

柱体电磁散射的无限元-区域分解算法

安翔¹, 吕志清², 梁昌洪¹

(1. 西安电子科技大学 天线与微波技术重点实验室, 陕西 西安 710071;

2. 东南大学 毫米波国家重点实验室, 江苏 南京 210096)

摘要: 针对电大尺寸柱体散射问题, 提出了无限元-部分基础解向量的区域分解算法. 引入无限元方法截断计算空间, 减少了每个子区域内的未知数和连接边界上的节点数. 首先计算连接节点的部分基础解向量, 再经过简单的线性组合即可获得原始问题的解. 与传统算法相比, 新算法减少了计算量和存储量.

关键词: 区域分解算法; 无限元; 电磁散射

中图分类号: TN011 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-2400(2006)03-0425-05

Study of the infinite element-domain decomposition method in electromagnetic scattering of cylinders

AN Xiang¹, LÜ Zhi-qing², LIANG Chang-hong¹

(1. Key Lab. of Antenna and Microwave Technology, Xidian Univ., Xi'an 710071, China; 2.

State Key Lab. of Millimeter Waves, Southeast Univ., Nanjing 210096, China)

Abstract: A new algorithm based on the infinite element-partial basic solution vectors domain decomposition method (IEM-PBSV-DDM) is presented for solving electromagnetic scattering problems of electrically large cylinders. The infinite element method is introduced to truncate the computational space, which decreases the number of unknowns on each subdomain and the number of nodes on the interface boundaries significantly. The partial basic solutions of the nodes on the interface boundaries of contiguous subdomains are solved in advance, and then the original solution could be trivially obtained by a simple vector summation procedure. Compared with the traditional method, the presented method can reduce the computation time and memory requirement greatly.

Key Words: domain decomposition method; infinite element method; electromagnetic scattering

电大尺寸柱体散射是非常典型的电磁问题之一, 区域分解算法 (DDM) 是解决此类问题的一种快速算法^[1~3], 其基本思想是把原来的大区域分成若干个子区域, 分别在每个子区域上求解 Helmholtz 方程. 由于每次只处理一个子区域, 所以对存储量的要求降低了很多. 然而, DDM 属于迭代算法, 迭代次数和每个子区域的计算复杂度决定了它的效率. 对于电大问题往往需要几十次甚至成百上千次迭代, 每次迭代都需要在每个子区域上重新求解矩阵方程, 因此计算量很大, 效率很低. 最近, 文献^[2, 3]提出了基于部分基础解向量的区域分解算法 (PBSV-DDM), 它不需要在迭代中反复求解矩阵方程, 而是先计算出连接节点的基础解向量, 再对它们做线性组合就可获得整个区域的解.

当连接节点很多时, PBSV-DDM 求解基础解向量会非常耗时, 而且基础解向量本身也要占用相当多的存储空间. 因此, 减少连接节点数是 PBSV-DDM 的关键. 笔者引入无限元方法 (IEM), 提出无限元-区域分解算法 (IEM-PBSV-DDM), 显著地降低了计算量和存储量, 提高了求解效率.

1 PBSV-DDM 基本原理

考虑图 1 所示的无限长导体柱的散射问题. 把原始求解区域 Ω 分成 s 个子区域 Ω_p ($p = 1, 2, \dots, s$), 其中 Γ_p 是子区域 Ω_p 的原始边界, Γ_{pq} 是 Ω_p 和相邻子区域 Ω_q 之间的虚拟连接边界(图中以虚线表示). 每个子区域 Ω_p 上的散射场满足

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_p^{n+1} + k^2 \phi_p^{n+1} = 0, & \phi \in \Omega_p, \\ \text{原始边界条件}, & \phi_p \in \Gamma_p, \\ \text{Despres 条件} (\partial_{n_p} + jk) \phi_p^{n+1} = \\ \quad (-\partial_{n_q} + jk) \phi_q^n, & \phi_p \in \Gamma_{pq}, \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中 ϕ_p^{n+1} 是经过 $n+1$ 次迭代后子区域 Ω_p 上的场值; ϕ_q^n 是经过 n 次迭代后子区域 Ω_q 上的场值; k 是自由空间波数; n_p 和 n_q 分别是 Γ_{pq} 上子区域 Ω_p 和 Ω_q 的单位外法线方向.

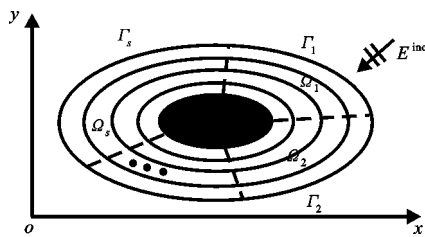


图 1 无限长导体柱的区域划分示意图

$$\text{由离散方程(1)得到矩阵方程} \quad \mathbf{A}_p \phi_p^{n+1} = b_p^n, \quad (2)$$

其中 \mathbf{A}_p 是系数矩阵; b_p^n 是经过 n 次迭代以后作用在子区域 Ω_p 上的激励.

观察图 1 发现, 相邻子区域之间只通过虚拟连接边界交换信息, 每次迭代时右端项 b_p^n 中仅有一部分元素需要更新, 它们对应于连接边界上的节点. 假设连接边界上有 N 个节点, 把 b_p^n 展开成 N 个标准正交向量的线性组合

$$b_p^n = \sum_{v=1}^N b_{pv}^n \alpha_v, \quad \alpha_v = [0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T, \quad (3)$$

α_v 中的元素 1 对应着连接边界上的一个节点. 则方程(2)可写成

$$\mathbf{A}_p \phi_p^{n+1} = \sum_{v=1}^N b_{pv}^n \alpha_v. \quad (4)$$

首先计算出 N 个基本解向量 ϕ_{pv} , 它们与迭代没有关系:

$$\mathbf{A}_p \phi_{pv} = \alpha_v, \quad v = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

从 ϕ_{pv} 中提取出仅包含连接节点的子向量, 得到部分基础解向量 $x_{pv}, v = 1, 2, \dots, N$. 根据线性叠加原理, 从方程(2), (3), (5)得到连接边界上的场值

$$x_p^{n+1} = \sum_{v=1}^N b_{pv}^n x_{pv}, \quad (6)$$

这样就不必再解方程(2), 只需对上式做循环迭代直到收敛, 即可求出连接边界上的场值.

然而, 对于电大问题, 常用的外向波吸收方法会导致连接边界上出现较多节点, 需要多次求解方程(5), 而且基本解向量占用的存储量也变得相当大, 为此笔者引入了无限元方法.

2 无限元方法

对于图 1 的散射问题, 将每个子区域分成有限元区 Ω_{FEM} 和无限元区 Ω_{IEM} 两部分, 如图 2 所示. 在有限元区采用传统有限元方法^[4], 在无限元区采用 6 节点无限单元^[5,6].

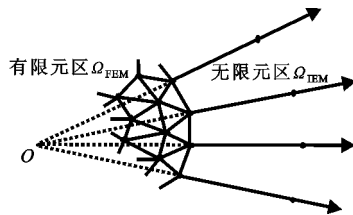


图 2 子区域网格划分示意图

2.1 映射函数

将无限单元映射到正方形母单元, 如图 3 所示(不含无限远处的节点), ξ 和 η 分别表示沿径向和环向的局部坐标. 映射关系为

$$r(\xi, \eta) = \frac{2r_0(\eta)}{1-\xi}, \quad r_0(\eta) = \frac{1-\eta}{2} r_1 + \frac{1+\eta}{2} r_4, \quad (7)$$

其中 r_1 和 r_4 分别是无限单元的节点 1 和节点 4 的极径. 当 $\xi = 1$ 时, 局部坐标 (ξ, η) 被映射到无限远处.

2.2 插值函数

类似于有限元, 无限单元中的场可表示为

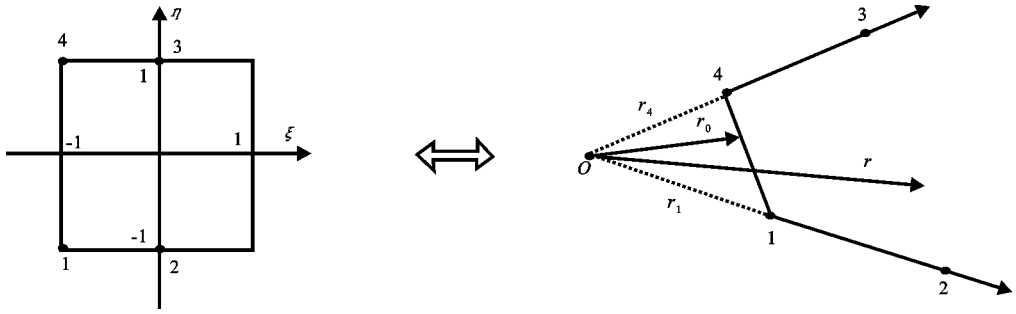


图 3 无限单元与其正方形母单元的映射关系示意图

$$\phi = \sum_{i=1}^4 N_i \phi_i = [N_1, N_2, N_3, N_4] [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4]^T = \mathbf{N}^T \phi^e, \quad (8)$$

其中 i 是节点编号; N_i 是插值函数; ϕ_i 是待求的场值; \mathbf{N} 和 ϕ^e 分别是插值函数列向量和节点场值列向量。

N_i 应与有限元插值函数保持协调,且在无限远处满足 Sommerfeld 条件,通常取^[5]

$$N_i(\xi, \eta) = P_i(\xi, \eta) (r(\xi, \eta)/r_0(\eta))^{1/2} \exp(-j k(r(\xi, \eta) - r_0(\eta))) \quad (9)$$

其中 $P_i(\xi, \eta)$ 是有限元插值函数^[4],它与因子 $(r(\xi, \eta)/r_0(\eta))^{1/2}$ 反映了在无限远处散射场幅度按 $(r(\xi, \eta))^{-1/2}$ 衰减的规律;指数项 $\exp(-j k(r(\xi, \eta) - r_0(\eta)))$ 则刻画了场的波动性。当 $\xi = -1$ 时, $N_i(\xi, \eta) = P_i(\xi, \eta)$,无限元插值函数退化为有限元插值函数,满足了协调性要求。

2.3 权函数

无限元的权函数常取为插值函数的共轭函数^[5],虽然这样可消去指数项,但必须在无穷大表面上积分,其中会出现奇异项^[6]。为此,笔者采用如下权函数,既剔除了奇异性,又不需要计算无穷大表面的积分。

$$W_i = P_i(\xi, \eta) (r_0(\eta)/r(\xi, \eta))^{3/2} \exp(j k(r(\xi, \eta) - r_0(\eta))) \quad (10)$$

根据 Petrov-Galerkin 方法^[5,6],一个无限单元上的加权积分为

$$\left(- \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla \mathbf{W} \cdot \nabla \mathbf{N}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{J}^{-1} |\mathbf{J}| d\xi d\eta + k^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{W} \mathbf{N}^T |\mathbf{J}| d\xi d\eta \right) \phi^e \quad (11)$$

其中 \mathbf{W} 是由权函数组成的列向量; \mathbf{J} 是雅可比矩阵,由公式(7)构造。可看出,上式比有限单元的加权积分只多出一个 2×2 的 \mathbf{J} 矩阵,因此不会明显增加计算量。

从公式(9)可看出,与有限元相比,无限元能更加准确地描述散射场的传播特征,研究表明^[5,7],只需把无限元网格划分在距离散射体表面 $1/6$ 波长之外,就可获得较为满意的远区场计算精度。

3 数值算例

算例 1 电大目标的电磁散射。为了验证上述方法的计算效率和精度,分别采用矩量法(MOM),PBSV-DDM 和 IEM-PBSV-DDM 计算了 TM 波 $E^{\text{inc}} = \exp(-j k_0 x)$ 照射下边长为 10λ 的理想导体正三棱柱的雷达散射截面(RCS)。对于 PBSV-DDM,在离开柱体表面 2λ 处采用二阶吸收边界;对于 IEM-PBSV-DDM,距离柱体表面 0.25λ 以内采用有限元网格,其外面采用 6 节点无限单元。采用相同的子区域划分方式,都沿周向分成 3 个子区域。按网格步长分两种情况:第 1 种情况,每波长划分 40 个网格;第 2 种情况,每波长划分 20 个网格。为方便标注起见,将这 4 种情况分别记为 PBSV1, PBSV2 和 IEM1, IEM2。

图 4(a)是 MOM, PBSV1 和 IEM1 的计算结果,可看出 PBSV1 与 IEM1 的计算结果都和 MOM 吻合得很好,尤其是 IEM1,虽然它的网格数量不到 PBSV1 的 10%,但相比之下,它与 MOM 吻合得更好。

图 4(b)则是 MOM, PBSV2 和 IEM2 的计算结果,此时 IEM2 与 MOM 仍然吻合得很好,而 PBSV2 则有明显的误差。从图 4(a), (b)还可看出 IEM1 和 IEM2 的计算结果没有明显区别,然而 IEM2 的未知数只有 IEM1 的 30%,这提示 IEM-PBSV-DDM 可以取更大的网格步长,有利于降低存储量和计算量。

表 1 对比了 PBSV-DDM 和 IEM-PBSV-DDM 的计算量和存储量。从图 4 和表 1 可知道: IEM-PBSV-

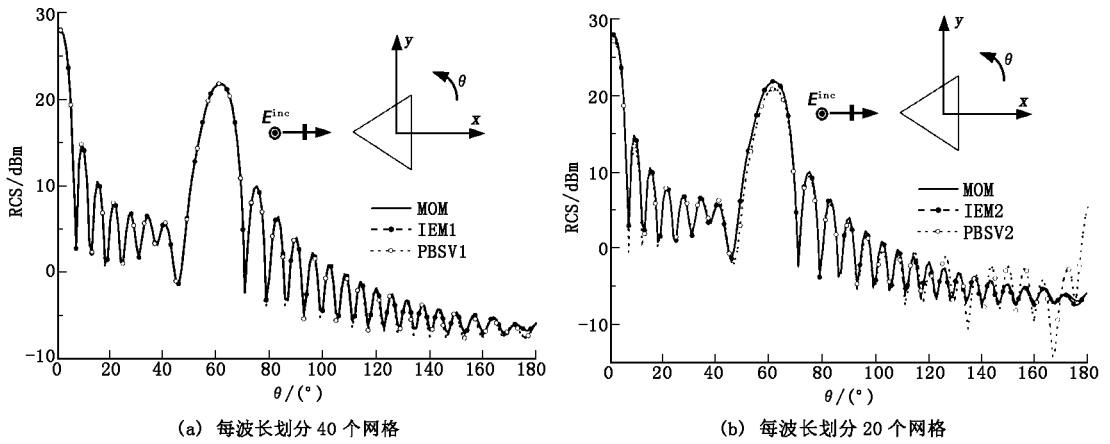


图 4 理想导体三棱柱的雷达散射截面

DDM 的计算效率更高、存储量更低、计算精度也更好。

表 1 PBSV-DDM 和 IEM-PBSV-DDM 的对比 (在一个子区域上)

	未知数个数	矩阵非零元素个数	矩阵求解次数	基本解向量规模	迭代次数
PBSV1	31 166	297 997	176	176×176	821
PBSV2	7 231	88 062	92	92×92	573
IEM1	2 717	14 158	22	22×22	52
IEM2	852	6 322	12	10×10	29

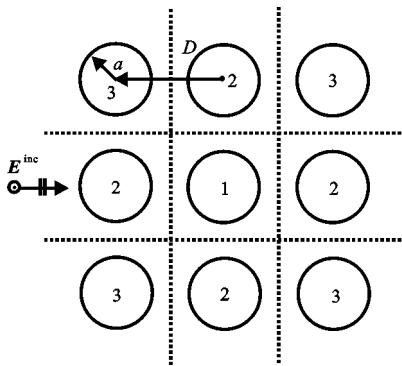


图 5 有限周期理想导体柱阵列示意图

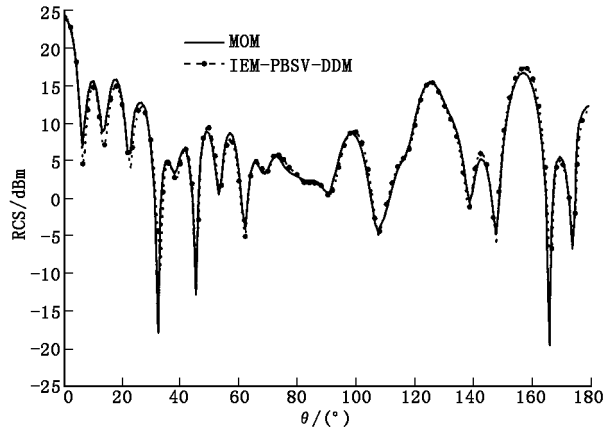


图 6 3×3 理想导体柱阵列的雷达散射截面

算例 2 有限周期结构的电磁散射. 图 5 是一组有限周期的理想导体柱阵列, 很适合采用区域分解算法求解. 观察图 5 可发现, 无论这个阵列有多大, 都可归纳为如图 5 中的标号所示的 3 种情况, 因此, 只需要处理 3 个系数矩阵, 计算 3 组部分基本解向量, 很明显, 效率是非常高的. 假设柱体为圆柱, 半径 $a = \lambda$, 圆心距 $d = 2.5\lambda$, 分别采用矩量法和 IEM-PBSV-DDM 计算了 TM 波 $E^{inc} = \exp(-j k_0 x)$ 照射下 3×3 阵列的 RCS, 计算结果如图 6 所示. 可看出, IEM-PBSV-DDM 的计算精度是很高的.

4 结束语

针对电大尺寸柱体散射问题, 提出了无限元-部分基础解向量的区域分解算法. 通过将无限元引入区域分解算法, 不仅减少了连接边界上的节点数以及计算量和存储量, 而且提高了雷达散射截面的计算精度.

参考文献:

- [1] Despres B. Domain Decomposition Method and the Helmholtz Problem[A]. Proc Int Symp Mathemat Numerical Aspects Wave Propagation Phenomena[C]. Strasbourg: SIAM, 1992. 44-52.
- [2] Hong Wei, Yin Xiaoxing, An Xiang, et al. A Mixed Algorithm of Domain Decomposition Method and the Measured Equation of Invariance for the Electromagnetic Problems[A]. IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium[C]. Monterey: IEEE Press, 2004. 2 255-2 258.
- [3] An Xiang, Lü Zhiqing, Hong Wei, et al. The Application of PBSV-DDM in EM Scattering Analysis of Electrically Large 2-D Objects[J]. Journal of Applied Sciences, 2005, 23(2): 122-125.
- [4] 金建铭. 电磁场有限元方法[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,1997.
- [5] Towers M S, McCown A, Macnab J A R. Electromagnetic Scattering from an Arbitrary Inhomogeneous 2-D Objects—a Finite Element and Infinite Element Solution[J]. IEEE Trans on Antennas and Propagat, 1993, 41(6): 770-777.
- [6] Astley R J, Coyette J P, Macaulay G J. Mapped Wave Enveloped Elements for Acoustical Radiation and Scattering[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 170(1): 97-118.
- [7] Byun J K, Jin J M. A Comparative Study of Infinite Elements for Two Dimensional Electromagnetic Scattering Analysis [J]. Electromagnetics, 2004, 24(2): 219-236.

(编辑: 郭 华)

(上接第 410 页)

息,机动测量站实时测得的机动目标的方位、高低角度信息以及机动目标在红外探测器上的成像信息等.其特点是有效发挥了红外成像与跟踪系统的特长,成功克服了目标航向角的变化对目标成像的影响,便于实时实现.机动目标的信息如速度、加速度、运动方向等都蕴含在机动目标的方位信息和成像信息中,因而这种算法适用于目标与测量站相对之间诸如匀速直线运动、匀加速运动和变加速运动等各种运动模型.

4 结 论

根据大量的对定位算法的计算机仿真实验结果,可得到这样的结论:基于机动测量平台的对机动目标进行红外单站被动定位的数学模型客观反映了机动测量平台与机动目标之间复杂相对运动的实际情况.采用目标在运动方向上的成像线度信息并纳入机动目标航向角的变化信息而推导出的定位算法,有效地克服了目标自身姿态变化以及因机动测量平台与机动目标之间相对运动引起的目标伪姿态变化对测距精度造成的不良影响,客观反映了机动测量平台与机动目标之间复杂相对运动的各种实际状况,能有效适应机动测量平台与机动目标分别进行匀速、匀加速以及变加速等各种复杂运动情况的定位.在满足目标图像参数和角度参数测量精度范围内,距离定位相对误差小于等于 5%斜距,能够满足对机动目标红外单站被动定位的技术指标要求.

参考文献:

- [1] Reilly J P, Youkins L T, Taylor R J. Infrared Passive Ranging Using Sea Background for Accurate Sensor Registration [A]. Proc SPIE: 2 469[C]. Bellingham:Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 1995. 319-329.
- [2] Reilly J P, Klein T, Ilver H. Design and Demonstration of an Infrared Passive Ranging[J]. John Hopkings APL Technical Digest, 1990, 20(2): 1 845-1 859.
- [3] 谢邦荣. 机载红外被动定位方法研究[J]. 红外技术,2001,23(5): 1-3.
- [4] Xin Yunhong, Yang Wanhai. Pseudo-linear Kalman Filter Based Passive Location and Tracking Techniques by Two Infrared Station[J]. Journal of Xidian University, 2004, 31(4): 505-508.
- [5] 钱铮铁. 一种用于红外警戒系统的被动测距方法[J]. 红外与毫米波学报,2001, 20(4): 311-314.
- [6] 程兵旺. 机动多目标红外无源单站被动定位新技术研究[D]. 西安:西安电子科技大学,1998.
- [7] 肖 . 红外无源单站定位技术[D]. 西安:西安电子科技大学,2000.
- [8] 殷世民,付小宁,刘上乾. 红外单站被动定位技术速度更新算法研究[J]. 光子学报,2003, 32(3): 298-300.
- [9] 殷世民,付小宁,刘上乾. 对固定平台红外单站被动定位技术研究[J]. 光子学报,2004, 33(2): 237-239.

(编辑: 郭 华)