

中间耦合条件下的 Eikonal 近似*

杨永栩

(广西师范大学物理系, 桂林 541001)

李清润

(中国科学院高能物理研究所, 北京 100039)

摘 要

本文研究了中间耦合条件下的 Eikonal 近似。结果表明, Eikonal 近似的适用性与位势的形状有关。

Eikonal 近似广泛地被应用在各种中高能粒子碰撞的研究中。Glauber 在其开创性的工作中^[1], 给出了 Eikonal 近似的适用条件为 $ka \gg 1$ 和 $|V_0|/E \ll 1$ 。Joachain 在其《量子碰撞理论》一书^[2]以及他与 Byron 等人所做的一系列工作中^[3-5], 研究了 Eikonal 近似在强耦合情况(即 $|V_0|/E \gg 1$)和中间耦合情况(即 $|V_0|/E \lesssim 1$)下的适用性问题。对于强耦合情况, 他们得到的结论是: Eikonal 近似在小角度区域仍给出极好的结果。对于中间耦合情况, 他们得到的结论是^[3]: 对于 Yukawa 类型位势, Eikonal 近似在整个角区($0^\circ-180^\circ$)都能给出很好的结果。

我们在最近的研究中发现^[6], Joachain 等人对于强耦合条件下得到的结论具有局限性; 实际上, 他们的结论只对于某一类位势是对的, 而对于其它一些类型的位势则不对。

在本文中, 将研究 Eikonal 近似在中间耦合情况下的适用性问题。

我们考虑一个质量为 m 的粒子被一个力程为 a 的中心位势 $V(r)$ 散射。在 Eikonal 近似下, 散射振幅为

$$F(q) = \frac{k}{i} \int_0^\infty db b J_0(qb) [e^{i\chi(b)} - 1], \quad (1)$$

其中

$$\chi(b) = -\frac{1}{2k} \int_{-\infty}^\infty U(b, z) dz, \quad (2)$$

这里, k 是入射波数, $U(r) = \frac{2m}{\hbar^2} V(r)$ 。上面这一散射振幅的表示式, 是在 $ka \gg 1$ 和 $|V_0|/E \ll 1$ (V_0 是 $V(r)$ 的强度)条件下得到的^[1], 所以, 这些通常被认为是 Eikonal 近似的适用条件。

Joachain 等人把 $|V_0|/E \ll 1$ 的条件解除, 研究当 $|V_0|/E \lesssim 1$ (他们称之为中间耦

本文 1991 年 6 月 12 收到。

* 国家自然科学基金资助。

合)条件下 Eikonal 近似的适用性问题。他们选择 Yukawa 势 $U(r) = U_0 e^{-r/a}/r$ 进行研究。作为中间耦合情况,他们取 $k = 5$, $U_0 = -10$, $a = 1$ (以 $a = 1$ 作为长度单位), 这时 $|V_0|/E = |U_0|/k^2 = 0.4$, 即满足 $|V_0|/E \lesssim 1$ 的条件。对于这组参数,他们的计算结果表明, Eikonal 近似在全角区都与精确解较好地符合。

但是,当我们把位势从 Yukawa 类型转为其它类型时,情况则发生变化。现在让我们来研究在核物理中两类经常遇到的位势——高斯势和方阱势,即

$$U(r) = U_0 e^{-r^2/a_g^2} \quad (3)$$

和

$$U(r) = \begin{cases} U_0, & r \leq a_s \\ 0, & r > a_s \end{cases} \quad (4)$$

对应 Yukawa 势 $a = 1$, 应取 $a_g = 2$ (高斯势)和 $a_s = 3.15$ (方阱势),以使得位势的均方半径

$$\langle r^2 \rangle = \int U(r) r^2 d^3r / \int U(r) d^3r \quad (5)$$

的值对于这三种位势是一样的。对于中间耦合情况,为了和 Joachain 等人的结果直接比较,我们也同样取 $k = 5$ 和 $U_0 = -10$ 。对于高斯势和方阱势,计算出的微分截面曾在文献[6]中给出([6]中的图 8 和 9)。但在那里只是顺带地提了两句关于中间耦合情况下也有势的依赖性问题,而列出了那两个图以显示这种依赖性,但对那两个图未做任何讨论。由于本文的主题是研究中间耦合条件下 Eikonal 近似的适用性问题,为了使论证系统和透彻,这里对 [6] 中的图 8 和 9 加以一些讨论。从那两个图可看出,对于高斯势,在散射角小于 80° 的区域, Eikonal 近似与精确解基本一致(但应看到,由于截面随角的变化很陡,两条曲线之间的差别可达 3—4 倍之大);而对于散射角大于 80° 的区域, Eikonal 近似解与精确解间的差别已变成十分巨大,可达几个数量级。对于方阱势的情况,在 $\theta = 0^\circ$ 附近的小角度区, Eikonal 近似和精确截面之间的差误可达 100%。而对于其余的角区域,只能说 Eikonal 近似给出与精确解相似的截面随角度的振荡行为,但谈不上 Eikonal 近似的可靠性,因为在某些角度下,两者的大小在量级上的差别。因此我们看到,在中间耦合条件下 Joachain 等人对于 Yukawa 势得到的 Eikonal 近似在全角区是好近似的结论,对高斯势和方阱势则不成立。

如所周知, Eikonal 近似是高能下适用的近似,即要求 $ka \gg 1$ 。为了进一步阐明上面所得结果的一般性,我们把能量进一步提高,研究 $k = 10$ 的情况。为了对应中间耦合的情况,我们取 $U_0 = -40$ 。这时 $|V_0|/E = |U_0|/k^2 = 0.4$, 即保持与上例情况有相同的 $|V_0|/E$ 值。对于 Yukawa 势,高斯势和方阱势的计算结果分别给在图 1—3 中。

从图 1 可以看到,对于 Yukawa 势来说,在能量进一步提高的情况下, Joachain 等人得到的 Eikonal 近似在全角区是好近似的结论仍适用。但对于高斯势和方阱势的情况,即使能量进一步提高(即 $ka \gg 1$ 条件满足得更好), Joachain 等人的结论仍不适用。从图 2 中可看到,对于高斯势,在 $\theta < 50^\circ$ 的角区虽然 Eikonal 近似给出正确的截面变化行为,但由于曲线很陡,两条曲线间的差别很大,例如在 $\theta = 50^\circ$ 时,数值相差 3 倍。而对于 $\theta > 80^\circ$ 的角区,截面相差可达 3—4 个数量级。对于方阱势,从图 3 可看

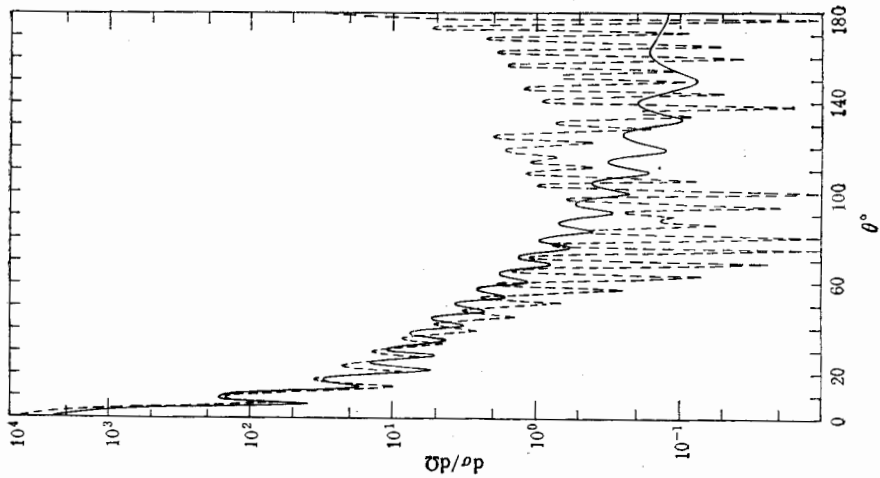


图3 方阱势微分截面

$k = 10, U_0 = -40$.

实线是 Eikonal 解; 虚线为精确解

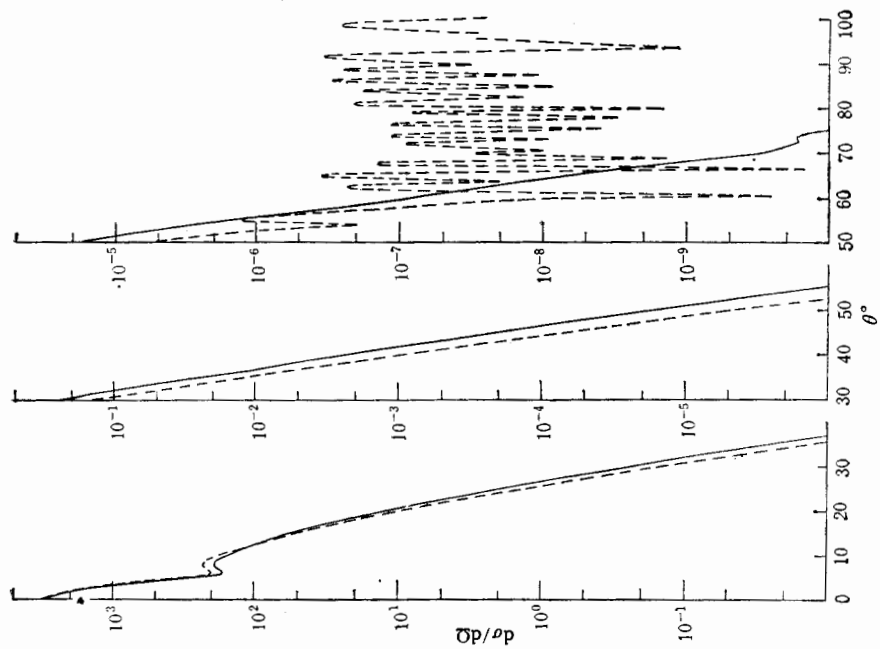


图2 高斯势微分截面

$k = 10, U_0 = -40$.

实线是 Eikonal 解; 虚线为精确解

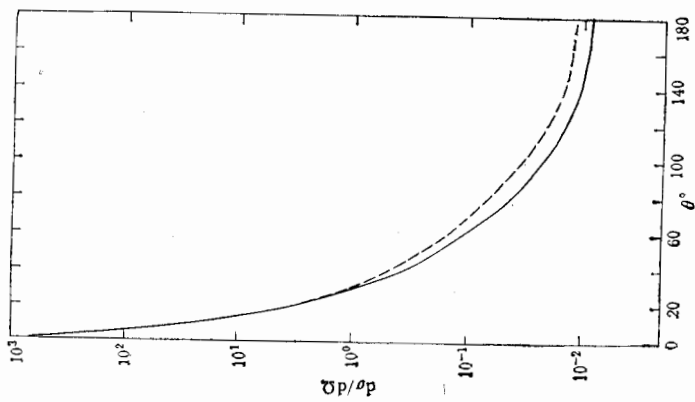


图1 Yukawa 势微分截面

$k = 10, U_0 = -40$.

实线是 Eikonal 解; 虚线是精确解

出,在 $\theta = 0^\circ$ 附近, Eikonal 近似可带来误差达 100%; 而对于 $\theta > 40^\circ$ 的角区域, 误差可高达两个数量级。

上面我们研究了 $|V_0|/E = 0.4$, 即 $|V_0|/E \leq 1$ 的情况。下面让我们研究 $|V_0|/E \geq 1$ 的情况。仍选取 $k = 10$, 并取 $U_0 = 250$, 这时 $|V_0|/E = 2.5$ 。对于 Yukawa 势, 高斯势和方阱势, 计算结果示于图 4—6 中。从图 5 和 6 中看到, 对于高斯势和方阱势, 情形仍和前面研究的两种情况相似, Eikonal 解并不提供好的近似。而图 4 中的结果, 则显示出一个新的情况: 即使对于 Yukawa 势来说, Eikonal 解已不再给出全角区的好近似。

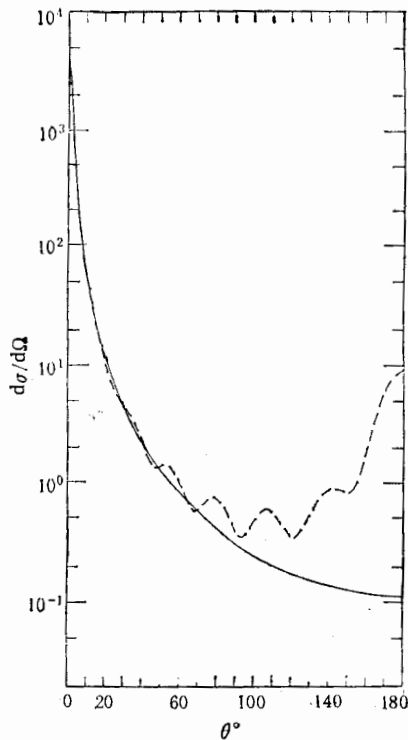


图 4 Yukawa 势微分截面

$$k = 10, U_0 = -250$$

实线是 Eikonal 解; 虚线为精确解

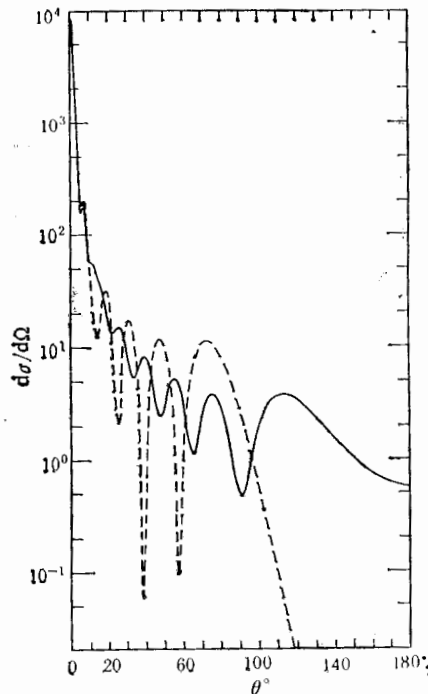


图 5 高斯势微分截面

$$k = 10, U_0 = -250$$

实线是 Eikonal 解; 虚线为精确解

综合上述分析, 通过本文的研究可以得到如下的结论: (1) 在中间耦合条件下, Eikonal 近似的适用性与位势的形状有关; (2) Joachain 等人对于 Yukawa 势得到的中间耦合条件下 Eikonal 解在全角区是好近似的结论, 不能随意外推到其它情况; (3) Joachain 等人的上述结论, 即使是对于 Yukawa 势, 也只是在 $|V_0|/E \leq 1$ 条件下成立; 而对于 $|V_0|/E \geq 1$ 的情况则不成立。

中间耦合的情况, 有可能在某些核物理的计算中遇到。因此本文的研究将提醒我们: 在这种情况下使用 Eikonal 近似并企图做出某种结论时, 要十分小心!

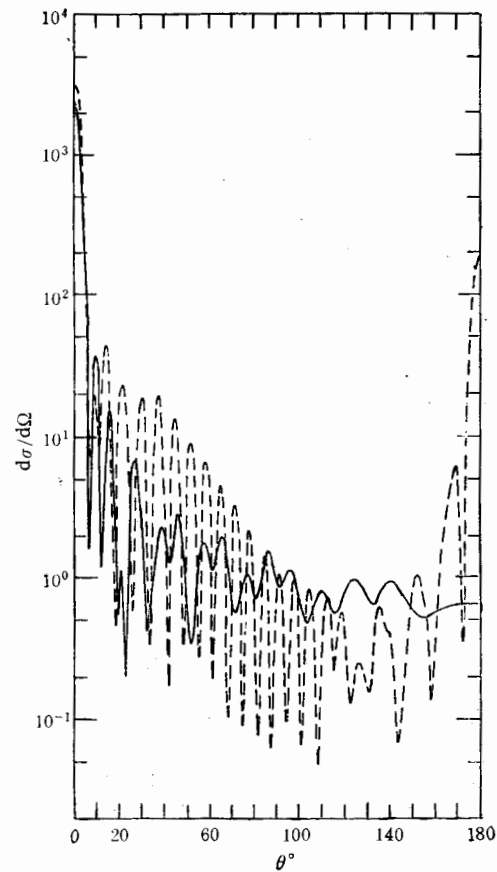


图6 方阱势微分截面. $k = 10$, $U_0 = -250$
实线是 Eikonal 解;虚线为精确解

参 考 文 献

- [1] R. J. Glauber, in Lectures in Theoretical Physics, edited by W. E. Brittin (Interscience, New York, 1959), Vol. 1, p. 315.
- [2] C. J. Joachain, Quantum Collision Theory (North-Holland, Amsterdam, 1975), Chaps. 9.
- [3] F. W. Byron, Jr., C. J. Joachain, and E. H. Mund, *Phys. Rev.*, **D8**(1973), 2622.
- [4] F. W. Byron, Jr., C. J. Joachain, and E. H. Mund, *Phys. Rev.*, **D11**(1975), 1662.
- [5] F. W. Byron, Jr., C. J. Joachain, and E. H. Mund, *Phys. Rev.*, **C20**(1979), 2325.
- [6] Yang Yong-xu and Li Qing-run, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **23**(1990), 4877.

Eikonal Approximation for Intermediate Coupling

YANG YONGXU

(Guangxi Normal University, Guilin 541001)

LI QINGRUN

(Institute of High Energy Physics, Beijing 100039)

ABSTRACT

The eikonal approximation for intermediate coupling is studied. It is shown that the accuracy of the eikonal approximation is dependent on the shape of potentials.