

一强耦合 Toy Model β 函数的单圈计算

白志明 蒋元方

(华东师范大学物理系, 上海 200062)

摘 要

本文利用背景场量子化方法对一具有 $SU(3)$ 对称性的强耦合 Toy Model 的 β 函数进行了单圈计算. 在低能情况下, β 函数的极限与 Appelquist-Carrazone 定理相符.

一、引 言

在量子场理论,特别是规范场理论中,背景场量子化方法是一很有用的方法. 它的基本思想是把出现在经典作用量中的规范场 Q 写成 $A + Q$ 的形式, 其中 A 是背景场. 把背景场引入 Lagrange 量, 就好象背景场是一个平均场, 量子场是平均场上的量子起伏一样. 我们知道, 对平均场的计算比对量子起伏的计算来的容易, 如果能通过对背景场的计算可与规范场的某些方法联系起来的话, 对解决物理问题将带来极大的方便. 事实正是这样, 背景场量子化方法确实具有如此功效. 而且, 用背景场量子化方法对理论进行量子化时, 它具有保持其规范不变性的性质, 在对理论的运算过程中, 还可避免“外源技术”的引入, 从而简化了某些规范中的重整化.

正因如此, 自 Dewitt^[1] 提出这一方法并用之于引力理论以来, 这一方法已被人们广泛采用, Weinberg^[2] 从大统一模型出发利用这一方法构造了轻粒子的有效场理论. Abbott^[3] 证明了用标准量子化过程计算出来的 Green 函数与用背景场量子化方法计算出来的 Green 函数等价, 从而将波函数重整化与耦合常数重整化联系起来. 't Hooft 和 Dewitt 将此方法推广到多圈计算. 最近 Howe^[4] 等人用此方法对二维玻色非线性 σ 模型进行了重整化, 并给出了计算任意圈图的算法.

本文是在利用背景场量子化方法的基础上, 对一强耦合 $SU(3)$ 模型进行了单圈 β 函数计算. 并在低能情况下得出与 Appelquist-Carrazone 定理相一致的结果.

二、Toy Model 的背景场量子化

我们所研究的 Toy Model 经典 Lagrange 作用量取为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{fg} + \mathcal{L}_{f\phi}, \quad (1)$$

$$\text{规范场项: } \mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}. \quad (2)$$

$$\text{Higgs 场项: } \mathcal{L}_\phi = -|\partial_\mu\phi|^2 - \mu^2|\phi|^2 - h|\phi|^4. \quad (3)$$

$$\text{费米场项: } \mathcal{L}_{fg} = \bar{\psi} \left(i\partial_\mu + g\frac{\lambda^a}{2} Q_\mu^a \right) \gamma^\mu \psi. \quad (4)$$

$$\text{汤川耦合项: } \mathcal{L}_{f\phi} = \bar{\psi} \left[G\phi\frac{1}{2}(1+r_5) + G^*\phi^*\frac{1}{2}(1-r_5) \right] \psi. \quad (5)$$

$$\text{其中 } F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu Q_\nu^i - \partial_\nu Q_\mu^i + gf^{ijk}Q_\mu^j Q_\nu^k, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (6)$$

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}. \quad u_1, u_2, u_3 \text{ 分别代表三种颜色 } u_R, u_G, u_B.$$

λ^a, f^{ijk} 分别为 $SU(3)$ 群的生成元及结构常数。在计算中, 选用 $SU(3)$ 群的盖尔曼矩阵表示^[9]。

在背景场的量子化方法中, 每一种场都可引进它的背景场, 并可用它的背景场来展开。由于仅考虑背景场的两点 Green 函数, 因此可以令夸克及 Higgs 场的背景场为零, 仅保留规范场 $[Q_\mu^a]^q$ 的背景场 $[A_\mu^a]^{cl}$ 。这样做并不影响计算结果。为书写简便, 把角标 (q) (cl) 省略掉。

在对背景场的量子化过程中, 本文仅关心背景场单圈自能图的计算。为此, 我们还注意了以下几个要求:

- (1) Lagrange 各量中与背景场无关的项省略不写;
- (2) 仅保留形如 $QQA, QQAA$ 的三点顶角及四点顶角项;
- (3) 我们仅考虑 Q_μ^x 的背景场 A_μ^x :

基于如上考虑, 在 $SU(3)$ 群下, Lagrange 量展开为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} \Big|_{Q_\mu^x \rightarrow Q_\mu^x + A_\mu^x} \\ &= -\frac{1}{2} Q_\mu^i (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) Q_\nu^i - \frac{1}{2} gf_0^{ijk} Q_\mu^j Q_\nu^k (\partial^\mu A^{x\nu} - \partial^\nu A^{x\mu}) \\ &\quad - \frac{1}{2} gf_0^{jxk} A_\mu^x Q_\nu^k (\partial^\mu Q^{vj} - \partial^\nu Q^{\mu j}) - \frac{1}{2} gf_0^{kix} Q_\mu^i A_\nu^x (\partial^\mu Q^{k\nu} - \partial^\nu Q^{k\mu}) \\ &\quad - \frac{1}{2} g^2 (f_0^{jxk})^2 A^{x\mu} A_\mu^x Q^{iv} Q_\nu^i + \frac{1}{2} g^2 (f_0^{jxk})^2 Q^{i\mu} Q_\nu^i A^{x\nu} A_\nu^x, \end{aligned} \quad (7)$$

其中, x 代表第 x 个规范场 Q_μ^x 的背景场指标。 f_0^{ijk} 为 $SU(3)$ 群的结构常数按通常规定顺序循环。

选 $SU(3)$ 群生成元的表示为 $\{a_m^i\}$ 。其中 i, j 代表矩阵行列指标 $i, j = 1, 2, 3$ 。 m 是生成元序号, $m = 1, 2, \dots, 8$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{qg} &= i\bar{\psi} D_\mu \gamma^\mu \psi \Big|_{Q^x \rightarrow Q^x + A^x} \\ &= i \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i \gamma^\mu \partial_\mu u_i + \frac{1}{2} g A_\mu^x \gamma^\mu \sum_{i,j=1}^3 \bar{u}_i a_{ij}^x u_j. \end{aligned} \quad (8)$$

单色标量的 Higgs 场不与规范场耦合, 其真空期望值 $\langle \phi \rangle_0 = v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{h}}$ $\mu^2 < 0$, $h > 0$.

通过真空破缺, 夸克粒子获得质量

$$\mathcal{L}_{q\phi} = \bar{\psi} \left(G\nu \frac{1+r_5}{2} + G^*\nu^* \frac{1-r_5}{2} \right) \psi = G\nu \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i u_i^L + G^*\nu^* \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i u_i^R.$$

在 $G\nu = G^*\nu^*$ 的情况下

$$\mathcal{L}_{q\phi} = G\nu \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i u_i. \quad (9)$$

因此各颜色 quark 质量为 $m_R = m_G = m_B = m = G\nu$.

为了对 Toy Model 背景场量子化, 取费曼规范 $\partial_\mu Q^{i\mu} = 0$. 这样, 背景场的规范条件选为^[3]

$$\tilde{G}^i = \partial_\mu Q^{i\mu} + g^{jik} A_\mu^j Q^{k\mu}. \quad (10)$$

所以

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\square} &= -\frac{1}{2\alpha} (\tilde{G}^i)^2 |_{0^x \rightarrow 0^x + A^x} \\ &= -\frac{1}{2} (\partial_\mu Q^{i\mu})(\partial_\nu Q^{i\nu}) - g f_0^{j*k} A_\mu^j Q^{k\mu} \partial_\nu Q^{i\nu} - \frac{1}{2} g^2 (f_0^{j*k})^2 A_\mu^j A^{\nu\nu} Q^{k\mu} Q^i \\ &\quad + g f_0^{j*k} A_\mu^j Q^{i\mu} \partial_\nu Q^{k\nu}. \end{aligned} \quad (11)$$

其中已取 $\alpha = 1$.

背景场是一种经典场, 它保持其在 $SU(3)$ 群变换下的规范不变性, 在量子场作如下变换下

$$Q_\mu^{i\mu} = Q_\mu^i + \partial_\mu \theta^i + g f^{j*k} (A_\mu^j + Q_\mu^j) \theta^k.$$

鬼场项为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\square} &= C_{ij}^\dagger \partial^2 C_{ij} + 2i g f_0^{j*i} A^{\mu\mu} (C_{ij} \partial_\mu C_{ij}^\dagger - C_{ij}^\dagger \partial_\mu C_{ij}) \\ &\quad + 2i g f_0^{j*i} (\partial_\mu A^{\mu\mu}) C_{ij} C_{ij}^\dagger. \end{aligned} \quad (12)$$

其中, 已定义 $C_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} (C_i + iC_j)$, $C_{ij}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (C_i - iC_j)$, $ij = 1, 2, \dots, 8$. 需要

说明的是, 由于 f_0^{j*i} 的限制, C_{ij} 只有 8 种形式^[6], 我们姑且计为 C_n , $n = 1, 2, \dots, 8$. 现将(7)(8)(9)(11)(12)相加即得有效 Lagrange 量

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} &= \frac{1}{2} Q_\mu^i (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) Q_\nu^i - \frac{1}{2} (\partial_\mu Q^{i\mu})(\partial_\nu Q^{i\nu}) - g f_0^{j*k} A_\mu^j Q^{k\mu} \partial_\nu Q^{i\nu} \\ &\quad + g f_0^{j*k} A_\mu^j Q^{i\mu} \partial_\nu Q^{k\nu} - g f_0^{j*ik} Q_\mu^i Q_\nu^k (\partial^\mu A^{\nu\nu} - \partial^\nu A^{\mu\mu}) \\ &\quad - g f_0^{j*k} A_\mu^j Q_\nu^k (\partial^\mu Q^{i\nu} - \partial^\nu Q^{i\mu}) - g f_0^{j*ik} Q_\mu^i A_\nu^j (\partial^\mu Q^{k\nu} - \partial^\nu Q^{k\mu}) \\ &\quad - \frac{1}{2} g^2 (f_0^{j*k})^2 A^{\mu\mu} A_\nu^j Q^{k\nu} Q_\nu^k + i \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i \gamma^\mu \partial_\mu u_i \\ &\quad + \frac{1}{2} g A_\mu^j \gamma^\mu \sum_{i,j=1}^3 \bar{u}_i a_{ij}^\dagger u_j + m \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i u_i + C_{ik}^\dagger \partial^2 C_{ik} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2igf_0^{*k} A^{*\mu} (C_{ik} \partial_\mu C_{ik}^+ - C_{ik}^+ \partial_\mu C_{ik}) \\
 &+ 2igf_0^{*k} (\partial_\mu A^{*\mu}) C_{ik} C_{ik}^+.
 \end{aligned} \tag{13}$$

在计算中,我们已对上式作了化简.

三、费曼规则

通过对背景场的量子化(13)式的计算,可得各物理量的传播子:

$$\begin{array}{c} \text{---} \mu \quad k \quad \nu \text{---} \\ \text{---} \end{array} = iD_{\mu\nu}^m(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}, \quad m = 1, 2, \dots, 8.$$

$$\begin{array}{c} p \\ \text{---} \end{array} = iS_f^k(p) = \frac{i}{\not{p} - m}, \quad \not{p} = \gamma_\mu p^\mu, \quad k = 1, 2, 3.$$

$$\begin{array}{c} k \\ \text{---} \end{array} = i\Delta^n(k) = \frac{-i}{k^2}, \quad n = 1, 2, \dots, 8.$$

三点顶角及四点顶角

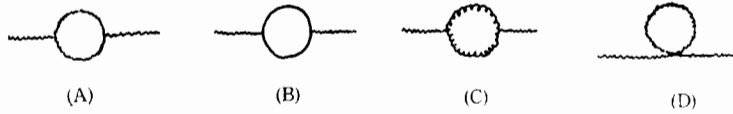
$$\begin{array}{c} Q_0^\beta \\ \text{---} q \\ \text{---} p \\ \text{---} r \\ \text{---} Q_\rho^\alpha \end{array} = i\Gamma^{*\alpha\beta} = gf_0^{*\alpha\beta} [\delta_{\rho\theta} (q - r)_\theta + \delta_{\sigma\theta} (p - q - r)_\rho + \delta_{\sigma\rho} (q + r - p)_\theta].$$

$$\begin{array}{c} \vec{u}' \\ \text{---} q \\ \text{---} p \\ \text{---} r \\ \text{---} u \end{array} = i\Gamma^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2} ig a_{\alpha\beta}^* \gamma_\mu.$$

$$\begin{array}{c} C_\beta^+ \\ \text{---} q \\ \text{---} p \\ \text{---} r \\ \text{---} C_\alpha \end{array} = i\Gamma^{*\alpha\beta} = -2igf_0^{*\alpha\beta} (q - r + p)_\mu.$$

$$\begin{array}{c} Q_\theta' \\ \text{---} \\ \text{---} p \\ \text{---} \\ \text{---} Q_\Delta' \end{array} = i\Gamma^{*\alpha\beta} = -\frac{1}{2} g^2 (f_0^{*ij})^2 g_{\rho q} g_{\theta\Delta}.$$

我们很容易画出有效 Lagrange 量的以背景场 A_μ^* 为外线的单圈正规自能图。



四、单图自能图及 β 函数的计算

背景场的两点 Green 函数是上面四个自能图的和。有关对自能图的计算可采用维数正规化方案。两点 Green 函数为

$$\begin{aligned}
 i g^2 \pi_{\mu\nu} &= \frac{i}{16\pi^2} [[A] + [B] + [C] + [D]] \\
 &= \frac{i g^2}{16\pi^2} \left\{ \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) [k^2 + 48 B_{22}(k, 0, 0) + 12 k^2 B_0(k, 0, 0) \right. \\
 &\quad - 6 A(0) + 2 A(m) - 4 B_{22}(k, m, m) + 2 k^2 B_1(k, m, m)] + k_\mu k_\nu \left[8 \right. \\
 &\quad + 6 B_0(k, 0, 0) + 48 B_{21}(k, 0, 0) + 24 B_1(k, 0, 0) + \frac{48}{k^2} B_{22}(k, 0, 0) \\
 &\quad \left. - \frac{6}{k^2} A(0) - \frac{4}{k^2} B_{22}(k, m, m) + 2 B_1(k, m, m) + \frac{2}{k^2} A(m) \right] \left. \right\}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

其中

$$A(M) \equiv \frac{1}{i\pi^2} \int d^n k \frac{1}{k^2 - M^2},$$

$$B_0; B_\mu; B_{\mu\nu}(p, M_1 M_2) \equiv \frac{1}{i\pi^2} \int d^n k \frac{1; k_\mu; k_{\mu\nu}}{(k^2 - M_1^2)[(k+p)^2 - M_2^2]}.$$

A, B 函数满足以下公式^[7]

$$B_\mu(p, M_1 M_2) = P_\mu B_1(p, M_1 M_2),$$

$$B_{\mu\nu}(p, M_1 M_2) = P_\mu P_\nu B_{21} + g_{\mu\nu} B_{22},$$

$$P^2 B_1 = \frac{1}{2} [A(M_1) - A(M_2) - (p^2 - M_2^2 + M_1^2) B_0],$$

$$P^2 B_{21} + B_{22} = \frac{1}{2} [A(M_2) + (M_2^2 - M_1^2 - p^2) B_1],$$

$$A(M_2) + M_1^2 B_0 = P^2 B_{21} + 4 B_{22} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} p^2 - M_1^2 - M_2^2 \right).$$

在对自能图的计算过程中, 由于采用了 $SU(3)$ 群的盖尔曼矩阵表示, 并应用了盖尔曼矩阵的如下性质:

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^8 (f_0^{\alpha\beta})^2 = 3/2, \quad \text{其中 } x \text{ 固定.}$$

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^3 a_{\alpha\beta}^2 = 2.$$

令 $ig^2\pi_{\mu\nu} = ig^2\pi_{\mu\nu}^L + ig^2\pi_{\mu\nu}^T$, 定义 $ig^2\pi_{\mu\nu}^T \equiv i\Sigma(k) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$.

$$\begin{aligned} \text{则,} \quad \Sigma(k) = & \frac{g^2}{16\pi^2} [k^2 + 48B_{22}(k, 0, 0) + 12k^2B_0(k, 0, 0) - 6A(0) \\ & - 4B_{22}(k, m, m) + 2k^2B_1(k, m, m) + 2A(m)]. \end{aligned} \quad (15)$$

在单圈链近似下, 通过对背景场传播子的重整化, 可得背景场传播子的重整化系数为

$$Z = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \left[8B_1(k, 0, 0) + 12B_0(k, 0, 0) + \frac{4}{3} B_1(k, m, m) \right]. \quad (16)$$

由于背景场量子化方法保持其规范不变性, 所以背景场耦合系数 g 的重整化系数 Z_g 与背景场传播子的重整化系数 Z 之间存在如下关系

$$Z_g = Z^{-1/2}. \quad (17)$$

利用(16)(17)及 B 函数的性质, 计算得

$$\begin{aligned} \beta = & \frac{g^3}{16\pi^2} \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[8B_1(k, 0, 0) + 12B_0(k, 0, 0) + \frac{4}{3} B_1(k, m, m) \right] \\ = & \frac{g^3}{16\pi^2} \left[-\frac{22}{3} - \frac{2}{3} \frac{m^2}{\sqrt{\mu^4 + 4\mu^2 m^2}} \ln \frac{\mu^2 + 2m^2 - \sqrt{\mu^4 + 4\mu^2 m^2}}{\mu^2 + 2m^2 + \sqrt{\mu^4 + 4\mu^2 m^2}} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

(18)式就是我们所要求的在单圈链近似下的 β 函数。很明显, 在 $\mu^2/m^2 \rightarrow 0$ 的低动量极限条件下,

$$\beta|_{\mu^2/m^2 \rightarrow 0} = -\frac{g^3}{16\pi^2} \frac{22}{3}. \quad (19)$$

这一结果与 Appelquist-Carrazone 定理相一致^[8].

五、结 论

本文用背景场量子化方法对一 Toy Model 单圈 β 函数作计算, 得到了满意的结果。在一般的其它方法中, 单圈图的计算是非常复杂的。但在我们的计算中, 由于用了背景场量子化方法, 计算较为简化。因此, 在讨论重整化函数的问题中, 使用背景场量子化方法是较为方便的。这一点在本文又得到了一次验证。另外, 也很容易看到对于双圈自能图的 Lagrange 项为 AQQQ, ACCC 等。当然双圈自能图的计算将会更加复杂。但可以预料, 双圈自能图的贡献, 只不过对 β 函数在单圈图基础上产生一个小的修正项。

参 考 文 献

- [1] Dewart B., *Phys. Rev.*, **162**(1967), 1195.
- [2] Weinberg S., *Phys. Lett.*, **B91**(1980), 51.
- [3] Abbott L., *Nucl. Phys.*, **B185**(1981), 189.
- [4] P. S. Howe and G. Papadopoulos, *Nucl. Phys.* **B296**(1988), 26.
- [5] 胡瑶光,《规范场论》,1984年版.
- [6] 白志明、蒋元方,“强耦合 Toy Model β 函数性质分析”将在“华东师大学报”1991年第三期发表.
- [7] G. Passarino and M. Veltan, *Nucl. Phys.*, **B160**(1979), 151.
- [8] T. Appelquist and J. Carazzone, *Phys. Rev.*, **D11**(1975), 2856.

The One Loop Calculation of the Strong coupling β Function in the Toy Model

BAI ZHIMING JIANG YUANFANG

(Department of Physics, East China Normal University, Shanghai 200062)

ABSTRACT

In this paper, the background field quantization is used to calculate the one-loop β function in the Toy Model which has the strong coupling and the $SU(3)$ symmetry. the function obtained is consistent with the Appelquist-Carrazzone theorem in the low energy condition.