

对射线传输系统的推广及应用

谭康伯, 梁昌洪, 袁浩波

(西安电子科技大学 天线与微波技术重点实验室, 陕西 西安 710071)

摘要: 基于高频射线理论, 并通过 Fermat 原理以一致的形式讨论了左、右手媒质界面上电波或光波的折射特性. 在所得折射定律的基础上结合引入相位的辛空间坐标, 对矩阵光学进行了推广. 相应传输理论的表示仍然保持了 Gauss 理论的辛几何本质, 从而可以适用于左、右手媒质混合的系统.

关键词: 矩阵光学; 左手媒质; Fermat 原理; 折射; 辛群

中图分类号: TN011 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-2400(2006)04-0622-04

The generalization and application of ray optical systems

TAN Kang-bo, LIANG Chang-hong, YUAN Hao-bo

(Key Lab. of Antennas and Microwave Technology, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

Abstract: Refraction of electromagnetic or optical waves on the interface of LHMs and RHMs is studied by the uniform approach on the basis of the high frequency ray theory through the application of Fermat's principle. And then the matrix optics is generalized through the combination of the refraction law gained and symplectic coordinates with phase items. The relevant expression for ray transmission can maintain the essence of the symplectic formulation and have the application in the RHMs and LHMs mixing optical systems.

Key Words: matrix optics; LHMs; Fermat's principle; refraction; symplectic group

2000年以来,以 J. B. Pendry, D. R. Smith 等^[1,2]为代表的一些学者分别从理论和实验上论证了左手媒质(LHMs)的存在及其电磁特征,进而展示了左手媒质不同于传统右手媒质(RHMs)的特性.正因如此, LHMs 的相关研究及应用受到人们的普遍重视.在左手媒质的特性中,射线传输会呈现出负折射的现象是其中重要的一种,而 Smith 等人也正是通过对该现象的观测来深入研究 LHMs 的. LHMs 虽然是一种新型材料,但是其仍然遵循经典的 Maxwell 方程组,这也就暗示 LHMs 应该具有与 RHMs 的某种联系.也就是说,对于这两种媒质所引起的电磁现象及相关应用应该可以通过一致的形式来加以描述.

笔者从折射问题的分析入手,通过 Fermat 原理对左、右手媒质间无限大平面上的折射现象进行分类讨论,结果表明当两种媒质分别为左或右手媒质时,将在界面上出现负折射.并以此为基础,对于 Gauss 光学系统进行了拓宽,使其可以适用于左、右手媒质混合的系统中射线传播的分析.

1 理论基础

在经典电磁理论中,高频射线理论是电波传播,绕射,导波光学等^[3~7]电磁学不同领域中重要的理论基础.从 Maxwell 方程组出发通过高频近似,可以得到电磁波的传输具有几乎类似与射线的特性.也就是说,在高频近似的情况下,电磁现象可以通过几何射线理论来描述.对于射线传输的一种有效表示是基于高频近似的 Gauss 理论,该理论可以通过传输矩阵的形式来有效描述射线与媒质共同构成的电磁或光学系统中的射线传输^[3,5].由于 LHMs 所引起的负折射现象属于电磁传输的范畴,因此就有必要对原有射线传输理论进

行推广. 另外, 作为几何射线理论基础的 Fermat 原理^[3,4] 通常可以表示为如下两种形式: $\delta\left(c \int_A^B dt\right)$ 和 $\delta\left(\int_A^B n ds\right)$, 第一个表达式被称为最小时间原理, 第二个为最短光程原理, 而这两种形式在一定条件下是等价的^[3]. 但是事实上, 第二种表述较之第一种表述有一定的优越性, 因为对于不同媒质等情况, 最小时间的概念并不明晰. 为了下面分析的清楚、方便, 这里采用 Fermat 原理的光程表述. 在对问题进行更为深入的分析之前, 对电磁(光)媒质还需进行一些讨论. 由于 LHMs 的出现使得表征媒质特性的 ϵ, μ 可以呈现正负不同的形式. 因此对于电波或光波传播等问题较为方便的表示形式是将折射率写为 $n = |n| \exp(i\theta)$, 折射率的这种表述比较简洁, 当 $\theta = 0$ 时即对应于 RHMs; 当 $\theta = \pi$ ^[1,2] 时即对应于 LHMs. 仍然可以采用如下的变分形式来表示 Fermat 原理

$$\delta\left(\int_A^B n ds\right) = 0 \quad (1)$$

其中折射率采用前面定义的形式. 式(1)所表达的物理意义是, 在通过 A, B 的所有射线中, 真实的射线是总的光程取驻值的那条射线. 接下来将在上面所讨论的 Fermat 原理广义表示的基础上对矩阵光学进行推广, 使其适合可以包含左手媒质的光学系统, 从而拓展传统光学系统理论的应用范围.

2 对折射定律的讨论

折射是电磁传输分析中重要的问题. 由于媒质的不同变化将引起折射率的变化, 从而导致电磁波或光波不同传输特性的产生. 下面将对无限大分界平面所产生的折射进行分析. 通常对于这种问题的折射主要是指不同媒质的折射. 事实上, 同种媒质中射线的传播也可以归入折射的范围, 所不同的是同种媒质中的问题是折射现象中折射率变化率为零的特殊情况. 正因为基于以上考虑, 所以下面将对相关问题一并考虑. 对于各向同性、均匀媒质 I 和 II, 可以建立如图 1 所示的折射几何形式.

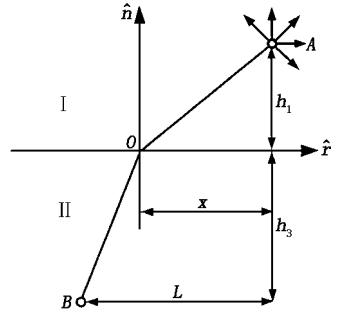


图 1 双极值曲线几何结构

其中 \hat{n} 表示界面的法向. 下面从 Fermat 原理的推广形式出发给出折射定律. 首先, 对于图 2 中的几何模型, 总光程可以表述为如下形式

$$|n_1| \exp(i\theta_1) (h_1^2 + x^2)^{1/2} + |n_2| \exp(i\theta_2) (h_2^2 + (L-x)^2)^{1/2} \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)中, 通过变分运算及进一步整理就可以得到

$$|n_1| \exp(i\theta_1) (x/(h_1^2 + x^2)^{1/2}) = |n_2| \exp(i\theta_2) ((L-x)/(h_2^2 + (L-x)^2)^{1/2}) \quad (3)$$

式(3)即为表征两种不同媒质界面上射线特性的折射定律.

下面将以折射定律为基础对于具体现象进行分析. 在理想情况下, 当媒质相同时(无论是 LHMs, 还是 RHMs), 式(3)中的折射率可以消去, 通过计算可以得到

$$x = Lh_1/(h_1 + h_2) \quad (4)$$

该结果表明从 A 点到 B 点的射线是直线, 这与实际物理现象相符. 当媒质不同时(分别为 LHMs 或 RHMs), 则存在如下 4 种情况:

(1) 当媒质 I 为 RHMs, 媒质 II 为 RHMs 时, 因为 $n_1 > 0, n_2 > 0$, 入射角度大于 0, 因此可以得到折射角应该为正角度, 即对应于如图 2 当前所示的情况.

(2) 当媒质 I 为 LHMs, 媒质 II 为 LHMs 时, 由于 $n_1 < 0, n_2 < 0$, 入射角度大于 0, 则折射角仍然为正角度.

(3) 当媒质 I 为 RHMs, 媒质 II 为 LHMs 时, 对于理想情况, 设 RHMs 区的媒质参数为: $\epsilon = \epsilon_1, \mu = \mu_1$, 于是 $n_1 = (\epsilon_1 \mu_1)^{1/2}$; LHMs 区的媒质参数为: $\epsilon = -\epsilon_2, \mu = -\mu_2$, 进一步可以表述为, $\epsilon = \epsilon_2 \exp(i\pi), \mu = \mu_2 \exp(i\pi)$, 可以得到 $n_2 = (\epsilon_2 \mu_2)^{1/2} \exp((i\pi + i\pi)/2) = -(\epsilon_2 \mu_2)^{1/2}$. 考虑到一般性, 几何结构仍然如图 2 所示. 对从 A 到 B 的任意可实现光程 $n_1(h_1^2 + x^2)^{1/2} + n_2(h_2^2 + (L-x)^2)^{1/2}$ (设 $L \geq x$) 取极值可得

$$n_1 (x/(h_1^2 + x^2)^{1/2}) = n_2 ((L-x)/(h_2^2 + (L-x)^2)^{1/2}) \quad (5)$$

由于区域 II 为 LHMs, 将参数代入上式并整理可得

$$(\epsilon_1 \mu_1)^{1/2} (x/(h_1^2 + x^2)^{1/2}) = (\epsilon_2 \mu_2)^{1/2} ((x-L)/(h_2^2 + (L-x)^2)^{1/2}) \quad (5)$$

对于这一步的整理并非繁琐,其意义在于:由于上式左边是一个正的量,于是从这个要求可得 $x \geq L$, 而正是这一点可以说明 LHM_s 对于光线不同于 RHM_s 的影响,从而才会导致如完美透镜等现象^[1,2] 的出现.

(4) 对于媒质 I 为 LHM_s, 媒质 II 为 RHM_s 时, $n_1 < 0, n_2 > 0$, 入射角度大于 0, 于是类似上面(3), 也将产生负折射现象.

对于无限大平面媒质分界面上折射的具体分析, 有助于对左、右手媒质中电磁现象的理解. 从上面的分析可以看到, 无论媒质 I 是 RHM_s, 媒质 II 是 LHM_s, 还是媒质 I 是 LHM_s, 媒质 II 是 RHM_s, 只要两种媒质的类型不同, 则在界面上都将发生负折射现象.

3 对矩阵光学的进一步讨论

作为对于上面已有结果的应用, 接下来考虑矩阵光学的推广形式. 在媒质具有时不变的性质的前提下, 通过 A, B 的三维光程可以方便的表示为

$$W(l) = \int_A^B n(x, y, z) ((x'(s))^2 + (y'(s))^2 + (z'(s))^2)^{1/2} ds \quad (6)$$

对式(6)作变分处理可得如下方程组

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \left(\frac{nx'(s)}{((x'(s))^2 + (y'(s))^2 + (z'(s))^2)^{1/2}} \right) - \frac{\partial n}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{ny'(s)}{((x'(s))^2 + (y'(s))^2 + (z'(s))^2)^{1/2}} \right) - \frac{\partial n}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{nz'(s)}{((x'(s))^2 + (y'(s))^2 + (z'(s))^2)^{1/2}} \right) - \frac{\partial n}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

可以注意到: 当 n 与空间位置无关时, 即为均匀媒质时, 从方程组(7)中所得到的光线参数方程为直线方程. 接下来对于相应的 Gauss 光学系统进行分析. 首先定义坐标为: $q, p = |n| \exp(i\theta) \Phi$, 对于 Gauss 光学系统, 有如下线性关系:

$$\begin{bmatrix} q_2 \\ p_2 \end{bmatrix} = M_{21} \begin{bmatrix} q_1 \\ p_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

下面采用类似于传统传输光学的方法对同种媒质中传输与不同媒质界面上的折射这两种关键的基本模型进行具体分析.

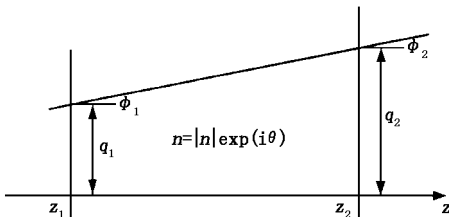


图 2 参考面 z_1, z_2 间射线的几何关系

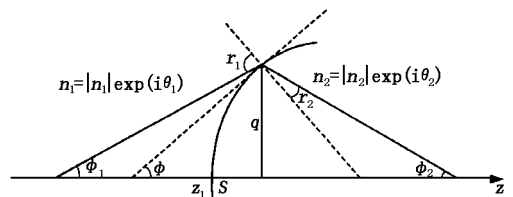


图 3 S 两侧的射线的几何关系

3.1 z_1, z_2 间的射线传输特性

该模型结构如图 2 所示, 其中相空间坐标 $p_1 = |n| \exp(i\theta) \Phi_1$, 考虑到 Gauss 光学特性的要求以及图 3 中的几何关系, 则可得如下矩阵关系:

$$\begin{bmatrix} q_2 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l/(|n| \exp(i\theta)) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ p_1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中 l 表示 z_1, z_2 间的几何长度.

3.2 两侧为 n_1, n_2 的射线折射特性

对于如图 3 所示的模型, 首先设 S 的方程为: $z - z_1 = 1/(2Kq^2)$, 其中 K 为界面 S 的曲率. 通过图中的几

何关系和 $\tan(\pi/2 - \Phi) = dz/dq = Kq \approx \pi/2 - \Phi$, 对于折射定律, 前面已经给出了详尽的推导和说明. 考虑到 Gauss 系统的条件, 于是可得到如下关系

$$\begin{cases} r_1 = \Phi_1 + Kq \\ r_2 = \Phi_2 + Kq \end{cases}, \quad |n_1| \exp(i\theta_1) r_1 = |n_2| \exp(i\theta_2) r_2. \quad (10)$$

显然上面第二式即为折射定律的表述形式, 考虑到 $q = q_1 = q_2$, 从上面方程组可得如下结果:

$$\begin{bmatrix} q_2 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(|n_2| \exp(i\theta_2) - |n_1| \exp(i\theta_1)) K & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ p_1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

对于式(11), 当界面为无限大平面时, $K = 0$, 考虑到式(10)及傍轴条件, 则上式即为相应的折射定律. 值得注意的是, 上面两种模型具有这样的特性: $\det(M_{21}) = 1$, 即式(9), (11)中的变换矩阵为辛矩阵. 由于任意 2×2 矩阵都可以化为上面两种模型中的三角阵之积, 并且前面所得变换矩阵满足矩阵光学的条件. 于是可以认为行列式等于 1 的二阶矩阵(即 M_{21})全体所构成的辛群, 与 Gauss 光学系统同构.

下面以薄透镜为例给出分析. 外部空间媒质特性用 n_1 表示, 并设透镜(折射率为 n_2)两侧曲率半径分别为: R_1, R_2 . 类似文[5]中的处理方法: 取观测面 F_1, F_2 位于薄透镜两侧光学距离为 f 时, 利用前面所得模型 1, 2 可得, 同时设 $q_1 = 0, p_1 \neq 0$, 于是通过矩阵相成可得

$$\begin{bmatrix} 0 & f \\ -1/f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f p_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

上式表示傍轴射线在薄透镜系统中的传输特性.

4 结束语

通过 Fermat 原理, 将左、右手媒质统一于同一种表述体系中, 并通过 Fermat 原理的广义表示对电磁波在左手媒质作用下的传播进行了讨论. 在保持辛特性不变的同时, 以该原理为基础将 Gauss 光学系统进行了一定的推广, 从而使得所得传输光学理论可以适用于左、右手媒质混合系统的分析.

参考文献:

- [1] Pendry J B. Negative Refraction Makes a Perfect Lens[J]. Physical Review Letters, 2000, 85(18): 3966-3969.
- [2] Pendry J B, Smith D R. Reversing Light: Negative Refraction[J]. Physics Today, 2004, 57(6): 37-44.
- [3] 玻恩 M, 沃耳夫 E. 光学原理——光的传播、干涉和衍射的电磁理论(上册)[M]. 北京: 科学出版社, 1978.
- [4] 汪茂光. 几何绕射理论(第二版)[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1994.
- [5] 竺庆春, 陈时胜. 矩阵光学导论[M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1991.
- [6] Liu Qizhong, Ma Chengbo, Gong Deming, et al. Tracing of Diffraction Rays in GTO[J]. Journal of Xidian University, 1991, 18(3): 45-53.
- [7] Liang Changhong, Tan Yuanyang, Zong Weihua. Determination of Second-order Reflection Points in the System of Cylinder and Cone Using Fermat's Principle[J]. Journal of Xidian University, 2004, 31(4): 497-500.

(编辑: 齐淑娟)