partial x(1)} + 4x(6) \frac{\partial x(6)}{\partial x(1)} \right] \frac{\partial x(1)}{\partial x(1)'},$$

$$x(4) = \frac{\partial w'}{\partial x(2)'} = - \left[8x(1) \frac{\partial x(1)}{\partial x(2)} + \right.$$

$$6x(2) + 2x(5) \frac{\partial x(5)}{\partial x(2)} +$$

$$\left. 4x(6) \frac{\partial x(6)}{\partial x(2)} \right] \frac{\partial x(2)}{\partial x(2)'},$$

$$x(7) = \frac{\partial w'}{\partial x(5)'} = - \left[8x(1) \frac{\partial x(1)}{\partial x(5)} + 6x(2) \frac{\partial x(2)}{\partial x(5)} + \right.$$

$$\left. 2x(5) + 4x(6) \frac{\partial x(6)}{\partial x(5)} \right] \frac{\partial x(5)}{\partial x(5)'},$$

$$x(8) = \frac{\partial w'}{\partial x(6)'} = - \left[8x(1) \frac{\partial x(1)}{\partial x(6)} + 6x(2) \frac{\partial x(2)}{\partial x(6)} + \right.$$

$$\left. 2x(5) \frac{\partial x(5)}{\partial x(6)} + 4x(6) \right] \frac{\partial x(6)}{\partial x(6)'}.$$

将 Wilson 圈图 $R(U)$ 和 $F(U)$ 代入薛定谔方程 (2.7) 和 (2.8) 推导出关于真空波函数的独立方程 168 条 (略) 和胶球波函数的独立方程 164 条 (略), 再由 $R(U)$ 和 $F(U)$ 计算出每一个 Wilson 圈图的长波长极限得到胶球波函数 μ_0^F 和 μ_2^F 及计算公式 (由于公式太长, 在这里省略), 求解封闭方程组得到 $R(U)$ 和 $F(U)$ 的展开系数、 μ_0^F 和 μ_2^F 、相关参数 ζ 及真空能量.

3 计算结果

采用空心 Wilson 圈图组成的试探波函数 (不保留特殊图形), 利用变分法计算出六阶和七阶胶球波函数的 μ_0^F 和 μ_2^F 随着耦合常数 $\beta = 4/g^2$ 的变化曲线如图 4 所示. 图 4 表明 μ_0^F 和 μ_2^F 的六阶和七阶结果在弱耦合区 ($\beta = 4.8-9.6$) 的较宽区域都出现较好的标度行为, 而且 μ_0^F 和 μ_2^F 的标度区是一致的. 真空

波函数和胶球波函数除了总的归一化因子外, 还有一个重要参量是相关常数 $\zeta_0 = |\mu_2|/\mu_0$ 和 $\zeta = |\mu_2^F|/\mu_0^F$, 图 5 展示了相关参数 ζ_0 和 ζ 随着 β 的变化曲线, 在 $\beta > 4.8$ 的弱耦合区, ζ_0 和 ζ 都出现较好的标度行为, 六阶和七阶的相关常数 ζ 曲线趋于重合. 图 6 展示了六阶和七阶真空能量随着 β 的变化曲线, 可以看到的六阶和七阶真空能量在整个区域 ($\beta = 0.8-8.0$) 是一致的

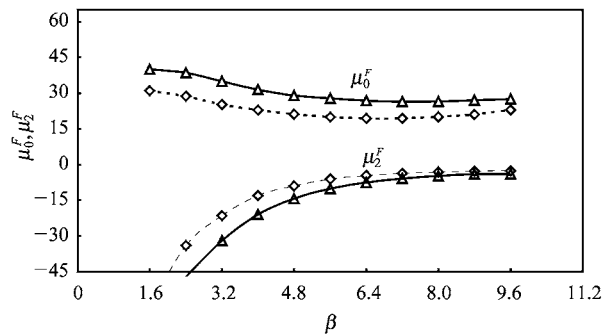


图 4 六阶(虚线)和七阶(实线)胶球波函数 μ_0^F 和 μ_2^F

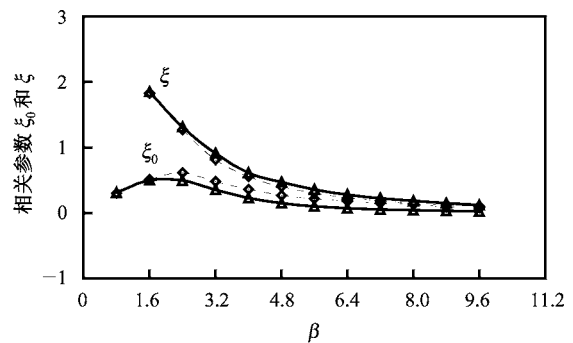


图 5 六阶(虚线)和七阶(实线)真空波函数的相关参数 ζ_0 和胶球波函数的相关参数 ζ

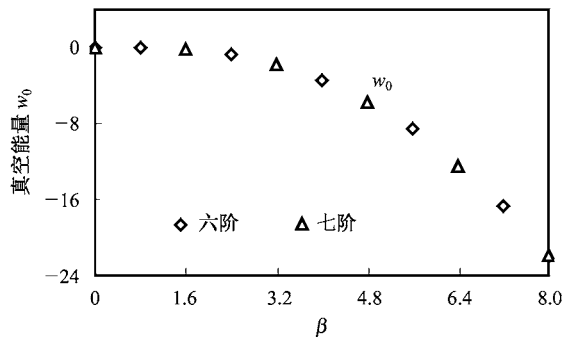


图 6 六阶(菱形)和七阶(三角形)的真空能量

从文献 [8, 9] 和本文结果看到: (1) 采用空心

Wilson 圈图大大简化了计算过程,去掉特殊图形的处理方式使RPA方法更容易推广到2+1维 $SU(3)$ LGT和3+1维 $SU(3)$ LGT实际物理中的高阶计算中。(2)六阶和七阶真空能量结果趋于一致暗示2+1维 $SU(3)$ LGT和3+1维 $SU(3)$ LGT的RPA高阶胶

球质量和真空能量可能出现理想的收敛行为,进一步的工作是将此方法推广到2+1维 $SU(3)$ LGT五阶计算中,以便对LGT进行更深入的研究。

作者感谢中山大学陈启洲教授的有益讨论。

参考文献 (References)

- 1 Greensite J P. Nucl. Phys., 1980, **B166**:113—124
- 2 Llewellyn Smith C H, Watson N. J. Phys. Lett., 1993, **B302**:463—471
- 3 GUO X H, CHEN Q Z, LI L. Phys. Rev., 1994, **D49**(1):507—510
- 4 CHEN Q Z, GUO S H, ZHENG W H et al. Phys. Rev., 1994, **D50**(5):3564—3565
- 5 CHEN Q Z, CAI P F, FANG X Y et al. Commun. Theor. Phys., 1995, **27**:337—342
- 6 HUI P, CHEN Q Z. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1995, **19**(9):820—825(in Chinese)
- (惠萍,陈启洲. 高能物理与核物理, 1995, **19**(9):820—825)
- 7 HUI P. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1998, **22**(4):322—325 (in Chinese)
- (惠萍. 高能物理与核物理, 1998, **22**(4):322—325)
- 8 HUI P, FANG X Y, CHEN Q Z. Phys. Rev., 2000, **D62**:034505-1-5
- 9 FANG X Y, HUI P et al. Phys. Rev., 2002, **D65**:114505-1-3
- 10 HUI P. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2004, **28**(5):487—489 (in Chinese)
- (惠萍. 高能物理与核物理, 2004, **28**(5):487—489)
- 11 HUI P. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2004, **28**(6):580—583 (in Chinese)
- (惠萍. 高能物理与核物理, 2004, **28**(6):580—583)

Higher Order RPA Calculation of the Glueball Wave Function in 2 + 1-D $SU(2)$ LGT*

HUI Ping¹⁾

(Department of Physics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou 510303, China)

Abstract By Solving Shrodinger equation with the RPA coupled cluster method, The higher order glueball wave function in 2 + 1-D $SU(2)$ lattice gauge theory is calculated. In the calculation, hollow Wilson graphs are selected as the trial wave function, and special Wilson graphs are treated approximately. The sixth and the seventh order results for the coefficients μ_0^F and μ_2^F and the relevant parameter ζ of the glueball wave function show good scaling behaviors at weak coupling region($\beta = 4.8—9.6$). The seventh order vacuum energy curve is in agreement with the sixth order ones for in the coupling region of $\beta = 0.8—8.0$.

Key words lattice gauge theory, glueball wave function, vacuum energy

Received 5 July 2004

* Supported by Guangdong Provincial Natural Science Foundation(33446)and Appropriative Research Fund for Professors and Doctors, Guangdong Institute of Education

1)E-mail:huiping519@tom.com