

# 分段 Padé 逼近法用于预测二维介质柱的单站 RCS 方向图<sup>1</sup>

周后型 洪伟 许锋

(东南大学计算电磁学研究中心 南京 210096)

**摘 要** 矩量法与分段 Padé 逼近法结合用于预测任意形状截面二维介质柱的单站 RCS 方向图。该方法采用以总电场为未知函数的微积分方程。在矩量法过程中,用共轭梯度法和快速傅里叶变换(CG-FFT)的组合算法求解线性方程组,以便降低存储量和加快迭代速度。分段 Padé 逼近法用于加速获取单站 RCS 方向图,这里为分段 Padé 逼近法增添了一个自适应算法,克服了以往人工选择展开点位置的缺点。这种新的组合算法称为 CG-FFT-PAIS 算法。文中的数值算例证实了所述方法的有效性和实用性。

**关键词** 矩量法,分段 Padé 逼近法,雷达散射截面,二维介质柱体  
**中图分类号** TN015

## 1 引言

矩量法产生的线性方程组的系数矩阵是一个满阵,受计算机内存和计算时间等因素的限制,普通矩量法很难直接用于计算电大尺寸目标的电磁散射。T. K. Sarkar 等人<sup>[1]</sup>提出的 MoM-CG-FFT 技术在一定程度上克服了上述缺点。MoM-CG-FFT 算法是一种迭代算法,如果将它用于计算目标的单站 RCS 方向图,则必须在不同入射波照射角度上逐点重复求解线性方程组才能获得整个角度变化范围内的响应。为了预测的目的,可以采用函数逼近的方法来快速获取目标的单站 RCS 曲线。目前,函数的 Padé 逼近法已经广泛应用于各种电磁问题<sup>[2-4]</sup>。对于入射角的变化范围较大的问题,采用多点 Padé 逼近法是必要的<sup>[5]</sup>。分段 Padé 逼近法<sup>[6]</sup>是多点 Padé 逼近法的类型之一,它的主要优点在于计算量较小,但受人工选择展开点的影响,所获得的近似单站 RCS 曲线可能在小区间连接处出现不连续的现象。克服这一缺点的简单方法是将变化区间分成很小的区间,但这要增加计算量和计算时间。人工选择展点的方法很难兼顾计算精度和计算时间的问题。从应用的角度看,应当设计一个由算法自动选择展开点的过程。本文以分段 Padé 逼近法为基础,就目标的宽角度单站 RCS 方向图问题提出一种自动选择展开点过程,并结合矩量法应用于预测任意形状横截面的二维介质柱单站 RCS 方向图。

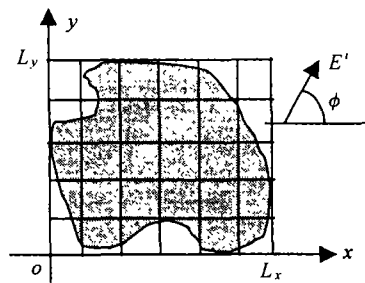


图 1 任意截面的柱体和坐标系

## 2 理论

### 2.1 介质柱散射的矩量法解

设介质柱体置于如图 1 所示的坐标系中,柱体在  $z$  方向上是均匀无限长的,其横截面具有任意形状。介质材料沿横截面可以是非均匀各向异性的,其磁导率与自由空间的相同,相对介电常数张量记为  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(x, y)$ 。设柱体被一个时谐平面波正入射,其入射电场为  $E^i$ 。这里的时间因子设为  $e^{j\omega t}$ ,并被省略。利用矢量磁位和洛伦兹条件,可导出关于总电场  $E$  的微-积分方

<sup>1</sup> 2002-01-16 收到, 2002-06-10 改回

国家杰出青年基金资助,项目批准号: 69625102

程

$$\mathbf{E}^i(\rho) = \mathbf{E}(\rho) + \frac{j}{4}[k_0^2 + \nabla_t \nabla_t] \iint_{D_c} H_0^{(2)}(k_0|\rho - \rho'|) [\bar{\epsilon}(\rho') - \bar{\mathbf{I}}] \mathbf{E}(\rho') d\rho'$$

式中  $\nabla_t = \hat{x}(\partial/\partial x) + \hat{y}(\partial/\partial y)$ ,  $\bar{\mathbf{I}}$  是单位并矢,  $H_0^{(2)}(\cdot)$  是第二类零阶 Hankel 函数,  $D_c$  是柱体横截面区域。

用一个矩形将区域  $D_c$  围住. 设矩形区域  $D_{re}$  沿  $\hat{x}$  方向长  $L_x$ , 沿  $\hat{y}$  方向长  $L_y$ , 并分别作  $N_x, N_y$  等分. 这时矩形区域  $D_{re}$  被离散成  $N_x N_y$  个小矩形  $D_{mn}$ , 其中心点为  $(x_m, y_m)$ . 将  $\bar{\epsilon}$  的定义扩张到  $D_{re}$  上, 即在  $D_{re} - D_c$  上有  $\bar{\epsilon} = 1$ . 将未知矢量函数  $\mathbf{E}$  用二维脉冲基展开, 相对介电常数张量  $\bar{\epsilon}$  也用二维脉冲基展开, 在各小矩形中心处点配, 得到线性方程组如下

$$(\mathbf{I} + \mathbf{TK})\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (1a)$$

其中  $\mathbf{I}$  是  $3N_x N_y$  阶单位阵,  $\mathbf{T}$  是一个三重分块矩阵且与二重 Toeplitz 矩阵结构有关.  $\mathbf{T}$  的这一特征有助于利用 FFT 实现矩阵向量积. 线性方程组 (1a) 式是原问题的定义域从  $D_c$  扩大为  $D_{re}$  后所得到的. 为了获得原问题在  $D_c$  上的线性方程组, 而且又要充分利用线性方程组 (1a) 式的结构, 引进一个  $3N_x N_y$  阶的对角线矩阵

$$\mathbf{D} = \text{diag}[\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_{N_x-1}], \quad \mathbf{D}_i = \text{diag}[\mathbf{D}_{i,0}, \mathbf{D}_{i,1}, \dots, \mathbf{D}_{i,(N_x-1)}]$$

$$\mathbf{D}_{m,n} = \lambda_{m,n} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{m,n} = \begin{cases} 1, & (x_m, y_n) \in D_c \\ 0, & (x_m, y_n) \notin D_c \end{cases}$$

现在用下面的线性方程组 (1b) 式替换上面的线性方程组 (1a) 式

$$\mathbf{D}(\mathbf{I} + \mathbf{TK})\mathbf{D}\mathbf{X} = \mathbf{D}\mathbf{B} \quad (1b)$$

如果获得了 (1b) 式的解  $\mathbf{X} = \{x_{ij}^{(k)}\}$ , 那么  $\{x_{ij}^{(k)} | (x_i, y_j) \in D_c\}$  便是原问题的线性方程组的解. 有关如何利用 FFT 快速计算矩阵向量积的细节可参见文献 [7].

## 2.2 Padé 逼近

线性方程组 (1b) 式与入射场  $\mathbf{E}^i$  的入射角  $\phi$  有关, 为方便叙述, 将 (1b) 式改记为

$$[\mathbf{Z}_{mn}][I_n(\phi)] = [\mathbf{V}_m(\phi)] \quad (2)$$

其中  $[\mathbf{Z}_{mn}] = \mathbf{D}(\mathbf{I} + \mathbf{TK})\mathbf{D}$ ,  $[I_n(\phi)] = \mathbf{X}$ ,  $[\mathbf{V}_m(\phi)] = \mathbf{D}\mathbf{B}$ . 两边求关于  $\phi$  的各阶导数

$$[\mathbf{Z}_{mn}][I_n^{(k)}(\phi)] = [\mathbf{V}_m^{(k)}(\phi)], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

选择一个展开点  $\phi_0$ , 将  $[I_n(\phi)]$  的各分量展开成 Taylor 级数

$$I_n(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_n^{(k)}(\phi_0)}{k!} (\phi - \phi_0)^k \quad (4)$$

$I_n(\phi)$  在  $\phi = \phi_0$  处的 Padé 逼近式  $P_n(L/M)$  是一个有理函数, 使得

$$I_n(\phi) \approx P_n(L/M) = \frac{\sum_{l=0}^L a_n^l (\phi - \phi_0)^l}{1 + \sum_{m=1}^M b_n^m (\phi - \phi_0)^m} \quad (5)$$

且

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_n^{(k)}(\phi_0)}{k!} (\phi - \phi_0)^k = P_n(L/M) + O(\phi^{L+M+1}) \quad (6)$$

式中正整数  $L, M$  分别是有理函数  $P_n(L/M)$  的零、极点阶数。根据 Padé 逼近理论<sup>[8]</sup>, 系数  $a_n^j$  和  $b_n^j$  由下面的线性方程组确定 ( $b_n^0 = 1$ )

$$a_n^j - \sum_{i=0}^{j-1} \frac{I_n^{(i)}(\phi_0)}{i!} b_n^{j-1} = \frac{I_n^{(j)}(\phi_0)}{j!}, \quad \begin{cases} a_n^j = 0, & j > L \\ b_n^j = 0, & j > M \end{cases} \quad (7)$$

$j = 0, 1, 2, \dots, L+M$ 。当  $L+M$  一定时,  $L$  和  $M$  在理论上的最佳选择应满足  $L = M$  或  $|L - M| = 1$ 。在应用中,  $L$  和  $M$  的值在 6 以下选择即可。必须指出, Padé 逼近式的逼近精度并非随  $L$  和  $M$  的增大而不断提高, 因此当目标结构复杂且入射角的变化范围较大时, 不能通过单点逼近式增大  $L$  和  $M$  的值来获得整个区间上的高精度逼近。

### 2.3 展开点的选择过程

这里为分段 Padé 逼近法设计一种选择展开点的过程。取定 Padé 逼近式的零、极点阶数  $L, M$ 。设入射角的变化区间为  $[a, b]$ 。TEST 是一个正实数。 $\Delta\phi$  表示一个固定的角度增量。记各个展开点依次为  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$ , 且  $\phi_{i+1} = \phi_i + k\Delta\phi$ ,  $k$  是待定整数, 其生成过程如下。

初始:  $\phi_1$  取在靠近区间左端点  $a$  的位置 (或取  $\phi_1 = a$ ), 并确定  $I_n(\phi)$  在  $\phi_1$  处的 Padé 逼近式, 记为  $I_n(\phi, \phi_1)$ 。

循环: 设已经获得第  $i$  个展开点  $\phi_i$  和 Padé 逼近式  $I_n(\phi, \phi_i)$ , 则对  $k = 1, 2, \dots$ , 逐一检查下式:

$$\| [Z_{mn}][I_n(\phi_i + k\Delta\phi, \phi_i)] - [V_m(\phi_i + k\Delta\phi)] \|_2 < \text{TEST} \quad (8)$$

如果对于所有使  $\phi_i + k\Delta\phi < b$  的  $k$ , (8) 式均被满足, 则  $\phi_i$  就是最后一个展开点; 否则可找到第一个不满足 (8) 式的  $k$ , 取第  $i+1$  个展开点为  $\phi_{i+1} = \phi_i + k\Delta\phi$ , 并确定  $I_n(\phi)$  在  $\phi_{i+1}$  处的 Padé 逼近式  $I_n(\phi, \phi_{i+1})$ 。

在这个选择展开点的算法中, (8) 式扮演了一个重要的角色。如果 2-范数

$$\| [Z_{mn}][I_n(\phi_i + k\Delta\phi, \phi_i)] - [V_m(\phi_i + k\Delta\phi)] \|_2 = 0 \quad (9)$$

则 Padé 逼近式  $I_n(\phi, \phi_i)$  就在  $\phi = \phi_i + k\Delta\phi$  处精确地逼近了方程组 (2) 式的解。在应用中不要求 (9) 式精确成立, 只要选取一个允许误差界 TEST 就可以了, 这就是 (8) 式的意义。CG-FFT 算法与带有上述选点过程的分段 Padé 逼近法的结合算法称为 CG-FFT-PAIS 算法。

## 3 数值实验

这里所考虑的入射波为 TM 和 TE 均匀平面波, 其入射电场为

$$\text{TM 情形: } \mathbf{E}^i(x, y) = \hat{z}e^{-jk_0(x \cos \phi^i + y \sin \phi^i)}$$

$$\text{TE 情形: } \mathbf{E}^i(x, y) = (\hat{x} \sin \phi^i - \hat{y} \cos \phi^i)e^{-jk_0(x \cos \phi^i + y \sin \phi^i)}$$

用  $s^{(k)}$  表示 CG 算法第  $k$  次迭代的余向量, 取停机准则为  $\|s^{(k)}\|/\|s^{(0)}\| < 10^{-4}$ 。所有的计算都是在主频为 633MHz 的微机上的。  $\lambda$  是自由空间中波长,  $\text{RCS}/\lambda$  (dB) =  $10 \lg(\text{RCS}/\lambda)$ ,  $\phi^S$  表示散射角。

首先验证本文计算机程序的正确性。设介质柱的横截面是矩形长条,  $x$  边长  $0.05\lambda$ ,  $y$  边长  $2.5\lambda$ 。

(1) TM 波入射, 相对介电常数为  $\varepsilon(x, y) = 4 - 2.4|y/\lambda - 1.25|$ , 计算双站 RCS 方向图. 图 2 给出当入射角分别为  $0^\circ$  和  $90^\circ$  时, 本文和文献 [9] 的计算结果比较.

(2) TE 波入射, 相对介电常数为  $\varepsilon(x, y) = 4$ , 计算双站 RCS 方向图. 图 3 给出当入射角为  $0^\circ$  时, 本文和文献 [10] 的计算结果比较.

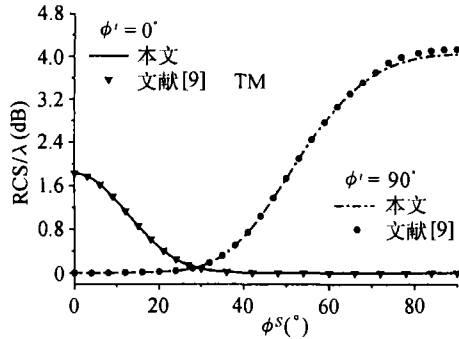


图 2 矩形截面柱体双站 RCS(TM)

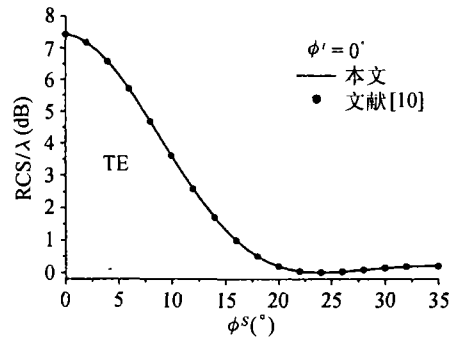


图 3 矩形截面柱体双站 RCS(TE)

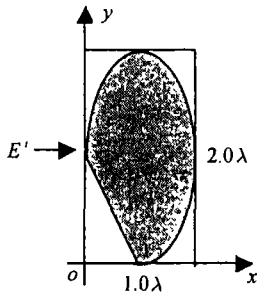


图 4 残缺椭圆横截面

上面的比较计算结果表明本文的计算机程序是正确的. 下面的数值算例旨在考察分段 Padé 逼近法对加速获取单站 RCS 方向图的效率. 设介质柱的横截面是如图 4 所示的一个残缺椭圆面, 相对介电常数为  $\varepsilon(x, y) = 4$ . 取  $L_x = 1\lambda$ ,  $L_y = 2\lambda$ ,  $N_x = 32$ ,  $N_y = 64$ . 当入射角  $\phi^i$  从  $180^\circ$  变化到  $360^\circ$  时, 单站散射角  $\phi^S$  就从  $0^\circ$  变化到  $180^\circ$ . 采用 CG-FFT 算法逐点计算时, 角度步进量为  $1^\circ$ . 采用 CG-FFT-PAIS 算法计算时, 取  $\phi_1 = 195^\circ$ ,  $\Delta\phi = 10^\circ$ , TEST=0.005.

(1) TM 波入射: CG-FFT 算法耗时 1598.11s, CG-FFT-PAIS 算法耗时 643.17s. CG-FFT-PAIS 自动选择出的入射角展点为 195, 225, 255, 285, 315, 345. 图 5 给出 RCS 曲线, 两种算法的计算结果完全吻合. CG-FFT-PAIS 的计算速度近似为 CG-FFT 的速度的 2.5 倍.

(2) TE 波入射: CG-FFT 算法耗时 40290.1s, CG-FFT-PAIS 算法耗时 13431.02s. CG-FFT-PAIS 自动选择出的入射角展点为 195, 215, 245, 275, 305, 335, 360. 图 6 给出 RCS 曲线, 两种算法的计算结果完全吻合. CG-FFT-PAIS 的计算速度近似为 CG-FFT 的速度的 3 倍.

### 4 结 论

本文基于分段 Padé 逼近法, 就目标的宽角度单站 RCS 方向图问题提出了一种自动选择展开点的过程, 并结合矩量法 (CG-FFT-PAIS) 用于预测任意形状横截面的二维介质柱宽角度单站 RCS 方向图. 该算法在一定程度上克服了人工选择展开点方法的缺点, 较好地兼顾了计算精度和计算时间的问题. 因为不需要事先确定分段方法, 所以该算法具有较强的实用性. 应当指

出, 本文设计的自动选择展开点的过程未必就是最佳的, 我们希望能够看到更佳方案发表, 使分段 Padé 逼近法能够更好地服务于电磁计算。

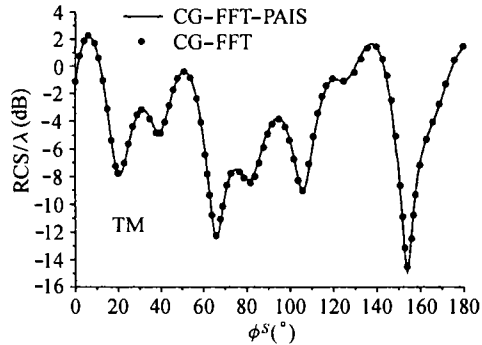


图 5 残缺椭圆截面柱体单站 RCS(TM)

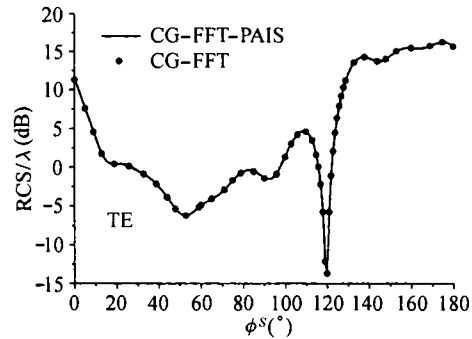


图 6 残缺椭圆截面柱体单站 RCS(TE)

### 参 考 文 献

- [1] T. K. Sarkar, E. Arvas, S. M. Rao, Application of FFT and the conjugate gradient method for the solution of electromagnetic radiation from electrically large and small conducting bodies[J], IEEE Trans. on AP., 1986, AP-34(5), 635-640.
- [2] S. V. Polstyanko, D. E. Romanus, J. F. Lee, Fast frequency sweep technique for the efficient analysis of dielectric wave-guide [J], IEEE Trans. on MTT, 1997, MTT-45(7), 1118-1126.
- [3] C. J. Reddy, M. D. Deshpande, Fast RCS computation over a frequency band using method of moments in conjunction with asymptotic waveform evaluation technique[J], IEEE Trans. on AP, 1998, AP-46(8), 1229-1233.
- [4] Y. E. Erdemli, J. Gong, C. J. Reddy, *et al.*, Fast RCS pattern fill using AWE technique[J], IEEE Trans. on AP, 1998, AP-46(11), 1752-1753.
- [5] 童创明, 洪伟, AWE 应用于介质柱宽角度 RCS 响应的快速获取 [J], 电子学报, 2001, 29(9), 1198-1201.
- [6] R. Sanaie, E. Chiprout, M. S. Nakhla, Qi-jun Zhang, A Fast method for frequency and time domain simulation of high-speed VLSI interconnects[J], IEEE Trans. on MTT, 1994, MTT-42(12), 2563-2571.
- [7] 周后型, 童创明, 洪伟, 预条件共轭梯度法在线天线阵列 RCS 分析中的应用 [J], 应用科学学报, 2001, 19(2), 145-148.
- [8] 王仁宏, 数值有理逼近 [M], 上海, 上海科技出版社, 1980, 101-128.
- [9] J. H. Richmond, Scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross section shape[J], IEEE Trans. on AP, 1965, AP-13(5), 334-341.
- [10] J. H. Richmond, TE-wave scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross section shape[J], IEEE Trans. on AP, 1966, AP-14(4), 460-464.

## PADÉ APPROXIMATION IN SEGMENTS APPLIED TO PREDICT MONOSTATIC RCS PATTERN OF A 2D DIELECTRIC OBJECT

Zhou Houxing    Hong Wei    Xu Feng

(Center for Computational Electromagnetics, Southeast University, Nanjing 210096, China)

**Abstract** The Method of Moment (MoM) in conjunction with Padé Approximation In Segments (PAIS) is applied to predict the monostatic Radar Cross-Section (RCS) pattern of an arbitrarily shaped 2-D dielectric object. In the method, integro-differential equation for the total electric field is used. In MoM procedure, to reduce the need for computer memory and to speed up the iteration, a combined algorithm of conjugate gradient method and fast Fourier transform is used to solve the algebraic system. PAIS is used to accelerate the drawing of RCS pattern. PAIS here is equipped with a procedure for selecting expanding points, and so shortcomings of original scheme of man-selecting location of expansion points are overcome. The new method is called CG-FFT-PAIS. Numerical results in this paper demonstrate the validity and the practicability of the method.

**Key words** Method of moment, Padé approximation in segments, RCS, 2-D dielectric object

周后型: 男, 1956年生, 副教授, 博士, 研究方向为电磁场的数值计算.

洪 伟: 男, 1962年生, 博士, 教授, 博士生导师、系主任, 在国内外权威学术刊物上发表论文 200 多篇, 学术专著一部. 获一项国家自然科学基金四等奖、两项国家教委科技进步一等奖等多项奖励. 获国家人事部“突出贡献中青年专家”等多项荣誉称号. 获“国家杰出青年基金”和国家教委“跨世纪优秀人才基金”等. 任多种国内外刊物, 如 IEEE Trans. on MTT, IEEE Trans. on AP, IEEE Trans. on CPMT, IEE Proc.-H, Electron. Lett., 《电子学报》, 《微波学报》, 《电波科学学报》等的审稿人和编委.

许 锋: 男, 1963年生, 博士, 研究方向为电磁场时域方法数值计算, 电磁散射和电路分析.