第21卷 第3期 高能物理与核物理 Vol.21, No.3
1997年 3月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Mar., 1997

虚时温度场论中的维数正规化及QED二圈热力学势*

王 欣 李家荣

(华中师范大学粒子物理研究所 武汉 430070)

1996-01-23收稿

摘 要

对在虚时温度场论的框架下进行维数正规化的步骤和方法作了一般性地讨论. 作为应用的例子, 计算了QED的双圈热力学势及其重整化.

关键词 虚时温度场论, 维数正规化, 热力学势, 交叉发散.

1 引 言

有限温度场论作为场论形式的热力学理论，经过多年的发展已成为分析强子物质和夸克物质(夸克胶子等离子体)物理的有力工具. 在利用温度场论的微扰方法计算系统的热力学基础——热力学势时，会遇到由于对内线动量积分引起的发散. 从理论结构上看，有限温度场论中出现的发散比零温场论的要复杂得多，除了要遇到通常的零温场论中出现的发散外，还要处理在高圈图计算中由于零温部分与温度部分相乘带来的"交叉发散"以及由于Bose统计因子带来的新的红外发散. 如何正规化这些发散并完成理论的重整化，一直是人们关心的重要问题. 在J. Kapusta的早期工作[1]中虽已给出了温度场论可重整性的证明，但却未具体把发散孤立出来. 在具体问题中对这些发散进行正规化时，人们常用简单、直观的大动量截断法. 由于动量截断法破坏理论的规范不变性，而且所得的重整化常数一般是质量相关的，不适用于规范理论的重整化. 近年来文献[2]在实时温度场论的框架下采用维数正规化来作分离发散的计算，但对虚时温度场论而言，由于存在着对离散频率无穷作和带来的复杂性，因而如何进行维数正规化，是一个尚待深入研究的问题. 近来R.Parwani对热$g^2\phi^4$理论的自能(直到g^4阶)作了计算[3]，但没有讨论包括Fermi场的高圈图如何计算，C. Coriano和R. Parwani还计算了无质量QED在高温近似下的物态方程[4]. 本文讨论了在虚时温度场论中进行维数正规化的方法，作为算例给出了有质量QED二圈热力学势，并准备进一步将这个方法应用到热QCD理论，为从QCD出发分析强子乃至夸克物质的相变问题打下基础.

* 国家自然科学基金资助.

2　QED 的拉氏量密度和热力学势

有质量项的 QED 的拉氏量密度由两部分组成

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_I\,, \tag{1}$$

其中 $\mathscr{L}_0$ 是自由场的拉氏量密度，表示为

$$\mathscr{L}_0 = \overline{\psi}\,(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}\,(\partial^\mu A_\mu)^2\,, \tag{1.1}$$

$\mathscr{L}_I$ 是相互作用拉氏量密度，表示为

$$\mathscr{L}_I = -e\,\overline{\psi}\,\partial^\mu A_\mu \psi. \tag{1.2}$$

ψ，A_μ 分别是 Fermi 场和电磁势，$F_{\mu\nu}$ 是电磁场场强张量，ξ 是规范参数.

对于正则系综，系统的配分函数定义为

$$\begin{aligned} Z &= \mathrm{Tr}\{\exp(-\beta H)\} \\ &= \int [\mathrm{d}\overline{\psi}\,][\mathrm{d}\psi][\mathrm{d}A_\mu]\exp\left(\int \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}^3x\, \mathscr{L}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

由此出发可以求得系统的热力学势函数

$$F = -\frac{1}{\beta}\ln Z. \tag{3}$$

有了势函数就能借助于热力学关系，方便地推导出系统的热力学性质.

显然，在(2)式中若略去相互作用项 $\mathscr{L}_I$，则具有二次型形式的拉氏量密度 $\mathscr{L}_0$ 将给出理想气体对配分函数的贡献，应用泛函积分技术，求得该项贡献为

$$\begin{aligned} Z_0 = [N(\beta)]^2 \exp&\left\{-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \sum_{n_k} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\, 2\ln(\omega_{n_k}^2 + \boldsymbol{k}^2)\right\} \\ &\cdot \exp\left\{2\int \mathrm{d}^3x \sum_{n_p} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\, \ln(\omega_{n_p}^2 + \boldsymbol{p}^2 + m^2)\right\}, \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\omega_{n_k} = 2n_k\pi/\beta$，$\omega_{n_p} = (2n_p+1)\pi/\beta$，$n_k$，$n_p$ 均为整数，完成对 n_k，n_p 的求和，得到 QED 单圈热力学势

$$\begin{aligned} F_0 = -\frac{1}{\beta}&\left\{2\int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\left[-\frac{1}{2}\beta|\boldsymbol{k}| - \ln(1-\mathrm{e}^{-\beta|\boldsymbol{k}|})\right]\right. \\ &\left. +2\int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,[\beta\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2} + 2\ln(1+\mathrm{e}^{-\beta\sqrt{p^2+m^2}})]\right\}. \end{aligned} \tag{5}$$

利用圈图展开技术，可以得到相互作用项 $\mathscr{L}_I$ 对热力学势的最低阶修正

$$F_2 = \frac{1}{\beta}\left\{\frac{1}{2}\right.$$  $$\left.\right\} \tag{6}$$

其中实线表示电子，波浪线表示光子.

3 热力学势的维数正规化和重整化

为了计算热力学势的圈图修正，需要知道有限温度场论的 Feynman 规则，在虚时温度场论的框架下，这可根据零温场论的 Feynman 规则作对应

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \longrightarrow \frac{i}{\beta}\sum_n \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}} , \tag{7}$$

$$p_0 \longrightarrow i\omega_n = \begin{cases} i2n\pi/\beta & (\text{Bose 场}) \\ i(2n+1)\pi/\beta & (\text{Fermi 场}) \end{cases} , \tag{8}$$

$$(2\pi)^D \delta^D(p_1+p_2+\cdots) \longrightarrow (2\pi)^{D-1}\delta^{D-1}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\cdots)\ \frac{\beta}{i}\ \delta_{\omega_{n_1}+\omega_{n_2}+\cdots} , \tag{9}$$

后得到. 在计算中包括有完成对离散频率的求和，这一般是通过解析延拓，将频率求和化为如下回路积分

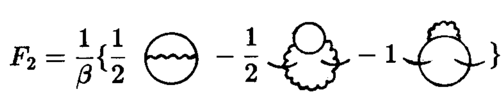
$$\frac{1}{\beta}\sum_n f(k_0=i\omega_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dk_0\ \frac{1}{2}\ [f(k_0)+f(-k_0)]$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dk_0 [f(k_0)+f(-k_0)]\ \frac{1}{e^{\beta k_0}-1}\quad (\text{Bose 场}), \tag{10}$$

$$\frac{1}{\beta}\sum_n f(p_0=i\omega_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} dp_0\ f(p_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dp_0\ f(p_0)\ \frac{1}{e^{\beta p_0}+1}$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-\delta}^{i\infty-\delta} dp_0\ f(p_0)\ \frac{1}{e^{-\beta p_0}+1}\quad (\text{Fermi 场}). \tag{11}$$

来进行.

从(10)，(11)式可以看到，在对离散频率求和后，其结果包括了零温部分及温度相关部分. 在单圈计算中(见(4)式)，由于仅有一次作和计算，因而在其结果中很容易把零温贡献与温度相关的贡献明显分开. 零温部分包括有发散，其正规化与重整化已在零温场论中完成，而纯温度相关部分不包括新的发散，因而在单圈水平这一级不存在新的正规化与重整化问题. 然而在多圈图的计算中，会出现对频率多次作和，使得有关结果中除包含有纯零温部分，纯温度相关部分外，还包含有零温部分和温度相关部分的交叉相乘项，问题的复杂性也就在这交叉项中包括有零温场论中不曾有的发散，需要进行正规化和重整化.

作为例子，我们来计算 F_2，考虑到重整后，(6)式中还应含有抵消项的贡献，图示为



(a) (b) (c)

图1 QEL二圈对热力学势的贡献

其中 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$ 和 1 分别是图 1(a)—(c) 的对称因子，图 1(b),(c) 中的圆括号表示在计算其内包围的子图时应取 $\beta\to\infty$ 的真空极限，且对进入和离开该子图的粒子线限制在质壳上.

先计算图 1(a) 的贡献，由零温 Feynman 规则(取 Feynman 规范 $\xi=1$)，得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}L_{\mathrm{a}}=&\int(\mathrm{d}p)(\mathrm{d}q)(\mathrm{d}k)(2\pi)^{D}\delta^{D}(p-q-k)\mathrm{Tr}\left\{(-\mathrm{i}e\gamma^{\lambda}\mu^{2\varepsilon})\frac{\mathrm{i}}{\not q-m}(-\mathrm{i}e\gamma^{\nu}\mu^{2\varepsilon})\frac{\mathrm{i}}{\not p-m}\right\}\\
&\cdot\frac{-\mathrm{i}}{k^{2}}g_{\lambda\nu}\\
=&-\mathrm{i}e^{2}\mu^{4\varepsilon}\int(\mathrm{d}p)(\mathrm{d}q)(\mathrm{d}k)\frac{(2\pi)^{D}\delta^{D}(p-q-k)g_{\lambda\nu}}{(q^{2}-m^{2})(p^{2}-m^{2})k^{2}}\mathrm{Tr}\,[\gamma^{\lambda}(\not q+m)\gamma^{\nu}(\not p+m)],
\end{aligned}
\tag{12}
$$

其中 $\int(\mathrm{d}p)\equiv\int\frac{\mathrm{d}^{D}p}{(2\pi)^{D}}$，$\int(\mathrm{d}q)\equiv\int\frac{\mathrm{d}^{D}q}{(2\pi)^{D}}$，$\int(\mathrm{d}k)\equiv\int\frac{\mathrm{d}^{D}k}{(2\pi)^{D}}$，经过简单运算得到

$$
\begin{aligned}
L_{\mathrm{a}}=&-e^{2}\mu^{4\varepsilon}f(D)\left\{\int(\mathrm{d}p)(\mathrm{d}q)\frac{2m^{2}}{(p-q)^{2}(p^{2}-m^{2})(q^{2}-m^{2})}\right.\\
&+(D-2)\left[\frac{1}{2}\int(\mathrm{d}p)(\mathrm{d}q)\frac{1}{(p^{2}-m^{2})(q^{2}-m^{2})}\right.\\
&\left.\left.-\int(\mathrm{d}q)(\mathrm{d}k)\frac{1}{(q^{2}-m^{2})k^{2}}\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

利用(7)—(9)式，过渡到虚时温度场论

$$
\begin{aligned}
L_{\mathrm{a}}=&e^{2}\mu^{4\varepsilon}f(D)\left\{\int\{\mathrm{d}P\}\{\mathrm{d}Q\}\frac{-2m^{2}}{(P-Q)^{2}(P^{2}+m^{2})(Q^{2}+m^{2})}\right.\\
&\left.+(D-2)\left[\frac{1}{2}\cdot\int\{\mathrm{d}P\}\{\mathrm{d}Q\}\frac{1}{(P^{2}+m^{2})(Q^{2}+m^{2})}-\int\{\mathrm{d}P\}(\mathrm{d}K)\frac{1}{(P^{2}+m^{2})K^{2}}\right]\right\}\\
=&e^{2}f(D)\left[(D-2)\left(\frac{1}{2}I_{1}-I_{2}\right)-2m^{2}I_{3}\right],
\end{aligned}
\tag{14}
$$

其中 $\int\{\mathrm{d}P\}\equiv\frac{1}{\beta}\sum_{n_p}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}$，$\int\{\mathrm{d}Q\}\equiv\frac{1}{\beta}\sum_{n_q}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}q}{(2\pi)^{D-1}}$，$\int(\mathrm{d}K)\equiv\frac{1}{\beta}\sum_{n_k}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}}$，

$$P^{2}=[(2n_{p}+1)\pi/\beta]^{2}+\boldsymbol{p}^{2},\ Q^{2}=[(2n_{q}+1)\pi/\beta]^{2}+\boldsymbol{q}^{2},\ K^{2}=(2n_{k}\pi/\beta)^{2}+\boldsymbol{k}^{2}.$$

对于积分 I_1、I_2 容易算出

$$I_1=\mu^{4\varepsilon}\int\{dP\}\{dQ\}\frac{1}{(P^2+m^2)(Q^2+m^2)}$$

$$=\left[\mu^{2\varepsilon}\int\{dP\}\frac{1}{P^2+m^2}\right]^2$$

$$=\left\{\left(\frac{m}{4\pi}\right)^4\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{2\varepsilon}[\Gamma(-1+\varepsilon)]^2-2\left(\frac{m}{4\pi}\right)^2\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{\varepsilon}\Gamma(-1+\varepsilon)\right.$$

$$\left.\cdot\mu^{2\varepsilon}\int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\cdot\frac{1}{E_p}\cdot\frac{1}{e^{\beta E_p}+1}+\left[\mu^{2\varepsilon}\int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\cdot\frac{1}{E_p}\cdot\frac{1}{e^{\beta E_p}+1}\right]^2\right\},\tag{15}$$

$$I_2=\mu^{4\varepsilon}\int\{dP\}(dK)\frac{1}{(P^2+m^2)K^2}$$

$$=\left(\frac{m}{4\pi}\right)^2\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{\varepsilon}\Gamma(-1+\varepsilon)\mu^{2\varepsilon}\int\frac{d^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}}\frac{1}{|\boldsymbol{k}|}\cdot\frac{1}{e^{\beta|\boldsymbol{k}|}-1}$$

$$-\mu^{4\varepsilon}\int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\cdot\frac{d^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}}\cdot\frac{1}{E_p|\boldsymbol{k}|}\cdot\frac{1}{e^{\beta E_p}+1}\cdot\frac{1}{e^{\beta|\boldsymbol{k}|}-1}.\tag{16}$$

对于积分 I_3，利用(11)式，再经冗长的运算，得到

$$I_3=\mu^{4\varepsilon}\int\{dP\}\{dQ\}\frac{1}{(P-Q)^2(P^2+m^2)(Q^2+m^2)}$$

$$=I_{3a}-4I_{3b}+2I_{3c},\tag{17}$$

其中

$$I_{3a}=\frac{\mu^{4\varepsilon}}{(2\pi i)^2}\int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\cdot\frac{d^{D-1}q}{(2\pi)^{D-1}}\int_{-i\infty}^{i\infty}dp_0\int_{-i\infty}^{i\infty}dq_0\frac{1}{(E_p^2-p_0^2)(E_q^2-q_0^2)[E_k^2-(p_0+q_0)^2]},\tag{18}$$

$$I_{3b}=\frac{\mu^{4\varepsilon}}{(2\pi i)^2}\int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\cdot\frac{d^{D-1}q}{(2\pi)^{D-1}}\int_{-i\infty}^{i\infty}dp_0\frac{1}{E_p^2-p_0^2}\int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta}dq_0\frac{1}{E_q^2-q_0^2}$$

$$\cdot\frac{1}{E_k^2-(p_0+q_0)^2}\cdot\frac{1}{e^{\beta q_0}+1},\tag{19}$$

$$I_{3c}=\frac{\mu^{4\varepsilon}}{(2\pi i)^2}\int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\cdot\frac{d^{D-1}q}{(2\pi)^{D-1}}\int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta}dp_0\int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta}dq_0\left[\frac{1}{E_k^2-(p_0+q_0)^2}+\frac{1}{E_k^2-(p_0-q_0)^2}\right]$$

$$\frac{1}{(E_p^2-p_0^2)(E_q^2-q_0^2)}\cdot\frac{1}{e^{\beta p_0}+1}\cdot\frac{1}{e^{\beta q_0}+1},\tag{20}$$

$$E_p^2=m^2+\boldsymbol{p}^2\ ,\ E_q^2=m^2+\boldsymbol{q}^2\ ,\quad E_k^2=(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2\ .$$

可以看出 I_{3a} 代表 I_3 中纯零温部分贡献，I_{3c} 代表纯温度相关部分贡献，I_{3b} 则包含交叉发散，以下分别计算之.

作 Wick 转动后，将积分转到 D 维 Euclidean 空间，并应用 Feynman 参数化方法，得到

$$I_{3a}=-\frac{m^2}{(4\pi)^4}\cdot\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{2\varepsilon}\frac{[\Gamma(\varepsilon)]^2}{(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)}\ ,\tag{21}$$

采用计算 I_{3a} 的方法，I_{3b} 表示为

$$I_{3b}=\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}q}{(2\pi)^{D-1}}\cdot\frac{\mu^{4\varepsilon}}{2\pi}\int_{-\infty-\mathrm{i}\delta}^{\infty-\mathrm{i}\delta}\mathrm{d}q_0\frac{1}{(E_q^2+q_0^2)}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta q_0}+1}\left[\int\frac{\mathrm{d}^D\bar{p}}{(2\pi)^D}\ \frac{1}{(\bar{p}^2+m^2)(\bar{p}+\bar{q})^2}\right]$$

其中 $\bar{p}$，$\bar{q}$ 是 D 维 Euclidean 动量，完成对 $\bar{p}$ 和 Feynman 参数的积分，并利用超几何函数的 Barnes 积分表示和留数定理，得到

$$\begin{aligned}I_{3b}=&\mu^{4\varepsilon}\frac{(m^2)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}q}{(2\pi)^{D-1}}\cdot\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty+\delta}^{\mathrm{i}\infty+\delta}\mathrm{d}q_0\frac{1}{q_0^2-E_q^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta q_0}+1}\\&\cdot\left\{\frac{\Gamma(\varepsilon)}{1-\varepsilon}+\Gamma(1-\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\varepsilon)}{\Gamma(n+2-\varepsilon)}\left(\frac{q_0^{\,2}-\boldsymbol{q}^2}{m^2}\right)^n\right\}\\=&-\frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{\varepsilon}\left[\frac{\Gamma(\varepsilon)}{1-\varepsilon}+\Gamma(1-\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\varepsilon)}{\Gamma(n+2-\varepsilon)}\right]\\&\cdot\mu^{2\varepsilon}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}q}{(2\pi)^{D-1}}\ \frac{1}{2E_q}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_q}+1}.\end{aligned}\tag{22}$$

对于 I_{3c}，应用留数定理，并考虑到能量守恒关系 $E_p=E_q+E_k$ 对积分的约束，得到

$$\begin{aligned}I_{3c}=&-\frac{\mu^{4\varepsilon}}{4}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\ \frac{\mathrm{d}^{D-1}q}{(2\pi)^{D-1}}\\&\cdot\left\{\frac{1}{E_pE_q}\left[\frac{1}{(E_p-E_q)^2-E_k^2}+\frac{1}{(E_p+E_q)^2-E_k^2}\right]\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_p}+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_q}+1}\right.\\&+\frac{1}{E_qE_k}\cdot\frac{1}{(E_q+E_k)^2-E_q^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_q}+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(E_q+E_k)}+1}\\&\left.-\frac{1}{E_pE_k}\cdot\frac{1}{(E_p-E_k)^2-E_q^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_p}+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(E_p-E_k)}+1}\right\}.\end{aligned}\tag{23}$$

由(21)，(22)和(23)式得到

$$I_3=-\frac{m^2}{(4\pi)^4}\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{2\varepsilon}\frac{[\Gamma(\varepsilon)]^2}{(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)}+\frac{2}{(4\pi)^2}\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{\varepsilon}$$

$$
\cdot\left[\frac{\Gamma(\varepsilon)}{1-\varepsilon}+\Gamma(1-\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\varepsilon)}{\Gamma(n+2-\varepsilon)}\right]\cdot\mu^{2\varepsilon}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}q}{(2\pi)^{D-1}}\ \frac{1}{E_q}
$$

$$
\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_q}+1}-\frac{1}{2}\mu^{4\varepsilon}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{D-1}q}{(2\pi)^{D-1}}\left\{\frac{1}{E_pE_q}\left[\frac{1}{(E_p-E_q)^2-E_k^2}\right.\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{(E_p+E_q)^2-E_k^2}\right]\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_p}+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_q}+1}+\frac{1}{E_qE_k}\cdot\frac{1}{(E_q+E_k)^2-E_q^2}
$$

$$
\left.\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_q}+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(E_q+E_k)}+1}-\frac{1}{E_pE_k}\cdot\frac{1}{(E_p-E_k)^2-E_q^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_p}+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(E_p-E_k)}+1}\right\}. \tag{24}
$$

将(15)，(16)和(24)式代入(14)式，得到图1(a)的贡献

$$
L_{\mathrm{a}}=e^2f(4-2\varepsilon)\left\{\left(\frac{m}{4\pi}\right)^4\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{2\varepsilon}\frac{[\Gamma(\varepsilon)]^2}{1-\varepsilon}\left(1+\frac{2}{1-2\varepsilon}\right)+2\left(\frac{m}{4\pi}\right)^2\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{\varepsilon}\Gamma(\varepsilon)\right.
$$

$$
\cdot\left[\left(1-\frac{2}{1-\varepsilon}\right)\mu^{2\varepsilon}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\ \frac{1}{E_p}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_p}+1}+\mu^{2\varepsilon}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{k}|}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta|\boldsymbol{k}|}-1}\right]
$$

$$
+(1-\varepsilon)\left[\mu^{2\varepsilon}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\ \frac{1}{E_p}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_p}+1}\right]^2+2(1-\varepsilon)\mu^{4\varepsilon}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}}\ \frac{1}{E_p|\boldsymbol{k}|}
$$

$$
\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_p}+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta|\boldsymbol{k}|}-1}+m^2\mu^{4\varepsilon}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{D-1}q}{(2\pi)^{D-1}}\left[\frac{1}{E_pE_q}\left(\frac{1}{(E_p-E_q)^2-E_k^2}\right.\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{(E_p+E_q)^2-E_k^2}\right)\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_p}+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_q}+1}+\frac{1}{E_qE_k}\cdot\frac{1}{(E_q+E_k)^2-E_q^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_q}+1}
$$

$$
\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(E_q+E_k)}+1}-\frac{1}{E_pE_k}\cdot\frac{1}{(E_p-E_k)^2-E_q^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_p}+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(E_p-E_k)}+1}. \tag{25}
$$

从上式可以看到零温部分的发散，零温与温度相关部分交叉相乘的发散已明显表示为$\Gamma(\varepsilon)$函数形式，至此，原始发散图的维数正规化已经完成.

下面计算重整化，因为零温部分的发散及重整化已在零温场论中有清楚的讨论，所以我们只关心抵消项图1(b)，(c)中交叉发散部分的贡献.

在零温情况下，将图1(b)中的子图乘以度规张量$g_{\lambda\nu}$，得到

$$
\mathrm{i}\int(\mathrm{d}p)(\mathrm{d}q)(2\pi)^D\delta^D(p-q-k)\,\mathrm{Tr}\left[(-\mathrm{i}e\gamma^{\lambda}\mu^{2\varepsilon})\frac{\mathrm{i}}{\not q-m}(-\mathrm{i}e\gamma^{\nu}\mu^{2\varepsilon})\frac{\mathrm{i}}{\not p-m}\right]g_{\lambda\nu}
$$

$$
=\mathrm{i}e^2\mu^{4\varepsilon}f(D)\int(\mathrm{d}p)(\mathrm{d}q)(2\pi)^D\delta^D(p-q-k)\frac{Dm^2-(D-2)q\cdot p}{(p^2-m^2)(q^2-m^2)}, \tag{26}
$$

过渡到温度场论，得到

$$-e\mu^{4\varepsilon}f(D)\frac{1}{\beta}\sum_{n_p}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\cdot\frac{1}{\beta}\sum_{n_q}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}q}{(2\pi)^{D-1}}(2\pi)^{D-1}\delta^{D-1}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\beta\delta_{n_p,n_q+n_k}$$

$$\cdot\frac{Dm^2-(D-2)(q_0p_0-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p})}{(p_0^2-E_p^2)(q_0^2-E_q^2)}. \tag{27}$$

需要指出的是，在上式中如果简单地用 Kronecker δ 符号消去对 n_q(或 n_p) 的一重求和，再利用(11)式将余下的对 n_p(或 n_q) 的求和化为回路积分来计算，则会因为解析延拓的不唯一性而引入一些附加项．为了避免这种情况，在上式中可将 Kronecker δ 符号写作[1]

$$\beta\,\delta_{n_p,n_q+n_k}=\frac{\mathrm{e}^{\beta(q_0+k_0)}-\mathrm{e}^{\beta p_0}}{p_0-q_0-k_0}. \tag{28}$$

这样就可以利用(11) 式各自独立地完成对 n_p，n_q 的求和，所得到的结果与不用回路积分方法直接计算频率求和的结果完全一样．

在利用(28)和(11)式完成对 n_p，n_q 的求和后，取结果的真空极限，得到图 1(b) 中子图部分的贡献

$$V_{\mathrm{b}}=\lim_{\beta\to\infty}\left\{e^2\mu^{4\varepsilon}f(D)\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{D-1}q}{(2\pi)^{D-1}}(2\pi)^{D-1}\delta^{D-1}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\frac{1}{4E_pE_q}\left[I(E_p,-E_q,k_0)\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_p}+1}+I(-E_p,E_q,k_0)\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_q}+1}\right]\right\}. \tag{29}$$

其中 $I(p_0,q_0,k_0)\equiv[Dm^2-(D-2)(p_0q_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})]\beta\delta_{n_p,n_q+n_k}$．注意此处用取子图的真空极限来计算抵消项的做法是为了保证整个计算都是在虚时温度场论的框架下进行所需的．这一点与实时温度场论所作的相应处理是不同的，在那里是将子图的贡献直接代之以零温场论的结果来计算的．

将 V_{b} 代入图 1(b) 得到

$$L_{\mathrm{b}}=\frac{1}{\beta}\sum_{n_k}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}}\cdot\frac{1}{k_0^2-\boldsymbol{k}^2}V_{\mathrm{b}}. \tag{30}$$

利用(10)式完成对 n_k 的求和，略去零温部分，得到图 1(b) 给出的交叉发散

$$L_{\mathrm{b}}^{\mathrm{div}}=2e^2f(4-2\varepsilon)\left(\frac{m}{4\pi}\right)^2\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{\varepsilon}\Gamma(\varepsilon)\mu^{2\varepsilon}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{k}|}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta|\boldsymbol{k}|}-1}. \tag{31}$$

用类似的方法求得图 1(c) 中子图的真空极限

$$V_{\mathrm{c}}=-e^2\mu^{4\varepsilon}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}q}{(2\pi)^{D-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}}(2\pi)^{D-1}\delta^{D-1}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\frac{1}{4E_q|\boldsymbol{k}|}$$

$$\cdot\lim_{\beta\to\infty}\left[I'(p_0,E_q,|\boldsymbol{k}|)\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_q}+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta|\boldsymbol{k}|}-1}-I'(p_0,-E_q,-|\boldsymbol{k}|)\right], \tag{32}$$

其中 $I'\equiv[Dm-(D-2)\not{q}]\beta\,\delta_{n_p,n_q+n_k}$.

利用 V_c 的表达式，得到图 1(c) 的贡献

$$L_c=-\frac{1}{\beta}\sum_{n_p}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\,\mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{\not p-m}V_c\right\}. \tag{33}$$

完成求迹和对 n_p 的求和，再利用 δ 函数的性质和能量守恒 $E_p=E_q+|\boldsymbol{k}|$ 的约束条件，经过一些运算，并略去零温部分，得到图 1(c) 的交叉发散

$$L_c^{\mathrm{div}}=-e^2f(4-2\varepsilon)\left(\frac{m}{4\pi}\right)^2\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{\varepsilon}\Gamma(\varepsilon)\mu^{2\varepsilon}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\,\frac{1}{E_p}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_p}+1}. \tag{34}$$

从(25)式得到图 1(a) 的交叉发散

$$L_a^{\mathrm{div}}=2e^2f(4-2\varepsilon)\left(\frac{m}{4\pi}\right)^2\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{\varepsilon}\Gamma(\varepsilon)\mu^{2\varepsilon}\left[\left(1-\frac{2}{1-\varepsilon}\right)\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\cdot\frac{1}{E_p}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_p}+1}\right.$$
$$\left.+\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}}\,\frac{1}{|\boldsymbol{k}|}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta|\boldsymbol{k}|}-1}\right]. \tag{35}$$

至此，我们得到了 QED 双圈对热力学势的贡献，其中交叉发散部分为

$$F_2^{\mathrm{div}}=\frac{1}{\beta}\left[\frac{1}{2}L_a^{\mathrm{div}}-\frac{1}{2}L_b^{\mathrm{div}}-L_c^{\mathrm{div}}\right]$$
$$=0 \tag{36}$$

有限部分(取 $\varepsilon\to0$)为

$$F_2=\frac{2e^2}{\beta}\left\{\left[\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{E_p}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_p}+1}\right]^2+2\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{|\boldsymbol{k}|}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta|\boldsymbol{k}|}-1}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{E_p}\right.$$
$$\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_p}+1}+m^2\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\cdot\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\left[\frac{1}{E_pE_q}\left(\frac{1}{(E_p-E_q)^2-(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(E_p+E_q)^2-(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2}\right)\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_p}+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_q}+1}$$
$$+\frac{1}{E_q|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|}\cdot\frac{1}{(E_q+|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|)^2-E_q^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_q}+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(E_q+|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|)}+1}$$
$$\left.\left.-\frac{1}{E_p|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|}\cdot\frac{1}{(E_p-|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|)^2-E_q^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_p}+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(E_p-|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|)}+1}\right]\right\}. \tag{37}$$

此结果与文献[2] 采用实时温度场论得到的结果一致.

以上结果是在先完成对离散频率作和后得到的. 然而按照维数正规化的基本思想，在作了时空延拓之后，原来发散的 Feynman 积分变为收敛，运算时若先对$(D-1)$维动量积分，再对离散频率作和，也不会改变积分的收敛性质，因此正规化的结果应与运算顺序无关，这一点在单圈水平的计算中很容易得到证明，但在含有交叉发散的高圈图的计算中，采用先对$(D-1)$维动量积分，后对离散频率作和的运算顺序会导致数学上的复杂性和困难，使发散部分不能完全孤立出来，下面以前文处理过的积分

$$I_3=\mu^{4\varepsilon}\int\{\mathrm{d}P\}\{\mathrm{d}Q\}\ \frac{1}{(P-Q)^2(P^2+m^2)(Q^2+m^2)}$$

$$=\mu^{4\varepsilon}\ \frac{1}{\beta^2}\sum_{n_p,n_q}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\ \frac{\mathrm{d}^{D-1}q}{(2\pi)^{D-1}}\ \frac{1}{[(\omega_{n_p}-\omega_{n_q})^2+(\vec{p}-\boldsymbol{q})^2](\omega_{n_p}^2+\boldsymbol{p}^2+m^2)(\omega_{n_q}^2+\boldsymbol{q}^2+m^2)}\cdot\qquad(38)$$

为例说明这一困难.

利用 Feynman 参数化，完成对$(D-1)$维动量$\boldsymbol{p}$和$\boldsymbol{q}$的积分

$$I_3=\frac{1}{(4\pi)^{D-1}}\cdot\ \frac{\Gamma(4-D)}{\left(2-\dfrac{D-1}{2}\right)}\int_0^1\mathrm{d}x\ \frac{1}{[x(1-x)]^{\frac{D-3}{2}}}\int_0^1\mathrm{d}y\ \frac{1}{y^{D-2}(1-y)^{\frac{D-1}{2}}}$$

$$\cdot\ \mu^{4\varepsilon}\frac{1}{\beta^2}\sum_{n_p,n_q}\ \frac{1}{[xy(\omega_{n_p}-\omega_{n_q})^2+y(1-x)(\omega_{n_q}^2+m^2)+x(1-x)(1-y)(\omega_{n_p}^2+m^2)]^{4-D}}\ .\qquad(39)$$

从(39)式可以看到困难在于，一方面是对 Feynman 参数 x,y 的积分形式复杂，包含发散，且不能解析地算出；另一方面，即使保留对 Feynman 参数的积分，利用(11)式将对 ω_{n_p} 和 ω_{n_q} 的作和化为回路积分，也会因为被积函数分母的幂次包含由维数正规化引进的参数 ε，而使得被积式的解析性质不能确定，完成不了对离散频率的求和，从而最终不能将发散完全孤立出来. 所以，为了有效地孤立出发散部分，首先应该完成对离散频率作和的计算.

4　结　　论

本文一般地讨论了在虚时温度场论中如何进行维数正规化的方法，并以有质量 QED 二圈热力学势为例作了计算. 结果表明：若利用本文发展出来的一些计算技巧，则可把维数正规化方法用于虚时温度场论，有效地孤立出高圈图计算中出现的零温发散和交叉发散，并完成理论的重整化. 同时指出，在虚时温度场论中进行维数正规化时，正确的计算顺序应该是首先完成对离散频率的求和.

感谢侯德富博士有益的讨论.

参　考　文　献

[1] J. I. Kapusta, Finite-Temperature Field Theory, Cambridge Univ. Press, 1989.

[2] Y. Fujimoto, Hou Defu, *Phys. Lett.*, **B335**(1994)87; 侯德富、李家荣，高能物理与核物理，**19**(1995)297.

[3] R. Parwani, *Phys. Rev.*, **D45**(1992)4695.

[4] C. Coriano, R. Parwani, *Phys. Rev. Lett.*, **73**(1994)2398.

Dimensional Regularization in Imaginary – Time Temperature Field Theory and Thermodynamic Potential of Two – Loop QED

Wang Xin Li Jiarong

(*Institute of Particle Physics, Huazhong Normal University, Wuhan* 430070)

Received 23 January 1996

Abstract

This paper is intended to discuss generally the method and procedure of dimensional regularization wihin the imaginary – time formalisim(ITF). As an example, we app it to calculate the thermodynamic potential of two – loop QED and the renormalization.

Key words imaginary – time temperature field theory, dimensional regularization, thermodynamic potential, overlapping divergence.