第23卷 第4期 高能物理与核物理 Vol.23, No.4
1999 年4月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Apr., 1999

格点(1＋1)维 QCD 中$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$的变分研究

江 俊 勤

(广东教育学院物理系 广州 510303)

摘要 用改进的哈密顿量对格点(1＋1)维 QCD 中 Wilson 费米子真空凝聚$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$做变分研究. 结果不但与连续理论的预言值一致,而且几乎不依赖于 Wilson 参数 r. 对于改进的哈密顿量而言,么正变换算符中的三链项对$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$的贡献是很重要的.

关键词 格点 (1＋1)维 QCD 改进哈密顿量 费米子真空凝聚

1 引言

(1＋1)维 QCD 中 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ 没有准确解. T. grandou 等人用红外方法求得($c_0=2\exp(\gamma)$)[1]:

$$\frac{\langle\bar{\psi}\psi\rangle_c}{e}=\begin{cases}-\dfrac{c_0}{2\pi^{3/2}}=-2\times0.161, & \text{对于 } SU(2).\\[2ex] -\dfrac{c_0}{2\pi^{3/2}}\cdot\dfrac{51}{16\sqrt{3}}=-3\times0.1963, & \text{对于 } SU(3).\end{cases}\tag{1}$$

我们曾经用格点方法计算了$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$的值[2],结果与连续理论(红外方法)的预言值(1)式一致,但$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$值与 Wilson 参数 r 的依赖关系较明显(文献[2]中没有做讨论,只取 $r=1$ 时的结果),不符合过渡到连续理论的要求.

最近,我们对 Schwinger 模型中的哈密顿量进行了改进,取得了较好的结果[3,4]. 本文把改进哈密顿量的工作推广应用到(1＋1)维 QCD 中,计算表明:当使用改进的哈密顿量时,$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$值不但与连续理论预言值(1)式一致,而且几乎不依赖于 Wilson 参数 r;同时,计算表明,对于改进的哈密顿量而言,么正变换算符中三链项的贡献是很重要的(对于未改进的哈密顿量而言,三链项的贡献不太重要[2]).

2 (1＋1)维 QCD 中的哈密顿量

(1＋1)维 QCD 中哈密顿量在形式上与 Schwinger 模型中的哈密顿量相同,不同的是

1998-03-31收稿

其中的规范群生成元与规范链变量的对易关系改变了.

取(1 + 1)维 QCD 的改进哈密顿量为[3,4]

$$H = H_g + H_m + H_k + H_r\ , \quad H_g = \frac{g^2}{2a}\sum_{y,j} E_j^{\alpha}(y)E_j^{\alpha}(y)\ , \quad H_m = m\sum_{x,k}\bar{\psi}(x)\psi(x)\ ,$$

$$H_k = \frac{b_1}{2a}\sum_{x,k}\bar{\psi}(x)\gamma_k U(x,k)\psi(x+k) + \frac{b_2}{2a}\sum_{x,k}\bar{\psi}(x)\gamma_k U(x,2k)\psi(x+2k)\ ,$$

$$H_r = \frac{r}{2a}\sum_{x,k}\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{c_1 r}{2a}\sum_{x,k}\bar{\psi}(x)U(x,k)\psi(x+k) - \frac{c_2 r}{2a}\sum_{x,k}\bar{\psi}(x)U(x,2k)\psi(x+2k)\ . \tag{2}$$

式中,$U(x,2k) = U(x,k)U(x+k,k)$,$k = \pm 1$,$j = 1$,$\gamma_{-k} = -\gamma_k$ 为泡利 (Pauli)矩阵:

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \mathrm{i}\gamma_0\gamma_1\ . \tag{3}$$

a,r,m 分别为格距,Wilson 参数,费米子质量(本文取 $m = 0$),$g = ea$ 为无量纲的裸耦合常数,e 为带质量量纲的裸耦合常数. $E_j^{\alpha}(y)$为规范群的生成元,它与规范链变量 $U(x,k)$是一对共轭量,满足如下对易关系[5]:

$$[U(x,k), E_j^{\alpha}(y)] = \frac{1}{2}\lambda^{\alpha} U(x,k)\delta_{x,y}\delta_{k,j}\ ,$$

$$[U^+(x,k), E_j^{\alpha}(y)] = -\frac{1}{2}U^+(x,k)\lambda^{\alpha}\delta_{x,y}\delta_{k,j}\ . \tag{4}$$

对于 $SU(2)$群,λ^{α} 为 Pauli 矩阵;对于 $SU(3)$群 λ^{α} 为 Gell-Mann矩阵.

二分量旋量场 $\psi(x)$表示为

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta^+(x) \end{pmatrix}\ . \tag{5}$$

裸真空定义为 $\xi(x)|0\rangle = \eta(x)|0\rangle = E_j^{\alpha}(y)|0\rangle = 0$.

当 $a\to 0$时,格点理论过渡到连续理论,故(2)式中 $b_1 = \frac{4}{3}$,$b_2 = -\frac{1}{6}$, $c_1 = \frac{4}{3}$,$c_2 = -\frac{1}{3}$(若取 $b_1 = 1$,$b_2 = 0$,$c_1 = 1$,$c_2 = 0$ 则(2)式恢复到未改进的哈密顿量).

3 变分计算

取带 Wilson 费米子的规范场的物理真空态为

$$|\Omega\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1 s_1 + \mathrm{i}\theta_2 s_2 + \mathrm{i}\theta_3 s_3}|0\rangle\ . \tag{6}$$

式中,$S_1 = \mathrm{i}\sum_{x,k}\psi^+(x)\gamma_k U(x,k)\psi(x+k)$, $S_2 = \mathrm{i}\sum_{x,k}\psi^+(x)\gamma_k U(x,2k)\psi(x+2k)$,

$$S_3 = \mathrm{i}\sum_{x,k}\psi^+(x)\gamma_k U(x,3k)\psi(x+3k). \tag{7}$$

$U(x,3k) = U(x,k)U(x+k,k)U(x+2k,k)$. θ_1, θ_2, θ_3 为独立变分参数(比文献[3,4]多考虑S_3的贡献)，由真空能量

$$E_\Omega = \langle\Omega|H|\Omega\rangle / \langle\Omega|\Omega\rangle. \tag{8}$$

取极小值的条件决定，即由

$$\frac{\partial E_\Omega}{\partial\theta_1} = 0,\quad \frac{\partial E_\Omega}{\partial\theta_2} = 0,\quad \frac{\partial E_\Omega}{\partial\theta_3} = 0. \tag{9}$$

可确定$\theta_i = \theta_i(1/g^2, r)$, $(i = 1,2,3)$. 把θ_1, θ_2, θ_3 代入

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_1 = \langle\Omega|\sum_{x,k}\bar{\psi}(x)\psi(x)|\Omega\rangle / \langle\Omega|\Omega\rangle\ . \tag{10}$$

可求得$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_1$.

但是(10)式求得的$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_1$不能直接与连续理论值(1)式比较. 原因是连续理论和格点有不同的正规化和重整化体系，不能直接把连续理论中的算符照搬到格点中. 在格点中，由于 Wilson 项破坏了手征对称性，导致$\bar{\psi}\psi$与单位算符 I 混合[5]:

$$\bar{\psi}\psi^{\text{cont}} = C^{\bar{\psi}\psi}\bar{\psi}\psi^{\text{latt}} + C^I I\ . \tag{11}$$

式中混合系数 $C^{\bar{\psi}\psi}$ 和 C^I 可以在超可重整化理论中用弱耦合展开确定. 根据文献[5]的计算得减除关系

$$\frac{\langle\bar{\psi}\psi^{\text{cont}}\rangle_c}{e} = \frac{\langle\bar{\psi}\psi^{\text{latt}}\rangle_1 - \langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\text{free}} - O(g^2)}{gN_1}\ . \tag{12}$$

式中，N_1为总格点数. 在过渡到连续极限时($g^2\to 0$)，(12)式化简为

$$\frac{\langle\bar{\psi}\psi^{\text{cont}}\rangle_c}{e} = \frac{\langle\bar{\psi}\psi^{\text{latt}}\rangle_1 - \langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\text{free}}}{gN_1}\ . \tag{13}$$

“cont”表示连续，“latt”表示格点，略去这两个符号后(13)式可简记为

$$\frac{\langle\bar{\psi}\psi\rangle_c}{e} = \frac{\langle\bar{\psi}\psi\rangle_1 - \langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\text{free}}}{N_1 g}\ . \tag{14}$$

或

$$\frac{\langle\bar{\psi}\psi\rangle_c}{N_c e} = \frac{\langle\bar{\psi}\psi\rangle_1 - \langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\text{free}}}{Ng}\ . \tag{15}$$

式中 N_c为色量子数(本文中取 2 或 3，对于 Schwinger 模型 $N_c = 1$)，$N = N_c N_1$.

$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\text{free}}$为自由费米子真空凝聚，其表达式为[4]:

对于未改进的哈密顿量

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\text{free}} = -\frac{N}{\pi}\int_0^\pi \frac{r\sin x/2}{[(r\sin x/2)^2 + (\cos x/2)^2]^{1/2}}\,\mathrm{d}x\ . \tag{16}$$

对于改进的哈密顿量

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\text{free}} = -\frac{N}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{r\sin^3 x/2}{[(r\sin^3 x/2)^2+(\cos x/2)^2\cdot(1-\frac{1}{8}\cos x)^2]^{1/2}}\mathrm{d}x\ . \tag{17}$$

式中，$x = pa$.

4 结论与讨论

将(2)式代入(9)式求出θ_1、θ_2、θ_3，再代入(15)式，求得$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_c/(N_c e)$与$1/g^2$的关系曲线，如图1和图2所示．为了便于讨论，也将只考虑S_1和S_2时的结果画于图3和图4中．

由图1和图2知，当使用改进的哈密顿量时，$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$的值与Wilson参数$r$的依赖关系明

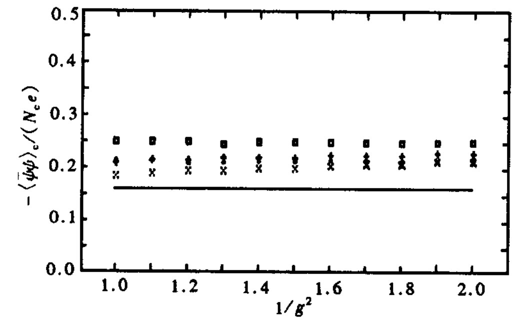

图1　考虑S_1，S_2，S_3时$SU(2)$群中$-\langle\bar{\psi}\psi\rangle_c/(N_c e)$与$1/g^2$的关系

□，× 分别表示使用未改进哈密顿量时$r = 0.1, 1.0$的结果；
●，+ 分别表示使用改进的哈密顿量时$r = 0.1, 1.0$的结果；
实线表示连续理论的预言值.

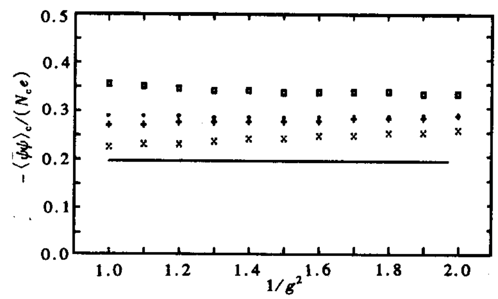

图2　考虑S_1，S_2，S_3时$(SU)(3)$群中$-\langle\bar{\psi}\psi\rangle_c/(N_c e)$与$1/g^2$的关系(各符号意义同图1)

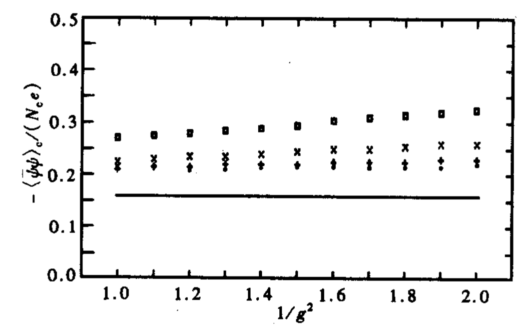

图3　使用改进的哈密顿量时$SU(2)$群中$-\langle\bar{\psi}\psi\rangle_c/(N_c e)$与$1/g^2$的关系

□，× 分别表示只考虑S_1和S_2时$r = 0.1, 1.0$的结果；
●，+ 分别表示考虑S_3时$r = 0.1, 1.0$的结果；
实线表示连续理论的预言值.

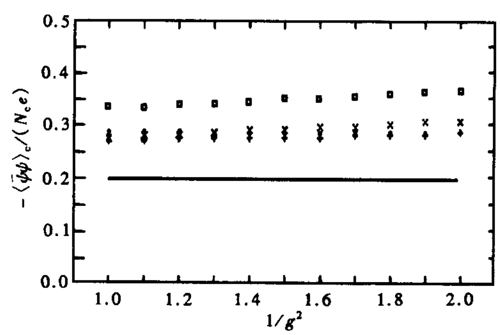

图4　使用改进的哈密顿量时$SU(3)$群中$-\langle\bar{\psi}\psi\rangle_c/(N_c e)$与$1/g^2$的关系(各符号的意义同图3)

显地减小了，到了几乎与 r 无关的程度．而且格点计算得到的$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_c/(N_c e)$值也与连续理论预言值一致：

对于 $SU(2)$，计算值为 -0.211— -0.230(连续理论预言值为 -0.161)．

对于 $SU(3)$，计算值为 -0.2688— -0.2829)连续理论预言值为 -0.1963)．

由图 3 和图 4 知，在使用改进哈密顿量情况下，不论是 $SU(2)$群，还是 $SU(3)$群，三链项 S_3的贡献都是很重要的．可以预见，对于改进的哈密顿量而言，四链项的贡献仍然不会很小，若把四链项也考虑进去，求得的$\langle\bar{\psi}\psi\rangle/(N_c e)$会更接近于连续理论的预言值，而且能保持与 r 的依赖性很小．

另外，由于目前格点方法只能计算到中间耦合区(如，$1/g^2=1$—3)，(12)式简化为(13)式时忽略了小量 $O(g^2)$，可能会产生"减除不足"．若计入小量 $O(g^2)$项，计算结果$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_c/(N_c e)$可能会进一步接近连续理论预言值．当然 $O(g^2)$项的计算十分复杂，它对计算结果有何影响有待进一步的研究．

感谢罗向前博士和陈启洲教授为本工作所做的有益讨论．

参　考　文　献

1 Grandou T, Cho H T, Fried H M. Phys. Rev., 1988, **D37**:946

2 Luo Xiangqian, He Baopeng, Chen Qizhou et al. Z. Phys., 1991, **C51**:423

3 Luo Xiangqian, Chen Qizhou, Xu Guocai et al. Phys. Rev.,1994, **D50**:501

4 Jiang Junqin. High Energy Phys. and Nucl. Phys., (in Chinese), 1998, **22**:891
(江俊勤．高能物理与核物理，1998,**22**:891)

5 Lou Xiangqian, Chen Qizhou. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1992, **16**:685
(罗向前,陈启洲．高能物理与核物理，1992,**16**:685)

Variational Study of $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ in 1 + 1 Dimensional Lattice QCD

Jiang Junqin

(*Department of Physics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou* 510303)

Abstract The Wilson fermion Condensates in 1 + 1 dimensional Lattice QCD are calculated by using the improved Hamiltonian and the variational method. The results are consistant with the predictions from continuum theory, and are almost independent of the Wilson parameter r. The three–links terms give important contribution to $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ in the improved Hamiltonian theory.

Key words Lattice, 1 + 1 dimensional QCD, improved Hamiltonian, fermion condensate

Received 31 March 1998