编者按　Maple 是当今世界上最优秀的数学软件之一,它以良好的使用环境、强有力的符号处理、高精度的数值计算、灵活的图形显示和高效的编程功能,广泛运用于各行各业。该文作者运用 Maple 构建了屋檐排水方式的微分方程模型,并对设计方案进行了可行性论证,提出了屋檐水槽模型的优化方案。刊登该文,希望通过数学和计算机技术的综合运用,拓宽其在农业及相关学科的研究,起到抛砖引玉的作用。

基于 Maple 的屋檐水槽模型

黎捷 (中山火炬职业技术学院信息工程系,广东中山 528436)

摘要　对于倾斜屋顶采用何种结构进行有组织排水,是民用建筑一个普通而实际的问题。在民用建筑中一般是在房顶的边缘安装一个檐槽和一个竖立的排水管来排水,这种排水方式的可行性探讨实际上是解决水槽的容量在单位时间内能否足以排出雨水的问题。构建了这种排水方式的微分方程模型,运用 Maple 对设计方案进行了可行性论证,提出了屋檐水槽模型的优化方案。

关键词　速度平衡原理;微分方程;数值解;数据拟合
中图分类号　S11 + 2　　文献标识码　A　　文章编号　0517 - 6611(2007)30 - 09802 - 03

1　问题的背景与提出

为了雨天出入方便,房屋管理部门想在房顶边缘安装一个檐槽。现在有一个公司想承接这项业务,并承诺:提供一种新型的可持久的檐槽,不管天气如何都能排掉房顶的雨水。房屋管理部门希望检验公司的承诺能否实现。简单来说,从屋脊到屋檐的房顶可以看成是一个12 m 长,6 m 宽的矩形平面,房顶与水平方向的倾斜角度要视具体的房屋而定,通常在20～50°,它包括一个横截面为半圆形(半径为7.5 cm)的水槽和一个竖直的排水管(10 cm)。如图1 所示。

2　模型假设

2.1　合理假设　①降雨分布均匀并以垂直降落,并且直接落在房顶上;②所有落在房顶上的雨水迅速流入水槽中;③雨水不从水槽中溅出;④排水管道顺畅,没有任何障碍或阻塞;④假设雨开始下时槽内有雨水深度0.01 m。

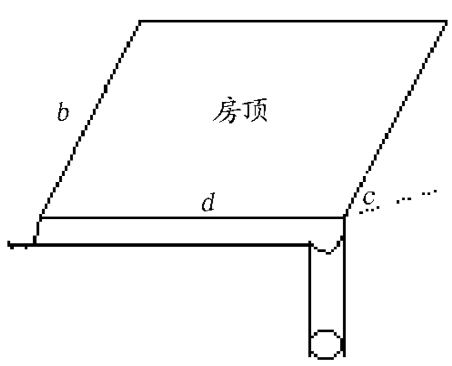


图1　屋檐水槽连接示意

2.2　符号说明　笔者列出与问题有关的因素及符号说明(表1)。

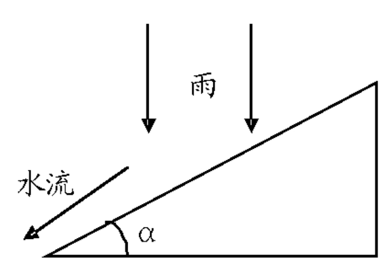
3　建立模型

参照图1,根据速度平衡的原理,对于房顶排水系统有:水槽中水的流量的变化率= 雨水的流入流量- 排水流出的流量。即 $V'(t) = Q_1 - Q_0$,这里 Q_1、Q_0 分别是单位时间流入水槽和从水槽流出的雨水流量。房顶雨水的流动情况,如图2 所示。

房顶的面积是 bd,由于房顶是倾斜的,根据合理假设(1),实际受雨的水平面积应为 $bd\cos\alpha$,房顶上雨水的流量就是 $r(t)\,bd\cos\alpha$,雨水的流动是沿倾斜的房顶向下的,从而流入水槽的流量应该是它在铅垂方向的分量,直接落入水槽中的雨形成的水的流量 $r(t)\,a^2\pi$,即 $Q_1 = r(t)\,bd\cos\alpha\sin\alpha + r(t)\,a^2\pi$。

表1　各因素与符号说明

有关的因素	因素类型	符号	单位
降水强度	输入变量	r	m/s
时间	变量	t	s
房顶的倾斜度	输入参数	α	弧度
房顶的长度	输入参数	d	m
房顶的宽度	输入参数	b	m
水槽的半径	输入参数	a	m
水槽中水的深度	输出参数	h	m
水槽中水的容量	变量	V	m^3
流入水槽的流速	变量	Q_1	m^3/s
流出水槽的流速	变量	Q_0	m^3/s
排水管横截面积	参数	A	m^2
重力加速度	常数	g	m/s^2



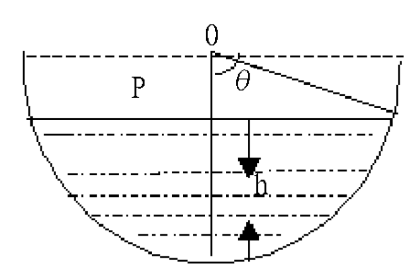


图2　屋顶雨水流动情况　　　图3　水槽截面示意

水槽中水的深度 $h < a$ 时的状况如图3 所示,槽中水的体积为:

$$V(t) = \left(a^2\theta - \frac{1}{2}a^2\sin 2\theta\right)d \tag{1}$$

由图3 有:$\cos\theta = \dfrac{a-h}{a}$　(2)

由(2)式得:$\theta = \arccos\left(\dfrac{a-h}{a}\right)$　(3)

$$\sin 2\theta = \frac{2(a-h)\sqrt{2ah-h^2}}{a^2} \tag{4}$$

把(3)、(4)式代入(1)式得:

$$V(t) = a^2 d\left[\arccos\left(\frac{a-h}{a}\right) - \frac{(a-h)\sqrt{2ah-h^2}}{a^2}\right] \tag{5}$$

下面运用 maple 对(5)式中 t 求导[用 V(t) 表示 V′(t)]:

> v(t) := a^2 * d * (arccos((a - h(t))/a) - (a - h(t)) * sqrt(2 * a * h(t) - h(t)^2)/a^2) :# 定义v(t)

> v1 := diff(v(t) ,t) :# 求v′(t)

> v2 := a^2 * d * (diff(h(t) ,t)/(2 * a * h(t) - (h(t))^2)^(1/2) + diff(h(t) ,t) * (2 * a * h(t) - h(t)^2)^(1/2)/a^2 - 1/2 * (a - h(t))/(2 * a * h(t) - h(t)^2)^(1/2)/a^2 * (2 * a * diff(h

作者简介　黎捷(1964 -),男,湖北咸宁人,副教授,从事计算机软件方面的研究。
收稿日期　2007-07-31

(t) ,t) - 2 * h(t) * diff(h(t) ,t))) : # 复制上式结果, 并对第一项的分母手工化简

> v(t) : = simplify(%) ; # 对上式化简

$$V(t) := \frac{2d\left(\frac{d}{dt}h(t)\right)\sqrt{h(t)(-h(t)+2a)}}{h(t)(-h(t)+2a)}$$

即得到: $V(t) = 2h'(t)\,d\,\sqrt{2ah(t) - h^2(t)}$

根据能量守恒原理有: $\frac{1}{2}mv^2 = mgh(t)$, 得到 $Q_0 = A\sqrt{2gh(t)}$, 这样就得到模型:

$$r(t)\,bd\sin\alpha\cos\alpha + r(t)\,a^2\pi - A\sqrt{2gh(t)} = 2h'(t)\,d\sqrt{2ah(t) - h^2(t)} \quad (6)$$

即

$$\frac{dh}{dt} = \frac{r(t)\,bd\sin\alpha\cos\alpha + r(t)\,a^2\pi - A\sqrt{2gh(t)}}{2d\sqrt{2ah(t) - h^2(t)}} \quad (7)$$

4　模型的求解与分析

这是一个表达式比较复杂的微分方程的模型, 直接求解很困难, 因此, 笔者通过求它的数值解来进行分析讨论。不妨取一组数值:

$a = 0.075$ m, $b = 6$ m, $d = 12$ m, $g = 9.8$ m/s^2, $A = 0.0025\pi$ m^2, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $h(0) = 0.01$ m(假设槽内有一些积水) 。

下面, 运用 Maple 求(7) 的数值解。

> eq : = diff(h(t) ,t) = (r * b * d * sin(alpha) * cos(alpha) - A* sqrt(2 * g * h(t))) / (2 * d * sqrt(2 * a * h(t) - (h(t)) ^2)) ; 定义(7) 式:

$$eq := \frac{d}{dt}h(t) = \frac{\frac{1}{2}rbd\sin\alpha\cos\alpha + ra^2\pi - A\sqrt{2}\sqrt{gh(t)}}{d\sqrt{2ah(t) - h(t)^2}}$$

> eq : = subs(a = 0.075 ,b = 6 ,d = 12 ,g = 9.8 ,A = 0.0025 * Pi ,alpha = Pi/ 6 , %) ; # 将一组数值代入上式

$$eq := \frac{d}{dt}h(t) = \frac{72r\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} + 0.005625r\pi - 0.007826237920\pi\sqrt{2}\sqrt{h(t)}}{24\sqrt{0.150h(t) - h(t)^2}}$$

> eq : = evalf(eq) ; # 化简

$$eq := \frac{d}{dt}h(t) = \frac{0.04166666667(31.194586r - 0.03477105892\sqrt{h(t)})}{\sqrt{0.150h(t) - h(t)^2}}$$

针对房屋管理部门的要求, 笔者考虑两种情况:

(1) r(t) = 常数。先讨论水槽的深度趋于一个低于0.075 m 的稳定值, 即 $h'(t) = 0$ 。

> eq1 : = subs(diff(h(t) ,t) = 0 ,eq) : # 将 $h'(t) = 0$ 代入 eq

> h(t) : = solve(eq1 , h(t)) : # 解方程eq1

$h(t) := 804864.215r^2$

> eq2 : = 804 864.215 * r^2 > = 0.075 : # 当 $h(t) \geq 0.075$

> solve(eq2 ,{ r}) ; # 求方程eq2 的解 r

$\{r \leq -0.0003052595941\}, \{0.0003052595941 \leq r\}$

由此得到, 当 r = 0.000 305 时, 水不溢出; 当 r > 0.000 305 时, 水溢出。下面, 笔者运用 maple 对这一结论作进一步分析。

不妨取 r = 0.000 21、0.000 305、0.000 31 m/s 分别代入方程 eq 中求其数值解, 并作出 h(t) 的图形(图4 ~6) 。

> restart ; eq : = diff(h(t) , t) = 0.416 666 666 7e - 1 * (31.194 586 00 * r - 0.347 710 589 2e - 1 * h(t) ^(1/ 2))/ (0.150 * h(t) - 1. * h(t)^2)^(1/ 2) : # 定义方程。

> eq3 : = subs(r = 0.000 21 ,eq) = 0 : # 将 r = 0.000 21 代入 eq 并令其为0。

> s1 : = dsolve({ eq3 , h(0) = 0.01} , h(t) , numeric) : # 求方程eq3 的数值解。

> s1(5) ; # 可以看出s1 的第2 项为 h(t)

$[t = 5, h(t) = 0.0201575840058773985]$

> plot('rhs(s1(t) [2]) ' ,t = 0 .110) ;

由图4 得知, r = 0.000 21 m/s , h 为 t 的增函数, h 的最大值在0.035 m 附近; 由图5 得知, r = 0.000 305 m/s , h 为 t 的增函数, h 的最大值为0.074 m 附近; 由图6 得知, r = 0.000 31 m/s , h 为 t 的增函数, h 的最大值超过0.075 m。

由于各地具体情况不同, 各地气象预报部门对于当地各类降水的标准也有些自己的规定。一般而言, 当地气象部门规定24 h 降水量在60 mm 以上的雨为特大暴雨。对于 r(t) = 常数这种情形, r > 0.000 305 m/s 的强降雨机率几乎为0 , 因此, 这个公司的承诺是能兑现的。

(2) r(t) 为周期函数, 不妨设为正弦函数, 即:

$$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{10000}\sin\frac{\pi}{60}, & 0 < t < 60 \\ 0, & t \geq 60 \end{cases}$$

这表明下雨过程是在60 s 内发生的一个短促的强阵雨行为, 最大的降雨强度是0.000 001 m/s , 由方程eq 得到如下的微分方程:

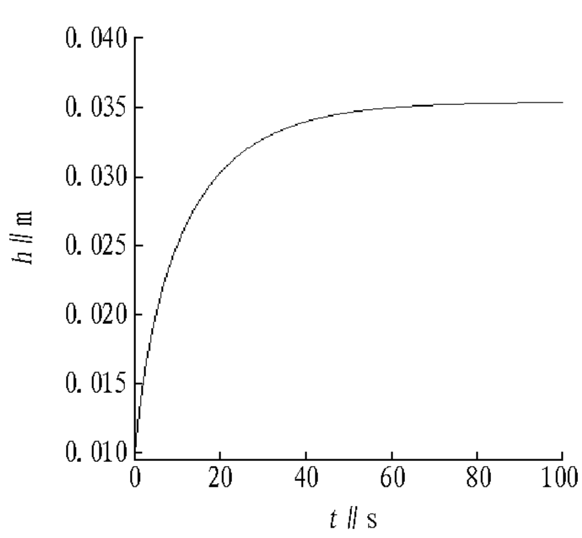


图4　h 随t 变化示意

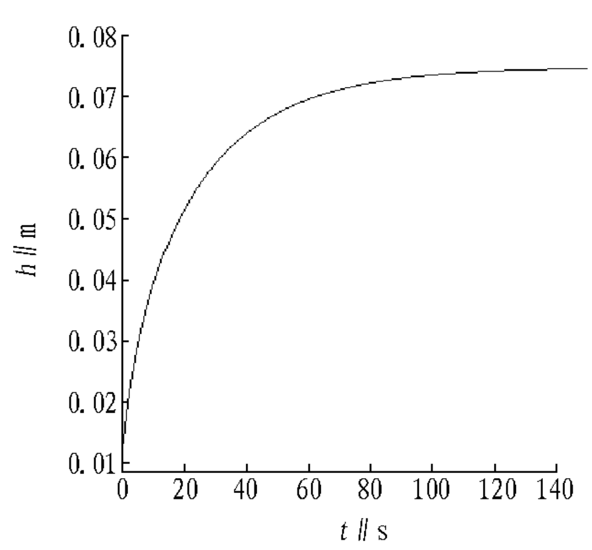


图5　h 随t 变化示意

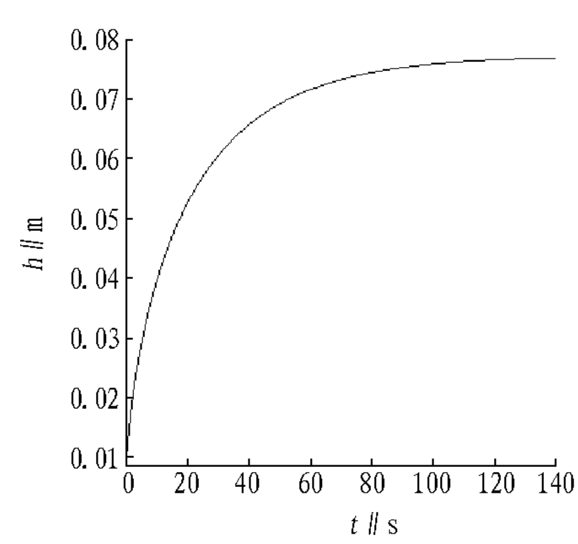


图6　h 随t 变化示意

$$
\frac{dh}{dt}=\begin{cases}\dfrac{0.0417\quad 0.0156\sin\dfrac{\pi}{40}\ -0.0348\quad h(t)}{0.150\ h(t)-h(t)^{2}}, & 0<t<60\\[2ex] -\dfrac{0.001\quad h(t)}{0.150\ h(t)-h(t)^{2}}, & t\geq 60\end{cases}
$$

$h(0)=0.01$

同理,运用上面的数值解法,可得到 h(t) 的图7。

从图7 可以看出,h(t) 的最大值不会超过0.075 m,因此,对于第2 种情形,水槽的水也不会出现溢出的情况,这个公司的承诺可以兑现。

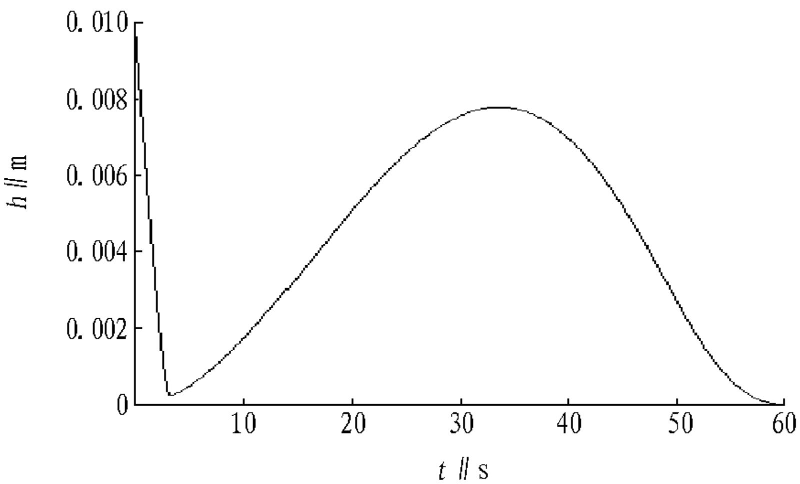


图7　h 随t 变化示意

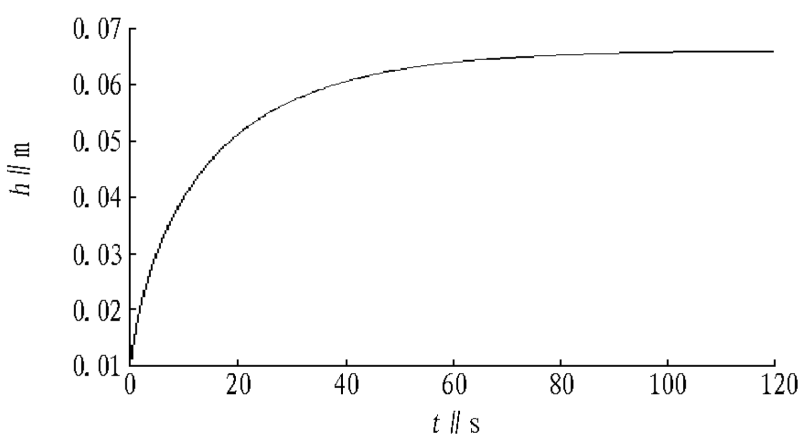


图8　改进后的h 随t 变化示意

5　模型的优化与改进

基于长时间特大暴雨的考虑,可做以下两种改进:

(1) 增大排水管的横截面积 A,即增大排水管的半径。

当排水管半径增大为0.056 m,对于模型的第1 种情形,$r\leq 0.00036$ m/s,水槽的水不会出现溢出的情况。图8 是 h(t) 随时间t 变化的图形。h(t) 的最大值不会超过0.07 m。

对于模型的第2 种情形,水槽的水不会溢出。图9 是 h(t) 随时间t 变化的图形。h(t) 的最大值不会超过0.01 m。

(2) 改变水槽的连接方式,如图10,让水槽往屋檐倾斜一定角度,这相当于增加水槽的容水高度。

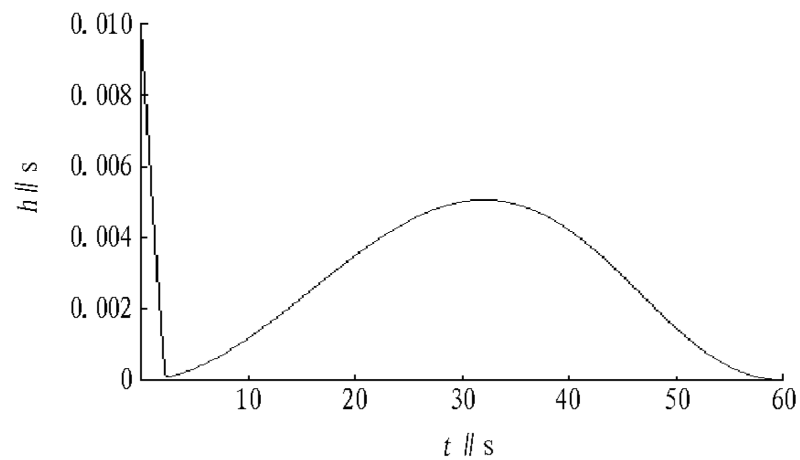


图9　改进后的h 随t 变化示意

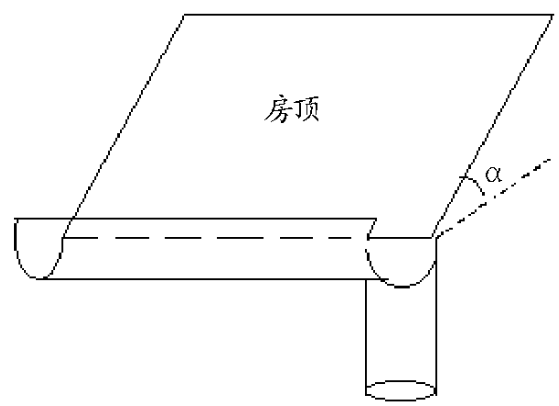


图10　改进后的水槽

参考文献

[1] 刘来福,曾文艺.数学模型与数学建模[M].北京:北京师范大学出版社,2003.
[2] 黎捷.Maple 9.0 符号处理及应用[M].北京:科学出版社,2004.