## 相关信道下 MIMO-OFDM 系统的各态历经容量公式

### **庞继勇**<sup>1</sup>,李建东<sup>1</sup>,杨克虎<sup>2</sup>

(1. 西安电子科技大学 综合业务网理论与关键技术国家重点实验室,陕西 西安 710071; 2. 西安
 电子科技大学 雷达信号处理重点实验室,陕西 西安 710071)

摘要:通过将离散频域表示的信道冲击响应矩阵等效为由多径间相关和收发两端空域相关三者所确定 的"Kronecker"相关信道模型,推导出频率选择性瑞利衰落信道中 MIMO-OFDM 系统在同时具有这 3 种相关性条件下的各态历经容量公式.该公式为评估各种相关性对于 MIMO-OFDM 系统容量的影响提 供了一个简单而有效的工具.在多径间相互独立时,各态历经容量的表达式比较简单;当多径间相关时, 各态历经容量可进一步表示为一个积分形式,并由 Monte Carlo 仿真给出了 3 种相关性、多径时延扩展 和子载波数目对各态历经容量的影响.

关键词: 多输入多输出;正交频分复用;Kronecker 乘积;各态历经容量;信道相关性 中图分类号:TN911.22 文献标识码:A 文章编号:1001-2400(2006)04-0563-05

# Ergodic capacity formula for MIMO-OFDM systems under correlated fading channels

PANG Ji-yong<sup>1</sup>, LI Jian-dong<sup>1</sup>, YANG Ke-hu<sup>2</sup>

State Key Lab. of Integrated Service Networks, Xidian Univ., Xi'an 710071, China; 2. Key Lab. of Radar Signal Processing, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

**Abstract:** An explicit formula for the ergodic capacity of orthogonal frequency division multiplexing (OFDM)-based multiple-input multiple-output (MIMO) systems under correlated frequency selective Rayleigh fading channels is derived, by simplifying the channel response matrix in the frequency domain into the so-called "Kronecker" model composed of three kinds of correlations, i. e., multipath tap gain correlation and spatial fading correlations at both the transmitter and the receiver. The derived formula is very simple and convenient for one to estimate the effects of all three kinds of correlations on MIMO-OFDM capacity. If taps are independent, there exists a simple expression for the ergodic capacity. In the case of tap correlation, the capacity formula could be further given in an integral expression. Both the validity of the new formula is verified and the effects of correlations, delay spread as well as the number of subcarriers on the ergodic capacity are evaluated via Monte Carlo simulations.

Key Words: MIMO; OFDM; Kronecker product; ergodic capacity; channel correlation

多输入多输出(Multiple Input Multiple Output,简称 MIMO)技术可在不增加系统发射功率或不牺牲 系统带宽的前提下显著地提高衰落信道下的信道容量,而且如果进一步将其与空时编码技术相结合,则可大 大提高通信系统的性能<sup>[1]</sup>.对于宽带无线通信而言,一个必须面对的难题就是如何抵抗信道的频率选择性衰 落,而由于多载波正交频分复用(Orthogonal Frequency Division Multiplexing,简称 OFDM)技术能够将频 率选择性衰落信道转化为若干并行的平坦衰落子信道,所以在未来的宽带无线接入领域,MIMO-OFDM 技 术就自然而然地成为了一种关键技术和发展趋势.文[2]中分析了 MIMO-OFDM 系统在频率选择性瑞利衰

收稿日期:2005-08-30

基金项目:国家自然科学基金和微软亚洲研究院联合资助项目(60372048);国家自然科学基金重大项目(60496316);国家"863"计划课题 (2005AA123910);高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划;教育部科学技术研究重点项目(104171)

作者简介:庞继勇(1981-),男,西安电子科技大学博士研究生.

落信道下的容量特性,并给出了各态历经容量的计算公式.其结论表明相对于平坦衰落信道,MIMO频率选 择性信道具有更高的中断容量和各态历经容量.然而,文[2]中没有考虑移动终端处的天线阵列发送信号间 的空域相关性和多径间的相关性.当多径间相关性超过某个特定的门限值时,MIMO-OFDM系统将不再具 有上述容量优势<sup>[3]</sup>.

笔者基于"Kronecker"相关模型<sup>[3,5]</sup>和 Kronecker 乘积的性质<sup>[6]</sup>,推导出了一个简单而有效的、更具一般 性的 MIMO-OFDM 系统的各态历经容量公式,直观且显式地引入了多径间的相关性和收发信号各自的空 域相关性.并通过仿真证明了该公式对于相关条件下的容量评估的有效性.

#### 1 系统模型

考虑一个点到点的多天线 MIMO 通信系统,假设发射机有 N, 个天线,接收机有 N, 个天线,则一般地,频率选择性瑞利衰落离散时间信道下的输入输出关系可表示为<sup>[2]</sup>

$$\mathbf{y}[n] = \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{H}_l \, \mathbf{x}[n-l] + \mathbf{n}[n] \quad , \tag{1}$$

其中 n 是离散时间点,x[n] 是  $N_t \times 1$  维发送信号向量,y[n] 是  $N_r \times 1$  维接收信号向量,n[n] 是  $N_r \times 1$  维循 环对称复高斯噪声的向量,L 为最大可分辨多径数目, $N_r \times N_t$  维复值随机矩阵 $H_t$  ( $l = 0, 1, \dots, L - 1$ )表示第 l 径的信道冲击响应.

将信道冲击响应矩阵合并写作  $H = \begin{bmatrix} H_0 & H_1 & \cdots & H_{L-1} \end{bmatrix}$ ,定义其自相关 Hermite 矩阵为<sup>[3]</sup>

$$\boldsymbol{R}_{H} = E\{\operatorname{vec}(\boldsymbol{H}) \operatorname{vec}(\boldsymbol{H})^{\mathrm{H}}\} \quad , \tag{2}$$

其中 vec(H) =  $\begin{bmatrix} ((h_1^0)^T \ (h_2^0)^T \ \cdots \ (h_{N_t}^0)^T) \ ((h_1^1)^T \ (h_2^1)^T \ \cdots \ (h_{N_t}^1)^T) \ \cdots \ ((h_1^{L-1})^T \ (h_2^{L-1})^T \ \cdots \ (h_{N_t}^{L-1})^T) \end{bmatrix}^T$ , 而  $h_c^l = \begin{bmatrix} h_{1,c}^l \ h_{2,c}^l \ \cdots \ h_{N_r,c}^l \end{bmatrix}^T$ 表示矩阵 $H_l$ 的第c列,经归一化处理后有 $\sum_{l=0}^{L-1} E\{ |h_{l,j}^l|^2 \} = 1, i = 1, \cdots, N_r, j = 1, \cdots, N_r$ . 上标 T和 H 分别代表矩阵转置和共轭转置操作,  $E\{\cdot\}$ 为数学期望操作符.

考虑实际信道中存在的 3 种相关性 :发送端信号间空域相关,用  $N_t \times N_t$  维 Hermite 信关矩阵  $R_t$  表示; 接收端信号间空域相关,用  $N_r \times N_r$  维 Hermite 相关矩阵  $R_r$  表示;多径间相关,用  $L \times L$  维 Hermite 相关矩阵  $\psi_{up}$  表示.其中,空域相关矩阵  $R_t$  和 $R_r$  取决于天线间距、波达方向和入射波的角度扩展,可参考文献[2,8] 中 所使用的物理信道模型.多径间相关由收发两端的脉冲成形滤波器和实际物理信道的响应特性共同引入,矩 阵  $\psi_{up}$  的对角线元素由信道的功率时延谱决定<sup>[4]</sup>.根据归一化要求,上述 3 个相关矩阵需满足如下约束关 系:tr[ $\psi_{up}$ ] =1,tr[ $R_t$ ] = $N_t$ ,tr[ $R_r$ ] = $N_r$ ,(tr 表示矩阵的迹).

根据文[5]中建立的"Kronecker"相关模型,平坦瑞利衰落信道冲击响应的自相关矩阵可表示为 R, 和R, 的 Kronecker 乘积,将其推广到频率选择性瑞利衰落信道中,式(2)便可等效为如下的 3 个相关矩阵间的 Kronecker 乘积形式<sup>[3]</sup>

$$\mathbf{R}_{H} = \boldsymbol{\psi}_{tap} \bigotimes \mathbf{R}_{t} \bigotimes \mathbf{R}_{r} \quad , \tag{3}$$

式中符号" $\otimes$ "表示 Kronecker 乘积. 相应地,由式(3)及 Kronecker 乘积的运算规则,得出各径子信道响应矩  $\mathbf{H}_i$ 间的互相关性(文[3]中的公式(4)有误)

$$E\{\operatorname{vec}(\boldsymbol{H}_{l})\operatorname{vec}(\boldsymbol{H}_{l'})^{\mathsf{H}}\} = \boldsymbol{\psi}_{up}[l,l'] \times (\boldsymbol{R}_{l} \otimes \boldsymbol{R}_{r}), \quad l,l' = 0, 1, \cdots, L-1 \quad .$$

$$\tag{4}$$

#### 2 各态历经容量

假设信道状态至少在一个 OFDM 符号周期的时间段内基本保持不变;发送端未知任何信道状态信息, 接收端能够获得准确的信道状态信息;发送的数据符号间统计独立,在各空(不同天线)频(不同子载波)子信 道上等功率分配.此时的 MIMO-OFDM 系统各态历经容量可表示为<sup>[2]</sup>

$$C = \frac{1}{N_c} \sum_{k=0}^{N_c-1} E\left\{ \log \left[ \det \left( \mathbf{I}_{N_r} + \frac{\rho}{N_t} \mathbf{H}(\exp(j2\pi k/N_c)) \mathbf{H}^{\mathrm{H}}(\exp(j2\pi k/N_c)) \right) \right] \right\} , \qquad (5)$$

其中  $N_c$ 表示子载波数目, $\rho$ 为单个接收天线上所获得的平均信噪比, $H(\exp(j2\pi k/N_c))$ 为信道响应矩阵的 离散频域表示,而且

$$\boldsymbol{H}(\exp(j2\pi k/N_c)) = \sum_{l=0}^{L-1} \boldsymbol{H}_l \exp(-j2\pi kl/N_c) \quad .$$
(6)

很显然,式(5)无法直接和显式地反映各种相关性对于信道容量的影响,因此,先独立推导出式(6)的 Kronecker 等效表达式,进而在式(5)的基础上扩展出一个更为通用和直观的包含1节中定义的3种相关矩 阵的各态历经容量公式.

对式(6)两边同时进行向量化操作,得到

$$\operatorname{vec}(\boldsymbol{H}(\exp(j2\pi k/N_c))) = \sum_{l=0}^{L-1} \operatorname{vec}(\boldsymbol{H}_l) \exp(-j2\pi kl/N_c) \quad . \tag{7}$$

令  $\phi_k = 2\pi k/N_c$ ,则  $H(\exp(j \phi_k))$ 的自相关 Hermite 矩阵可表示为

$$\mathbf{R}_{\mathbf{H}(\exp(j\phi_k))} = E\{\operatorname{vec}(\mathbf{H}(\exp(j\phi_k))) \operatorname{vec}(\mathbf{H}(\exp(j\phi_k)))^{\mathsf{H}}\} =$$

$$E\left\{\left[\sum_{l=0}^{L-1} \operatorname{vec}(\boldsymbol{H}_{l}) \exp(-j \boldsymbol{\phi}_{k} l)\right]\left[\sum_{l=0}^{L-1} \operatorname{vec}(\boldsymbol{H}_{l'})^{\mathsf{H}} \exp(j \boldsymbol{\phi}_{k} l')\right]\right\} = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=0}^{L-1} E\left[\operatorname{vec}(\boldsymbol{H}_{l}) \operatorname{vec}(\boldsymbol{H}_{l'})^{\mathsf{H}}\right] \exp(j(l'-l) \boldsymbol{\phi}_{k}) ,$$

由式(4)可将上式进一步表达为

其中,令

$$1 + 2 \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=l+1}^{L-1} \operatorname{Re}[\psi_{u_p}[l, l'] \exp(j(l'-l) \phi_k)] \quad .$$
(9)

上式利用了  $\psi_{\mu\nu}$  为 Hermite 矩阵且 tr[ $\psi_{\mu\nu}$ ] = 1 的性质, Re[•] 表示取实部操作.

于是,随机矩阵  $H(\exp(j\phi_k))$  可通过如下方法生成:

$$\operatorname{vec}(\boldsymbol{H}(\exp(j\,\boldsymbol{\phi}_k))) = \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{H}(\exp(j\,\boldsymbol{\phi}_k))}^{1/2} \operatorname{vec}(\boldsymbol{H}_w) \quad , \tag{10}$$

上式中,  $(\cdot)^{1/2}$  表示矩阵的平方根,  $R_{H(exp(j \phi_k))}^{1/2}$  ·  $R_{H(exp(j \phi_k))}^{1/2}$  =  $R_{H(exp(j \phi_k))}$ , 且  $R_{H(exp(j \phi_k))}^{1/2}$  也是 Hermite 矩阵,  $H_w \in C^{N_r \times N_t}$  由  $N_r \times N_t$  个相互独立且同分布的均值为 0, 方差为 1 的复高斯随机变量组成.

利用 Kronecker 乘积的两个性质<sup>[6]</sup>:  $(A \otimes B)^{1/2} = A^{1/2} \otimes B^{1/2}$  和 vec $(ADB) = [B^T \otimes A]$  vec(D),式 (10)可变换为常用的"Kronecker"相关模型:

$$\boldsymbol{H}(\exp(j\,\boldsymbol{\phi}_k)) = \boldsymbol{\Upsilon}_k^{1/2}\,\boldsymbol{R}_r^{1/2}\,\boldsymbol{H}_w\,(\boldsymbol{R}_t^{1/2})^{\mathrm{T}} \quad . \tag{11}$$

将其代入公式(5),得到

$$C = \frac{1}{N_c} \sum_{k=0}^{N_c-1} E\left\{\log\left[\det\left(\boldsymbol{I}_{N_r} + \frac{\rho}{N_t}\boldsymbol{H}(\exp(j2\pi k/N_c))\boldsymbol{H}^{\mathsf{H}}(\exp(j2\pi k/N_c))\right)\right]\right\} = \frac{1}{N_c} \sum_{k=0}^{N_c-1} E\left\{\log\left[\det\left(\boldsymbol{I}_{N_r} + \frac{\rho}{N_t}\boldsymbol{\Upsilon}_k\boldsymbol{R}_r^{1/2}\boldsymbol{H}_w(\boldsymbol{R}_t^{1/2})^{\mathsf{T}}((\boldsymbol{R}_t^{1/2})^{\mathsf{T}})^{\mathsf{H}}\boldsymbol{H}_w^{\mathsf{H}}(\boldsymbol{R}_r^{1/2})^{\mathsf{H}}\right)\right]\right\}.$$

因为  $(\mathbf{A}^{1/2})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{1/2}$  和  $\det(\mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{B}) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{A})$ , 所以

$$C = \frac{1}{N_c} \sum_{k=0}^{N_c-1} E\left\{ \log \left[ \det \left( \boldsymbol{I}_{N_r} + \frac{\rho}{N_t} \boldsymbol{\Upsilon}_k (\boldsymbol{R}_r^{1/2})^{\mathrm{H}} \boldsymbol{R}_r^{1/2} \boldsymbol{H}_w (\boldsymbol{R}_t^{\mathrm{T}})^{1/2} ((\boldsymbol{R}_t^{\mathrm{T}})^{1/2})^{\mathrm{H}} \boldsymbol{H}_w^{\mathrm{H}} \right) \right] \right\}$$

又因为 Hermite 矩阵的平方根也是 Hermite 矩阵,所以  $\mathbf{R}_r^{1/2}$  和 ( $\mathbf{R}_t^{T}$ )<sup>1/2</sup> 均为 Hermite 矩阵,从而最终可推 导出

$$C = \frac{1}{N_c} \sum_{k=0}^{N_c-1} E\left\{ \log \left[ \det \left( \boldsymbol{I}_{N_r} + \frac{\rho}{N_t} \boldsymbol{\Upsilon}_k \boldsymbol{R}_r \boldsymbol{H}_w \boldsymbol{R}_t^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H}_w^{\mathrm{H}} \right) \right] \right\} \quad .$$
(12)

1)如果多径间相互独立,即 $\psi_{\alpha\rho}$ 为一个对角阵,从而对于任意的k都有 $\Upsilon_k = 1$ .于是式(12)可进一步简化为

$$C = E\left\{\log\left[\det\left(\boldsymbol{I}_{N_{r}} + \frac{\rho}{N_{t}}\boldsymbol{R}_{r}\,\boldsymbol{H}_{w}\,\boldsymbol{R}_{t}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{H}_{w}^{\mathrm{H}}\right)\right]\right\} \quad .$$
(13)

注意,在形式上式(13)和基于"Kronecker"相关模型的平坦衰落信道容量公式相似[7].

2)如果多径间相互独立且仅存在接收端空域相关,即  $\mathbf{R}_{t} = \mathbf{I}_{N_{t}}$ ,则式(12)可化简为与文[2]中相同的表达:

$$C = E\left\{\log\left[\det\left(\boldsymbol{I}_{N_r} + \frac{\rho}{N_t}\boldsymbol{R}_r \boldsymbol{H}_w \boldsymbol{H}_w^{\mathrm{H}}\right)\right]\right\} \quad .$$
(14)

3)若多径间相互独立且收发两端空域相关矩阵的秩相同,即假定 rank( $\mathbf{R}_i$ ) = rank( $\mathbf{R}_r$ ) = N,则可得到 式(13)中容量的一个紧密下界<sup>[8]</sup>

$$C \ge N \log \det \left[ 1 + \frac{\rho}{N} \left( \det(\boldsymbol{R}_r) \det(\boldsymbol{R}_t) \right)^{1/N} \times \exp \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{p=1}^{N-j} \frac{1}{p} - \gamma \right) \right] \quad , \tag{15}$$

其中  $\gamma \approx 0.57721566$  为欧拉常数.

4) 当  $N_c \rightarrow \infty$  时,令  $\omega = 2\pi k/N_c (k = 0, 1, \dots, N_c - 1)$ ,有  $\omega \in [0, 2\pi)$ ,  $dk = N_c d\omega/(2\pi)$ ,

$$\Upsilon(\omega) = 1 + 2 \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=l+1}^{L-1} \operatorname{Re}[\psi_{u_p}[l, l'] \exp(j\omega(l'-l)]]$$
.

所以,式(12)也可表示为如下的积分形式:

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} E \left\{ \log \det \left[ \boldsymbol{I}_{N_{r}} + \frac{\rho}{N_{t}} \boldsymbol{\Upsilon}(\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{R}_{r} \boldsymbol{H}_{w} \boldsymbol{R}_{t}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H}_{w}^{\mathrm{H}} \right] \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} \quad .$$
(16)

从上面的推导和分析不难看出,系统各态历经容量直接取决于第1节中定义的3个相关矩阵,因此通过 公式(12~16)能够更为简便地分析各种相关性对于容量的影响.

#### 3 仿真示例

通过 Monte Carlo 方法仿真了系统参数(空域相关、多径间相关、最大可分辨多径数目和子载波数目)对 MIMO-OFDM 系统各态历经容量的影响.在所有仿真中,收发两端均采用4个天线的等距线性阵列.

1)收发两端空域相关对容量的影响.在表达式(12),(13)和(16)中矩阵  $H_{\omega}$  是独立满秩的,所以乘积矩 阵 $R_r$   $H_{\omega}$   $R_r^{T}$   $H_{\omega}^{H}$ 的相关性和秩就由  $R_r$  和  $R_t$  完全确定.而空域相关性取决于天线间距和入射波的角度扩展, 当天线间距和 / 或入射波角度扩展较小时,空域相关性就较强,矩阵  $R_r$  和  $R_t$  的秩就较低,从而只能获得较低 的各态历经容量.先不考虑多径间相关,且给定  $R_r[i,j] = R_t[i,j] = \alpha^{|j-i|}$ ,i,j = 1,2,3,4, $|\alpha| \leq 1,\alpha$ 定义为 空域相关系数.图 1 给出了  $\alpha$  取不同值情况下系统各态历经容量及其紧密下界与信噪比的关系曲线.可看出 空域相关系数越小,各态历经容量越大,且其与理论下界逼近得越紧密(这也证明了笔者所推导的容量公式 的有效性).

2)多径间相关对于容量的影响. 不失一般性, 假设  $L = 6, \psi_{up}[l, l'] = \beta^{|l'-l|}/6, l, l' = 0, 1, ..., 5,$ | $\beta | \leq 1, \beta$  定义为多径相关系数. 图 2 给出了收发两端空域相关系数均为  $\alpha = 0.3, \beta$  分别为 0, 0.5, 0.9 时, 各态历经容量与信噪比的关系曲线. 从中不难看出, 多径间相关将会进一步降低系统容量.

3)多径数目 L 对于容量的影响. 在推导出的容量公式里,没有显式地包含参数 L,但这不等于说容量与 L 无 关. 这里给出一种直觉上的认识:在实际通信环境中,多径数目越多,则一般地,阵列接收信号入射波的角度扩 展也越大,这必将降低接收信号的空域相关性,从而有助于提升系统容量. 图 3 给出了 L 取不同的值时,各态历 经容量与信噪比的关系曲线. 很明显,随着多径数目的增加,容量也会逐步提升,但速率将越来越慢. 仿真中的 信道模型参考了文献[2,8],并设定发送端和接收端的角度扩展分别为 90°和 180°,天线间距为 1/2波长.



图 1 不同空域相关系数下,容量与信噪比的关系



图 3 多径数目不同时,容量与信噪比的关系



图 2 不同多径相关系数下,容量与信噪比的关系



图 4 子载波数目对于容量计算准确性的影响

4)子载波数目  $N_{\epsilon}$  的取值对多径间相关时的容量的影响. 图 4 作为一个示例,给出了当  $\alpha = 0.3, L = 6$ ,  $\beta = 0.5, 0.9, N_{\epsilon} = 4, 8, \infty$  时,各态历经容量与信噪比的关系曲线. 对于  $N_{\epsilon} = \infty$ ,依据公式(16) 来计算各态 历经容量. 由图可知,在相同的空域相关条件下, $\beta = 0.5$  时,3 条曲线基本重合;当 $\beta = 0.9$  时, $N_{\epsilon} \ge 8$  后曲线 也开始重合了. 经不同参数条件下的多次仿真计算,发现对于各态历经容量的计算, $N_{\epsilon}$  的取值没有特别的 影响.

#### 4 结束语

推导出了仅在接收端可获知准确的信道状态信息下,MIMO-OFDM 系统在频率选择性瑞利衰落相关信 道下的各态历经容量计算公式.通过将频域表示的信道响应矩阵描述为"Kronecker"模型,该容量公式可直 接而简便地由空域相关矩阵和多径间相关矩阵表示出来,并在几种情况下具有简化的计算表达式.仿真结果 说明:多径间相关和收发信号的空域相关,都会降低系统的各态历经容量;多径数目的增加会提升容量;子载 波数目的选取对于容量的计算没有明显的影响.

#### 参考文献:

- [1] Wang Chao, Liao Guisheng, Zhang Linrang, et al. Overview of Space-time Coding and Its Prospect[J]. Journal of Xidian University, 2003, 30(5): 634-639.
- [2] Bolcskei H, Gesbert D, Paulraj A J. On the Capacity of OFDM-Based Spatial Multiplexing Systems[J]. IEEE Trans on Commun, 2002, 50(2): 225-234.