

郑 伟,许厚泽,钟 敏等. 基于半解析法有效和快速估计 GRACE 全球重力场的精度. 地球物理学报, 2008, **51**(6):1704~1710
Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Efficient and rapid estimation of the accuracy of GRACE global gravitational field using the semi-analytical method. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2008, **51**(6):1704~1710

基于半解析法有效和快速估计 GRACE 全球重力场的精度

郑 伟^{1,2}, 许厚泽¹, 钟 敏¹, 员美娟³, 周旭华¹, 彭碧波¹

1 中国科学院测量与地球物理研究所, 武汉 430077

2 日本京都大学防灾研究所, 京都 611-0011

3 武汉科技大学应用物理系, 武汉 430081

摘 要 首先基于半解析法建立了新的 GRACE 卫星 K 波段测量系统星间测速、GPS 接收机轨道位置和加速度计非保守力误差联合影响累计大地水准面的误差模型;其次,基于各关键载荷精度指标的匹配关系,论证了误差模型的可靠性;最后,基于美国喷气动力实验室(JPL)公布的 2006 年的 GRACE Level 1B 实测误差数据,有效和快速地估计了 120 阶全球重力场的精度,在 120 阶处累计大地水准面的精度为 18.368 cm,其结果和德国地学研究中心(GFZ)公布的 EIGEN-GRACE02S 全球重力场模型符合较好. 本文的研究为将来国际卫星重力测量计划(如 GRACE Follow-On, 360 阶)中高阶全球重力场模型精度的有效和快速估计提供了理论基础和计算保证.

关键词 GRACE, 半解析法, 联合误差模型, 全球重力场

文章编号 0001-5733(2008)06-1704-07

中图分类号 P223

收稿日期 2007-12-21, 2008-07-13 收修定稿

Efficient and rapid estimation of the accuracy of GRACE global gravitational field using the semi-analytical method

ZHENG Wei^{1,2}, HSU Houtse¹, ZHONG Min¹, YUN Mei-Juan³,
ZHOU Xu-Hua¹, PENG Bi-Bo¹

1 *Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430077, China*

2 *Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, Uji, Kyoto 611-0011, Japan*

3 *Department of Applied Physics, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China*

Abstract In this paper, firstly, the new combined error model of cumulative geoid height influenced by three error sources including the inter-satellite range-rate of K-band ranging system, orbital position of GPS receiver and non-conservative force of accelerometer from GRACE satellites is established using the semi-analytical method. Secondly, the dependability of error models is demonstrated based on matching relationship among the accuracy indexes of key payloads. Finally, the accuracy of global gravitational field up to degree and order 120 is effectively and rapidly estimated from GRACE Level 1B measured observation errors of the year 2006 publicized by the Jet Propulsion Laboratory (JPL) in the USA, and the cumulative geoid height error is 18.368 cm at degree 120, which preferably accords with the Earth's gravitational field model EIGEN-GRACE02S provided by the GeoForschungsZentrum Potsdam (GFZ) in

基金项目 中国科学院知识创新计划(KZCX2-YW-202), 国家"863"计划(2006AA09Z153)和国家自然科学基金(40674038, 40674013)项目资助.

作者简介 郑 伟, 男, 1977 年生, 理学博士, 日本京都大学博士后, 日本 JSPS Project Fellowship 外籍特别研究员, 主要从事基于卫星重力测量恢复地球、月球重力场的理论和方法等方面的研究. E-mail: wzheng@asch.whigg.ac.cn

Germany. This work can provide theoretical foundation and calculational guarantee for the efficient and rapid estimation of the accuracy of high-degree global gravitational field model in the future international satellite gravity measurement mission (e. g. GRACE Follow-On, degree 360).

Keywords GRACE, Semi-analytical method, Combined error model, Global gravitational field

1 引 言

21 世纪是人类利用 SST-HL/LL (Satellite-to-Satellite Tracking in the High-Low/Low-Low Mode) 和 SGG (Satellite Gravity Gradiometry) 提升对数字地球认知能力的新纪元. 地球重力场及其时变反映地球表层及内部物质的空间分布、运动和变化, 同时决定着大地水准面的起伏和变化^[1~4]. 因此, 确定地球重力场的精细结构及其时变不仅是大地测量学、地球物理学、地震学、海洋学、空间科学、国防建设等的需求, 同时也将为全人类寻求资源、保护环境和预测灾害提供重要的信息资源^[5~8].

GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) 双星 (如表 1 所示) 采用近圆和近极地轨道设计, 由美国宇航局 (NASA) 和德国航天局 (DLR) 共同研制开发^[9]. GRACE 利用 K 波段测量系统高精度测量星间速度, 利用高轨 GPS (Global Positioning System) 卫星对低轨双星精密跟踪定位, 利用高精度 SuperSTAR 加速度计测量作用于双星的非保守力. GRACE 系统既包含两组 SST-HL, 同时以差分原理测定两个低轨卫星之间的相互运动, 因此它得到的静态和动态全球重力场的精度比 CHAMP (Challenging Minisatellite Payload) 至少高一个数量级, 同时为将来 GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer) 卫星重力梯度测量奠定了坚实的基础.

表 1 GRACE 双星计划参数

Table 1 Parameters of GRACE twin satellites mission

参 数	指 标
发射时间	2002-03-17
卫星寿命	5~10 年
轨道高度	500 ~ 300 km
轨道倾角	89°
轨道离心率	<0.004
星间距离	220±50 km
跟踪模式	SST-HL/LL
空间分辨率	166 km

早在 20 世纪 60 年代, Baker^[10] 首次提出了利用 SST 恢复地球重力场的重要思想. 自此以后, 国际大地测量学界的许多学者都积极投身于地球重力场恢复的方法与算法的理论研究和数值计算之中. 在众多方法中, 按照卫星观测方程建立和求解的不同可分为解析法和数值法. 解析法^[11~14] 是指通过分析地球重力场和卫星观测数据的关系建立卫星观测方程模型, 进而估计地球重力场的精度. 解析法的优点是卫星观测方程物理含义明确, 易于误差分析且可快速求解高阶地球重力场; 缺点是由于在建立卫星观测方程模型时作了不同程度的近似, 因此求解精度较低. 数值法^[15~26] 是指通过分析地球引力位系数和卫星观测数据的关系建立卫星观测方程, 并通过最小二乘法拟合出地球引力位系数. 数值法的优点是地球重力场求解精度较高; 缺点是求解速度较慢且对计算机要求较高. 为了有效综合解析法和数值法的优点, 国际大地测量学界提出了基于半解析法恢复地球重力场的思想. 目前, Jekeli and Rapp^[27]、Kim^[28]、Sneeuw^[29]、Loomis^[30] 等学者在基于半解析法恢复地球重力场方面做出了杰出的贡献. 不同于前人的研究, 我们首次基于半解析法建立了星间测速、轨道位置和非保守力误差联合影响累计大地水准面的误差模型, 基于关键载荷精度指标的匹配关系论证了误差模型的可靠性, 基于美国喷气动力实验室 (JPL) 公布的 2006 年的 GRACE Level 1B 实测误差数据, 有效和快速地估计了 120 阶 GRACE 全球重力场的精度.

2 方 法

2.1 K 波段测量系统星间测速误差模型

基于能量守恒定律, 卫星观测方程可表示为

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 = V + C, \quad (1)$$

其中, $\dot{r} = \dot{r}_0 + \Delta \dot{r}$ 表示卫星的瞬时速度, $\dot{r}_0 = \sqrt{GM/r}$ 表示卫星的平均速度, GM 表示地球质量 M 和万有引力常数 G 之积, r 表示由卫星质心到地心之间的距离, $\Delta \dot{r}$ 表示由扰动位引起的速度变化; $V = V_0 + T$ 表示地球引力位, V_0 表示中心引力位, T

表示扰动位; C 表示能量积分常数. 公式(1)可变形为

$$\frac{1}{2}(\dot{r}_0 + \Delta\dot{r})^2 = V_0 + T + C. \quad (2)$$

由于忽略二阶小量 $(\Delta\dot{r})^2$ (近似程度约 10^{-10}) 且

$$\frac{1}{2}\dot{r}_0^2 = V_0 + C, \text{ 公式(2)可变形为}$$

$$T = \dot{r}_0 \Delta\dot{r}. \quad (3)$$

扰动位方差和速度变化方差的关系如下:

$$\sigma^2(\delta T) = \dot{r}_0^2 \sigma^2(\delta\dot{r}). \quad (4)$$

如图 1 所示, $O_I - X_I Y_I Z_I$ 表示地心惯性系; θ 表示地心角, $\theta = 2^\circ$; $\dot{\rho}_{12}$ 表示 K 波段测量系统星间测

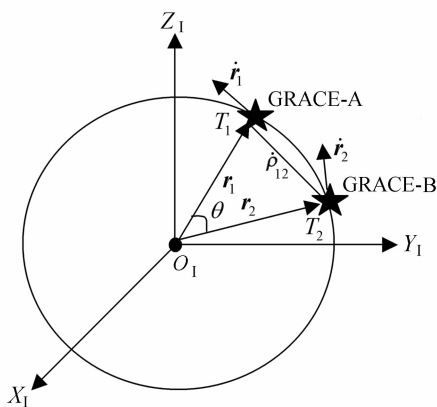


图 1 GRACE 双星在轨飞行示意图

Fig. 1 In-orbit flight of GRACE satellites

速, $\dot{\rho}_{12} \approx \Delta\dot{r}_2 - \Delta\dot{r}_1$. 星间测速的方差表示如下:

$$\sigma^2(\delta\dot{\rho}_{12}) \approx 2[\sigma^2(\delta\dot{r}) - \text{cov}(\Delta\dot{r}_1, \Delta\dot{r}_2)], \quad (5)$$

其中, $\text{cov}(\Delta\dot{r}_1, \Delta\dot{r}_2)$ 表示协方差函数, $\text{cov}(\Delta\dot{r}_1, \Delta\dot{r}_2)$

$$= \sum_{l=2}^L \sigma_l^2(\delta\dot{r}) P_l(\cos\theta)^{[26]}, P_l(\cos\theta) \text{ 表示 Legendre 函}$$

数, l 表示阶数. 公式(5)可变形为

$$\sigma_l^2(\delta\dot{\rho}_{12}) \approx 2\sigma_l^2(\delta\dot{r})[1 - P_l(\cos\theta)]. \quad (6)$$

地球扰动位 $T(r, \phi, \lambda)$ 表示如下:

$$T(r, \phi, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{l=2}^L \sum_{m=0}^l \left[\left(\frac{R_e}{r}\right)^l (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda) \bar{P}_{lm}(\sin\phi) \right], \quad (7)$$

其中, ϕ 表示地心纬度, λ 表示地心经度; R_e 表示地球的平均半径; $\bar{P}_{lm}(\sin\phi)$ 表示规格化的 Legendre 函数, m 表示次数; C_{lm}, S_{lm} 表示待求的规格化引力位系数.

地球扰动位的方差表示如下:

$$\sigma_l^2(\delta T) = \sum_{m=0}^l \left[\frac{1}{4\pi} \iint \delta T(r, \phi, \lambda) \bar{Y}_{lm}(\phi, \lambda) \cos\phi d\phi d\lambda \right]^2, \quad (8)$$

其中, $\bar{Y}_{lm}(\phi, \lambda) = \bar{P}_{l|m|}(\sin\phi) Q_m(\lambda)$,

$$Q_m(\lambda) = \begin{cases} \cos m\lambda & m \geq 0 \\ \sin |m|\lambda & m < 0 \end{cases}.$$

基于球谐函数的正交性, 公式(8)可化简为

$$\sigma_l^2(\delta T) = \left(\frac{GM}{R_e}\right)^2 \left(\frac{R_e}{r}\right)^{2l+2} \sum_{m=0}^l (\delta C_{lm}^2 + \delta S_{lm}^2). \quad (9)$$

大地水准面高的方差为

$$\sigma_l^2(\delta N_{\rho_{12}}) = R_e^2 \sum_{m=0}^l (\delta C_{lm}^2 + \delta S_{lm}^2). \quad (10)$$

联合公式(9)和(10), 可得 $\sigma_l^2(\delta N_{\rho_{12}})$ 和 $\sigma_l^2(\delta T)$ 的关系式:

$$\sigma_l^2(\delta N_{\rho_{12}}) = R_e^2 \left(\frac{R_e}{GM}\right)^2 \left(\frac{r}{R_e}\right)^{2l+2} \sigma_l^2(\delta T). \quad (11)$$

联合公式(4)、(6)和(11), 可得累计大地水准面误差和星间测速误差之间的关系式:

$$\delta N_{\rho_{12}} = R_e \times \sqrt{\sum_{l=2}^L \left\{ \frac{1}{2[1 - P_l(\cos\theta)]} \frac{R_e}{GM} \left(\frac{r}{R_e}\right)^{2l+1} \sigma_l^2(\delta\dot{\rho}_{12}) \right\}}. \quad (12)$$

2.2 GPS 接收机轨道位置误差模型

如图 1 所示, 卫星向心加速度 \ddot{r} 和瞬时速度 \dot{r} 的关系式表示为

$$\ddot{r} = \frac{\dot{r}^2}{r}, \quad (13)$$

其中, $\ddot{r} = \ddot{r}_{\rho_{12}} / \sin(\theta/2)$, $\dot{r} = \dot{r}_{\rho_{12}} / \cos(\theta/2)$, $\ddot{r}_{\rho_{12}}$ 和 $\dot{r}_{\rho_{12}}$ 分别表示 \ddot{r} 和 \dot{r} 在图中星星间连线方向的投影. 公式(13)可变形为

$$\ddot{r}_{\rho_{12}} = \frac{\tan(\theta/2)}{r \cos(\theta/2)} \dot{r}_{\rho_{12}}^2. \quad (14)$$

在公式(14)两边同时微分可得

$$d\ddot{r}_{\rho_{12}} = \frac{2\dot{r}_{\rho_{12}} \tan(\theta/2)}{r} d\dot{r}_{\rho_{12}}. \quad (15)$$

由于 $\dot{r} = \dot{r}_0 + \Delta\dot{r}$ 且忽略二阶小量 $\Delta\dot{r} d\dot{r}_{\rho_{12}}$ (近似程度约 10^{-10}), 在公式(15)两边同乘时间 t 可得

$$d\dot{r}_{\rho_{12}} = \sqrt{\frac{4GM \tan^2(\theta/2)}{r^3}} dr_{\rho_{12}}. \quad (16)$$

基于公式(16), 星间测速误差 $\delta\dot{\rho}_{12}$ 和轨道位置误差 δr 的关系表示为

$$\delta\dot{\rho}_{12} = \sqrt{\frac{4GM \tan^2(\theta/2)}{r^3}} \delta r. \quad (17)$$

将公式(17)代入(12)可得累计大地水准面误差和轨道位置误差之间的关系式:

$$\delta N_r = R_e \sqrt{\sum_{l=2}^L \left\{ \frac{1}{2[1 - P_l(\cos\theta)]} \frac{R_e}{GM} \left(\frac{r}{R_e}\right)^{2l+1} \sigma_l^2 \left(\sqrt{\frac{4GM \tan^2(\theta/2)}{r^3}} \delta r \right) \right\}}. \quad (18)$$

2.3 加速度计非保守力误差模型

由于 GRACE 双星受到的主要非保守力和星间测速近似同向,且非保守力通常表现为累积误差特性,据平方误差积分准则,星间测速误差 $\delta\dot{\rho}_{12}$ 和非保

守力误差 δf 的关系表示为

$$\delta\dot{\rho}_{12} = \sqrt{\int (\delta f)^2 dt}. \quad (19)$$

将公式(19)代入(12)可得累计大地水准面误差和非保守力误差之间的关系式:

$$\delta N_f = R_e \sqrt{\sum_{l=2}^L \left\{ \frac{1}{2[1 - P_l(\cos\theta)]} \frac{R_e}{GM} \left(\frac{r}{R_e}\right)^{2l+1} \sigma_l^2 \left(\sqrt{\int (\delta f)^2 dt} \right) \right\}}. \quad (20)$$

2.4 关键载荷联合误差模型

联合公式(12)、(18)和(20)可得星间测速、轨道位置和非保守力误差联合影响累计大地水准面的误差模型:

$$\delta N_c = R_e \sqrt{\sum_{l=2}^L \left\{ \frac{1}{2[1 - P_l(\cos\theta)]} \frac{R_e}{GM} \left(\frac{r}{R_e}\right)^{2l+1} \sigma_l^2 (\delta\eta) \right\}}, \quad (21)$$

其中, $\delta\eta = \sqrt{\sigma_l^2 (\delta\dot{\rho}_{12}) + \sigma_l^2 \left(\sqrt{\frac{4GM \tan^2(\theta/2)}{r^3}} \delta r \right) + \sigma_l^2 \left(\sqrt{\int (\delta f)^2 dt} \right)}$.

基于半解析法,利用 2006 年的 GRACE Level 1B 实测误差 $\delta\dot{\rho}_{12}$, δr 和 δf 估计累计大地水准面误差的过程如下:

第一,首先以 $1^\circ \times 1^\circ$ 为网格分辨率,在地球表面的经度($0^\circ \sim 360^\circ$)和纬度($-90^\circ \sim 90^\circ$)范围内绘制网格;其次,按照 GRACE 卫星轨道(如图 2 所示)在地球表面的轨迹点位置依次加入 $\delta\eta$;最后,如图 3 所示,将分布于地球表面的 $\delta\eta$ 平均归算于划分的网格点 $\delta\eta(\phi, \lambda)$ 处,其中横坐标和纵坐标分别表示经度和纬度,颜色表示平均归算于网格点处的误差值 $\delta\eta(\phi, \lambda)$ 的大小。

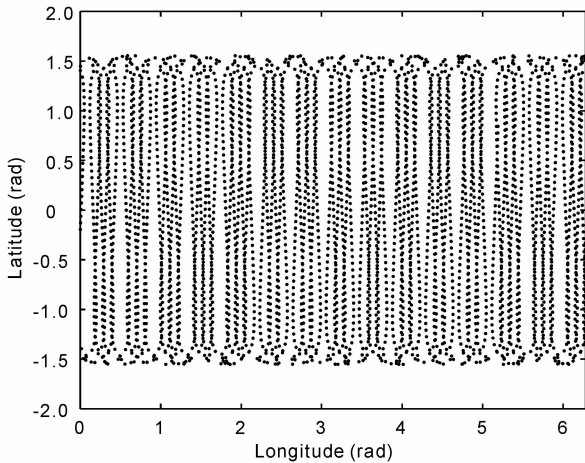


图 2 GRACE-A 卫星 3 天的轨道图

Fig. 2 Orbit of GRACE-A satellite for 3 d

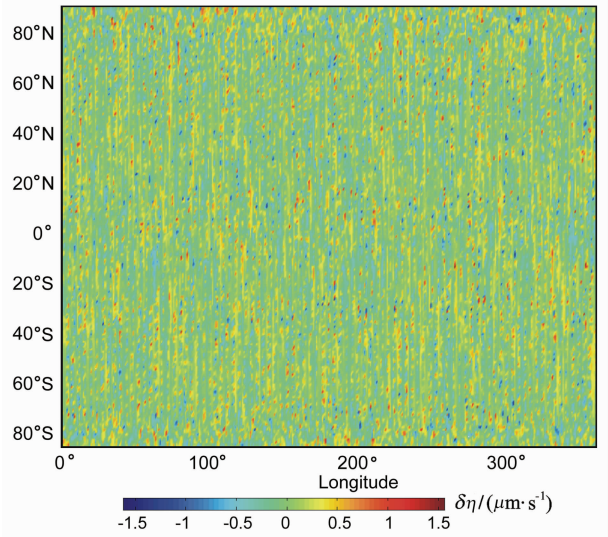


图 3 GRACE 卫星 $\delta\eta$ 在地表的分布

Fig. 3 Distribution of $\delta\eta$ on Earth's surface from GRACE

第二,将 $\delta\eta(\phi, \lambda)$ 按球谐函数展开为

$$\delta\eta(\phi, \lambda) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^l [(C_{\delta\eta_{lm}} \cos m\lambda + S_{\delta\eta_{lm}} \sin m\lambda) \bar{P}_{lm}(\sin\phi)], \quad (22)$$

其中, $C_{\delta\eta_{lm}}, S_{\delta\eta_{lm}}$ 表示 $\delta\eta(\phi, \lambda)$ 按球谐函数展开的系数,

$$(C_{\delta\eta_{lm}}, S_{\delta\eta_{lm}}) = \frac{1}{4\pi\omega} \iint [\delta\eta(\phi, \lambda) \bar{Y}_{lm}(\phi, \lambda) \cos\phi d\phi d\lambda]. \quad (23)$$

$\delta\eta$ 在各阶处的方差表示为

$$\sigma_l^2(\delta\eta) = \sum_{m=0}^l (C_{\delta\eta_{lm}}^2 + S_{\delta\eta_{lm}}^2). \quad (24)$$

将公式(24)代入(21),可有效和快速地估计全球重力场的精度.

3 结果

如图 4 所示,实线、圆圈线和虚线分别表示单独引入 K 波段测量系统星间测速误差 1×10^{-6} m/s、GPS 接收机轨道位置误差 3×10^{-2} m 和加速度计非保守力误差 3×10^{-10} m/s² 估计累计大地水准面的精度. 基于 GRACE 各关键载荷精度指标的匹配关系,据图中三条曲线在各阶处的符合性可验证本文基于半解析法建立的误差模型是可靠的.

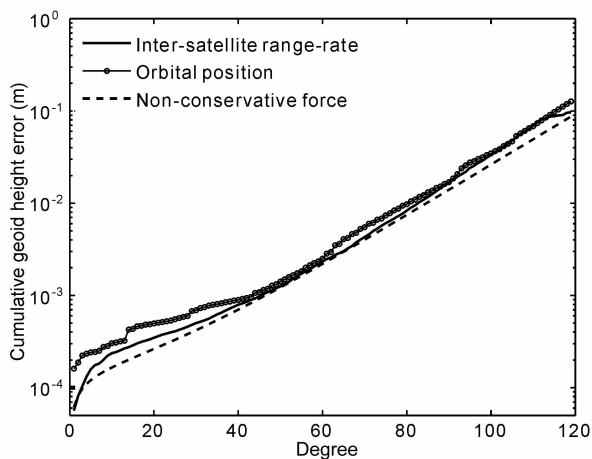


图 4 基于 GRACE 各关键载荷实测误差值估计累计大地水准面精度对比

Fig. 4 A comparison of cumulative geoid height errors based on the measured observation errors of GRACE key payloads

如图 5 所示,虚线表示德国 GFZ 公布的 120 阶 EIGEN-GRACE02S 全球重力场模型的实测精度,在 120 阶处恢复累计大地水准面精度为 18.938 cm;实线表示基于联合误差模型估计累计大地水准面的精度,在 120 阶处累计大地水准面精度为 18.368 cm. 基于半解析法估计 GRACE 累计大地水准面精度的统计结果如表 2 所示. 通过两条曲线在各阶处的符合性可知,半解析模拟法是恢复高精度和高空间解析度全球重力场的有效方法之一.

表 2 累计大地水准面误差统计结果

Table 2 The statistics of cumulative geoid height error

模型	误差 (10^{-2} m)				
	20 阶	50 阶	80 阶	100 阶	120 阶
EIGEN-GRACE02S	0.076	0.228	1.566	5.756	18.938
GRACE-KGA	0.065	0.213	1.403	5.186	18.368

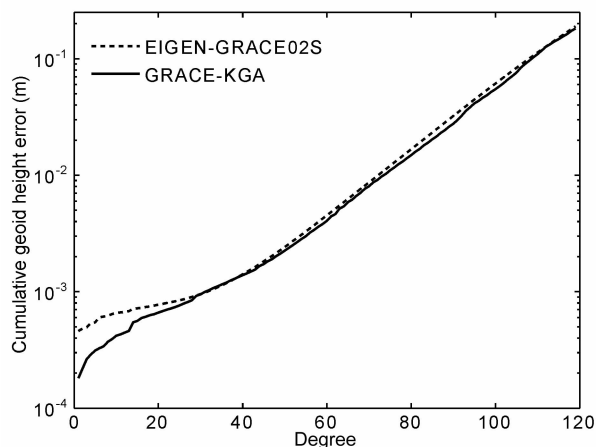


图 5 基于半解析法估计累计大地水准面精度

Fig. 5 Cumulative geoid height error based on the semi-analytical method

4 结语

目前国际众多科研机构通过联合地面、海洋、空间等多种观测技术已获得了全球的、规则的、密集的和高精度的地球重力场信息,因此全球重力场解算方法的优劣是决定人类对“数字地球”认识水平的关键所在. 众多全球重力场研究的新方法和理论的相继提出推动了国际卫星重力测量的发展进程,但在某种程度上受到了当时计算机性能水平的制约. 因此,寻求不依赖于计算机发展技术的有效和快速算法是解算将来高阶全球重力场和促进国际卫星重力测量快速发展的根本途径. 当前国际上利用卫星重力测量数据解算全球重力场的众多方法中,轨道动力学法和能量守恒法较为盛行. 但由于轨道动力学法和能量守恒法自身的固有局限性,无论是两种方法单独还是联合均无法满足将来国际卫星重力测量计划中精确和快速解算中高频全球重力场的需求. 因此,若想进一步提升人类对赖以生存地球的认知能力,必须寻求新的、有效的和快速的全球重力场解算方法.

本文开展了有效和快速解算 GRACE 高精度和高空间解析度全球重力场新方法的探索性研究,具体结论如下:

- (1)首次基于半解析法建立了 GRACE 卫星各关键载荷误差影响累计大地水准面的联合误差模型;
- (2)基于各关键载荷精度指标的匹配关系,论证了误差模型的可靠性;
- (3)在 120 阶处,估计 GRACE 累计大地水准面

的精度为 18.368 cm,并通过其结果和国际全球重力场模型 EIGEN-GRACE02S 的符合性充分验证了半解析法的有效性。

致 谢 感谢美国宇航局(NASA)、美国喷气动力实验室(JPL)、德国航天局(DLR)和德国波茨坦地学研究中心(GFZ)提供了 GRACE 双星的实测数据。感谢华中科技大学物理学院罗俊教授和日本京都大学防灾研究所徐培亮博士对本文的帮助。

参考文献(References)

- [1] 许厚泽. 卫星重力研究: 21 世纪大地测量研究的新热点. 测绘科学, 2001, **26**(3): 1~3
Xu H Z. Satellite gravity missions-new hotspot in geodesy. *Science of Surveying and Mapping* (in Chinese), 2001, **26**(3): 1~3
- [2] 宁津生. 卫星重力探测技术与地球重力场研究. 大地测量与地球动力学, 2002, **22**(1): 1~5
Ning J S. The satellite gravity surveying technology and research of Earth's gravity field. *Journal of Geodesy and Geodynamics* (in Chinese), 2002, **22**(1): 1~5
- [3] Cazenave A, Nerem R S. Redistributing Earth's mass. *Science*, 2002, **297**(5582): 783~784
- [4] 李 斐, 岳建利, 张利明. 应用 GPS/重力数据确定(似)大地水准面. 地球物理学报, 2005, **48**(2): 294~298
Li F, Yue J L, Zhang L M. Determination of geoid by GPS/Gravity data. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2005, **48**(2): 294~298
- [5] Simons M, Hager B H. Localization of the gravity field and the signature of glacial rebound. *Nature*, 1997, **390**(6659): 500~504
- [6] Zhong M, Naito I, Kitoh A. Atmospheric, hydrological and ocean current contributions to Earth's annual wobble and length-of-day signals based on output from a climate model. *Journal of Geophysical Research*, 2003, **108**(B1), 2057, doi:10.1029/2001JB000457
- [7] Velicogna I, Wahr J. Acceleration of Greenland ice mass loss in spring 2004. *Nature*, 2006, **443**(7109): 329~331
- [8] Han S C, Shum C K, Bevis M, et al. Crustal dilatation observed by GRACE after the 2004 Sumatra-Andaman earthquake. *Science*, 2006, **313**(5787): 658~662
- [9] David A. Gravity measurement; amazing GRACE. *Nature*, 2002, **416**(6876): 10~11
- [10] Baker R M L. Orbit determination from range and range-rate data. The Semi-Annual Meeting of the American Rocket Society, Los Angeles, 1960
- [11] Kaula W. Theory of satellite geodesy. Massachusetts: Blaisdell Publishing Company Press, 1966. 34~35
- [12] Cui C, Lelgemann D. On non-linear low-low SST observation equations for the determination of the geopotential based on an analytical solution. *Journal of Geodesy*, 2000, **74**(5): 431~440
- [13] 郑 伟, 邵成刚, 罗 俊. 近地极轨卫星恢复地球重力场的研究. 见: 大地测量与地球动力学进展. 武汉: 湖北科学技术出版社, 2004. 328~333
Zheng W, Shao C G, Luo J. Research of satellite in near polar and low earth orbit recovering earth's gravitational field. In: *Progress of Geodesy and Geodynamics* (in Chinese). Wuhan: Hubei Science & Technology Press, 2004. 328~333
- [14] Visser P N A M. Low-low satellite-to-satellite tracking; a comparison between analytical linear orbit perturbation theory and numerical integration. *Journal of Geodesy*, 2005, **79**(1): 160~166
- [15] O'Keefe J A. An application of Jacobi's integral to the motion of an Earth satellite. *The Astronomical Journal*, 1957, **62**(1252): 265~266
- [16] Han S C. Efficient determination of global gravity field from satellite-to-satellite tracking mission. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2004, **88**(1): 69~102
- [17] Zheng W, Lu X L, Xu H Z, et al. Simulation of Earth's gravitational field recovery from GRACE using the energy balance approach. *Progress in Natural Science*, 2005, **15**(7): 596~601
- [18] 徐天河, 杨元喜. 利用 CHAMP 卫星几何法轨道恢复地球重力场模型. 地球物理学报, 2005, **48**(2): 288~293
Xu T H, Yang Y X. CHAMP gravity field recovery using kinematic orbits. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2005, **48**(2): 288~293
- [19] 沈云中, 许厚泽, 吴 斌. 星间加速度解算模式的模拟与分析. 地球物理学报, 2005, **48**(4): 807~811
Shen Y Z, Xu H Z, Wu B. Simulation of recovery of the geopotential model based on intersatellite acceleration data in the low-low satellite to satellite tracking gravity mission. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2005, **48**(4): 807~811
- [20] 郑 伟, 邵成刚, 罗 俊等. 基于卫-卫跟踪观测技术利用能量守恒法恢复地球重力场的数值模拟研究. 地球物理学报, 2006, **49**(3): 712~717
Zheng W, Shao C G, Luo J, et al. Numerical simulation of Earth's gravitational field recovery from SST based on the energy conservation principle. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2006, **49**(3): 712~717
- [21] 周旭华, 许厚泽, 吴 斌等. 用 GRACE 卫星跟踪数据反演地球重力场. 地球物理学报, 2006, **49**(3): 718~723
Zhou X H, Xu H Z, Wu B, et al. Earth's gravity field derived from GRACE satellite tracking data. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2006, **49**(3): 718~723
- [22] 郑 伟. 基于卫星重力测量恢复地球重力场的理论和方法 [博士论文]. 武汉: 华中科技大学, 2007
Zheng W. Theory and methodology of Earth's gravitational field recovery based on satellite gravity measurement [Ph. D. Thesis]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2007

- [23] Xu P L. Position and velocity perturbations for the determination of geopotential from space geodetic measurements. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2008, **100**(3): 231~249
- [24] Zheng W, Shao C G, Luo J, et al. Improving the accuracy of GRACE Earth's gravitational field using the combination of different inclinations. *Progress in Natural Science*, 2008, **18**(5): 555~561
- [25] 郑伟, 许厚泽, 钟敏等. 卫星跟踪卫星测量模式中轨道高度优化选取论证. *大地测量与地球动力学*, 2008, **28**(6): 1~7
- Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Demonstration on optimal design of orbital altitude in satellite-to-satellite tracking model. *Journal of Geodesy and Geodynamics* (in Chinese), 2008, **28**(6): 1~7
- [26] Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Contrastive demonstration on the influence of one-dimensional radial and three-dimensional satellite gravity gradiometry on the accuracy of future GOCE Earth's gravitational field. *Progress in Natural Science*, 2008, in press
- [27] Jekeli C, Rapp R H. Accuracy of the determination of mean anomalies and mean geoid undulations from a satellite gravity field mapping mission. Department of Geodetic Science, Report No. 307, The Ohio State University, 1980
- [28] Kim J. Simulation study of a low-low satellite-to-satellite tracking mission [Ph. D. Thesis]. Austin: The University of Texas, 2000
- [29] Sneeuw N. A semi-analytical approach to gravity field analysis from satellite observations [Ph. D. Thesis]. Technical University of Munich, 2000
- [30] Loomis B. Simulation study of a follow-on gravity mission to GRACE [M. D. Thesis]. The University of Colorado, 2005

(本文编辑 汪海英)