

# Pareto-MEC 算法及其收敛性分析

周秀玲, 孙承意

(北京城市学院人工智能研究所, 北京 100083)

**摘要:**介绍了一种新的多目标进化算法——Pareto-MEC。将基本 MEC 和 Pareto 思想结合起来处理多目标问题。提出了局部 Pareto 最优解集与局部 Pareto 最优态集概念, 并利用概率论的基本理论证明了趋同过程产生的序列强收敛于局部 Pareto 最优态集。数值试验验证了 Pareto-MEC 算法的有效性。

**关键词:**进化算法; 多目标优化; 思维进化计算; 收敛性; 趋同操作; 异化操作

## Pareto-MEC and Its Convergence Analysis

ZHOU Xiuling, SUN Chengyi

(Artificial Intelligence Lab, Beijing City College, Beijing 100083)

**【Abstract】** Pareto mind evolutionary computation (Pareto-MEC) is a new multi-objective evolutionary algorithm (MOEA), which introduces the theory of Pareto into MEC for multi-objective optimization. Feasibility and efficiency of Pareto-MEC are illustrated by numerical results. The concepts of local Pareto optimal solution set and local Pareto optimal state set are presented. And it is proved that the sequence of population generated through operation similartaxis strongly converges to local Pareto optimal state by using the probability theory.

**【Key words】** Evolutionary computation; Multi-objective optimization; Mind evolutionary computation; Convergence; Operation similartaxis; Operation dissimulation

### 1 概述

考虑含有  $n$  个自变量  $m$  个目标函数的多目标函数最大化问题:

$$\text{MOP}(X, f), \text{ Max } y=f(x)$$

其中:  $x=(x_1, \dots, x_n) \in X \subset R^n$ ,  $y=(y_1, \dots, y_m) \in Y \subset R^m$ ,  $x$  为决策(参数)向量,  $X$  为决策空间,  $y$  为目标向量,  $Y$  为目标空间。

**定义 1** (Pareto 关系) 称决策向量  $x$  优于  $x'$ , 记为  $x > x'$  当且仅当

$$(1) \forall i \in \{1, \dots, m\}: f_i(x) \geq f_i(x') \text{ 且}$$

$$(2) \exists j \in \{1, \dots, m\}: f_j(x) > f_j(x').$$

**定义 2** (Pareto 最优解) 称  $x \in X$  为集合  $A(\subseteq X)$  上的 nondominated 解, 当且仅当  $\forall a \in A: a > x$ 。特别若  $A=X$ , 称  $x$  为 Pareto 最优解。

**定义 3** (Nondominated 解集与其前沿) 设  $A \subseteq X$ , 令:  $\text{non}(A) = \{x \in A: x \text{ 是 } A \text{ 上的 } \text{nondo min ated} \text{ 解}\}$

则集  $\text{non}(A)$  称为  $A$  上的 nondominated 解集。对应目标向量空间中的解集  $f(\text{non}(A))$  称为  $A$  上的 nondominated 前沿。

**定义 4** (Pareto 最优解集与 Pareto 前沿) 令:

$$X^* = \{x \in X: \exists x' \in X \text{ 满足 } x' > x\}$$

则集  $X^*$  称为 Pareto 最优解集。对应的目标向量空间中的解集  $Y^* = \{y = f(x): x \in X^*\}$  称为 Pareto 前沿。

自从 Schaffer 首次采用进化算法进行多目标优化以来<sup>[1]</sup>, 研究者们相继提出了许多不同的多目标进化算法 (MOEA), 这些算法大致可以分为以下几类<sup>[2]</sup>: (1) 聚合法, 这类方法是将多个目标聚合成一个目标函数来进行优化。它虽然简单且容易执行, 但是当对问题了解较少时, 就很难为各个目标产

生合适的权值。(2) 基于群体的非 Pareto 法, 如 VEGA<sup>[1]</sup>, 这种方法是根据每个目标函数来进行比例选择。它虽然改变了 GA 基本的选择机制, 但从本质上来看还是类似于聚合法的。(3) 基于 Pareto 的方法, 如 SPEA<sup>[3]</sup>。目前对 MOEA 的研究主要集中在这一类方法。这类算法的实现基于两个策略: nondominated 策略与保持多样性策略。关于 MOEA 的理论研究较少, 而且主要集中在算法的收敛性分析以及如何评价不同算法的性能<sup>[4-6]</sup>。

思维进化算法 (MEC) 是一种模拟人类思维进步的进化算法<sup>[7]</sup>, 它是根据对遗传算法存在问题的思考以及对人类思维进步的分析而提出的。MEC 主要由两种操作组成: 趋同与异化。趋同模拟思维模式中非优胜者向优胜者学习的过程, 异化模拟思维模式中人类进行创新的过程。MEC 就是模仿人的这种趋同与异化交互作用的思维进步的过程。而进化计算的其它方法, 如 GA、ES, 都是模仿生物的进化过程。采用 MEC 求解数值优化问题与非数值优化问题都表现出良好的性能<sup>[8]</sup>。

本文提出了一种新的 MOEA——Pareto-MEC, 并对其收敛性进行了分析。

### 2 Pareto-MEC 算法

#### 2.1 Pareto-MEC 的基本原理

Pareto-MEC (Pareto Mind Evolutionary Computation) 是将 MEC 算法与 Pareto 思想结合起来进行多目标问题的优化。

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目 (60174002); 北京市教育委员会科技发展计划基金资助项目 (KM200600006001, KM200600006003)

**作者简介:** 周秀玲 (1972 -), 女, 硕士、副教授, 主研方向: 进化计算; 孙承意, 教授

**收稿日期:** 2006-06-18 **E-mail:** zxlmouse@bcu.edu.cn

Pareto-MEC 的基本思想是：(1)在整个解空间散布一些个体，选择其中较好的一些个体作为子群体的散布中心。(2)每个子群体从这些初始中心出发，每个子群体仅搜索解空间的一个局部区域并逐渐向 Pareto 前沿漂移。(3)在漂移的过程中，算法调整各子群体的搜索范围与方向。上述的(1)与(3)称为异化操作，(2)称为趋同操作。

## 2.2 Pareto-MEC 实现步骤的伪码表示

```

/* Parameters of Pareto-MEC */
N /*子群体个数*/
SG /*子群体尺寸*/
S /*群体 (S = SG × N)*/
t /*迭代代数*/
Git /*第 t 代时的第 i 个子群体*/
nond(A) /*集合 A 上的 nond(A) 的补集, 即: A \ nond(A)*/
Pextt /*第 t 代时的外部集*/
Pcant /*第 t 代时的候选集*/

/* Procedure of Pareto-MEC */
(1)初始化: t ← 0, Pextt ← Φ, Pcant ← Φ。
(2)在决策空间上按照某种分布散布 S 个个体形成临时集合 P', 令 Pextt = nond(P')。如果 |Pextt| < N, 则从 nond(P') 中再选取一些比较分散的个体加入 Pextt, 使得 |Pextt| ≥ N, 然后清空 P'。
(3)从 Pextt 中选择 N 个个体作为各子群体的初始中心。
(4)For 对于 i - th 散布中心 cit。
(5)在该散布中心的周围, 按某种分布散布 SG 个个体形成集合 P'。令 Git = nond(P'), 然后清空 P'。
(6)根据 Pareto 关系比较 Git 和 Pextt 中的个体 (见 2.3 节)
(7)End for
(8)令 Pcant = nond(Pextt), Pextt = nond(Pextt)。如果 Pcant 和 Pextt 中元素过多或过少时就用 2.4 节中的方法对它们进行处理。
(9)确定散布宽度并且通过 shift(Git) 为每个子群体产生下一代的散布中心 cit+1 (见 2.5 节)。
(10)t ← t + 1
(11)如果满足停止准则 (见 2.6 节), 则输出 Pextt; 否则转到步骤(4)。

```

说明：步骤(4)~步骤(7)构成了算法的“趋同”操作，这是一个局部搜索，注意在步骤(6)中也有对 P<sub>can</sub><sup>t</sup> 的更新；“异化”操作作为一个全局搜索，由步骤(2)、步骤(3)以及步骤(8)、步骤(9)构成。

## 2.3 根据 Pareto 关系比较 G<sub>i</sub><sup>t</sup> 和 P<sub>ext</sub><sup>t</sup> 中的个体

在每个子群体进行“趋同”操作过程的每一代中，都要对外部集和其自身进行更新。在这个过程中，对各子群体内个体出现的情况及相应的处理如下：

令 j 是外部集 P<sub>ext</sub><sup>t</sup> 中的某个个体，k 是子群体 G<sub>i</sub><sup>t</sup> 中的某个个体。则：

(1)若 j ≥ k 且 D(j, G<sub>i</sub><sup>t</sup>) < r, 令 G<sub>i</sub><sup>t</sup> = (G<sub>i</sub><sup>t</sup> \ {k}) ∪ {j}, 其中 D(j, G<sub>i</sub><sup>t</sup>) < r 表示个体 j 与子群体 G<sub>i</sub><sup>t</sup> 几何中心间的欧氏距离小于一个预先给定的正数 r。

(2)若 k ≥ j, 令 P<sub>can</sub><sup>t</sup> = P<sub>can</sub><sup>t</sup> ∪ {j} 且 P<sub>ext</sub><sup>t</sup> = (P<sub>ext</sub><sup>t</sup> \ {j}) ∪ {k}。

(3)若 k 与 j 不可比较, 令 P<sub>ext</sub><sup>t</sup> = P<sub>ext</sub><sup>t</sup> ∪ {k}。

## 2.4 调整 P<sub>ext</sub><sup>t</sup> 和 P<sub>can</sub><sup>t</sup> 的尺寸

当外部集 P<sub>ext</sub><sup>t</sup> 和候选集 P<sub>can</sub><sup>t</sup> 过大时，使用 SPEA2 中的 archive truncation 方法对它们进行处理；当 P<sub>ext</sub><sup>t</sup> 过小时，会使用候选集中的个体进行填充。

## 2.5 子群体散布中心的产生

子群体 G<sub>i</sub><sup>t+1</sup> 的散布中心 c<sub>i</sub><sup>t+1</sup> 要通过两部分共同确定：c<sub>i</sub><sup>t+1</sup> = c(G<sub>i</sub><sup>t</sup>) + shift(G<sub>i</sub><sup>t</sup>), 其中 c(G<sub>i</sub><sup>t</sup>) 表示在趋同过程中根据局部信息得到的散布中心；shift(G<sub>i</sub><sup>t</sup>) 表示通过异化过程根据全局信息确定的散布中心。

在趋同过程中，当子群体和外部集进行了 Pareto 关系的检查后，子群体中个体的质量会有所提高，此时根据这些个体的位置信息可以确定一个散布中心 c(G<sub>i</sub><sup>t</sup>) (在本实验中，将子群体的几何中心作为 c(G<sub>i</sub><sup>t</sup>))。如果由 c(G<sub>i</sub><sup>t</sup>) 作为 c<sub>i</sub><sup>t+1</sup>, 这样可能会造成子群体重复搜索某一区域。因此在异化过程中对子群体的搜索方向进行了调节，从而使得各子群体能够比较分布均匀地朝 Pareto 最优前沿方向逼近 (在本实验中，使用了一个反映各子群体相对位置信息的漂移向量来确定 shift(G<sub>i</sub><sup>t</sup>))。由 c(G<sub>i</sub><sup>t</sup>) 和 shift(G<sub>i</sub><sup>t</sup>) 共同决定的 c<sub>i</sub><sup>t+1</sup> 才是子群体 G<sub>i</sub><sup>t+1</sup> 真正的散布中心。

## 2.6 停止准则

当连续若干代某个子群体变化不大时，就认为这个子群体成熟了。在本试验中，是在该群体中连续两代后选取一些比较点，例如，当

$$\sum_i |a_i - a'_i| < \varepsilon$$

时就认为这个子群体变化不大了。其中 a<sub>i</sub> 是 G<sub>i</sub><sup>t+1</sup> 中排序后的第 i 个个体，a'<sub>i</sub> 是 G<sub>i</sub><sup>t</sup> 经过排序后的第 i 个个体，ε 是预先给定的一个正值。

## 3 收敛性分析

为了分析方便，只考虑满足下面假设的 MOP(X, f)。

假设 1：MOP(X, f) 满足：

(1) f 是 X 上的连续函数；

(2) X 是 R<sup>n</sup> 中的有界闭集。

### 3.1 Pareto-MEC 的趋同过程

在 Pareto-MEC 中，异化操作只实现了基本 MEC 中异化操作所起的作用：为每个子群体选择较好的散布中心；未实现作用：对子群体的趋同结果进行比较，优胜劣汰<sup>[8]</sup>。故本文只对 Pareto-MEC 算法中的趋同过程进行收敛性分析。

在 Pareto-MEC 中，一个子群体的趋同过程如下所述：

(1)接收经异化操作得到的优胜个体作为子群体初始散布中心 c<sub>0</sub>, t = 0, G<sub>0</sub> = φ；

(2)在子群体的散布中心 c<sub>t</sub> 的局部区域内以某种概率分布产生 S<sub>G</sub> 个个体，这 S<sub>G</sub> 个个体构成集合 P'；

(3)令 G<sub>t</sub> = non(G<sub>t</sub> ∪ P'), P' = φ；

(4)根据 G<sub>t</sub> 形成子群体新的散布中心 c<sub>t</sub>；t = t + 1；

(5)若满足停止条件，则趋同操作停止；否则转向步骤(2)。

在步骤(2)中，设 x' 为以 x 为中心产生的个体，则 x' = x + Z, 随机变量 Z 的概率密度函数为

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} & z \in U(0, w) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

其中：

$$\beta = \int_{U(0,w)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz$$

是一个常数，

$$U(x,w) = \prod_{i=1}^n [x_i - w, x_i + w], \quad w = k\sigma$$

$k$  为常数， $\sigma$  为正态分布的标准差。

### 3.2 趋同过程的收敛性

由于文中需要，引入局部 Pareto 最优解集与局部 Pareto 最优态集的概念。

**定义 5 (局部 Pareto 最优解集)**  $X_l^* \subseteq X$  为局部 Pareto 最优解集，当且仅当  $\exists \delta > 0, \forall x_i^* \in X_l^* : \exists x \in X$  满足  $x \succ x_i^* \wedge \|x - x_i^*\| \leq \delta$ ，其中  $\|\cdot\|$  是相应的范数。

**定义 6 (局部 Pareto 最优态集)**  $X_\delta^* \subseteq X$  为局部 Pareto 最优态集，当且仅当  $\forall x_\delta^* \in X_\delta^* : \exists x \in X$  满足  $x \succ x_\delta^* \wedge \|x - x_\delta^*\| \leq \delta$ ，其中  $\delta$  为一给定的正数。

从上面定义可看出，Pareto 最优解集是局部 Pareto 最优态集，局部 Pareto 最优态集是局部 Pareto 最优解集。

**定义 7 (  $\varepsilon$  局部 Pareto 最优态集 ) 令**

$$U_\varepsilon(y) = \{y' \in R^m : \|y - y'\| \leq \varepsilon\}$$

称集

$$N_\varepsilon(X_\delta^*) = \{x \in X : \text{对于任意的 } x_\delta^* \in X_\delta^* \text{ 满足 } x_\delta^* \geq x \text{ 有 } f(x_\delta^*) \in U_\varepsilon(f(x))\}$$

为  $\varepsilon$  局部 Pareto 最优态集。

设  $\{G_t\}$  是由趋同过程产生的决策空间群体序列，

$$X_{\delta(w)}^* = \{\forall x_{\delta(w)}^* \in X_{\delta(w)}^* : \exists x \in X \text{ 满足 } x \succ x_{\delta(w)}^* \wedge x \in U(x_{\delta(w)}^*, w)\}$$

为 MOP  $(X, f)$  的一个与散布宽度  $w$  有关的局部 Pareto 最优态集。 $N_\varepsilon(X_{\delta(w)}^*)$  是其  $\varepsilon$  局部 Pareto 最优态集。

**定义 8** 如果对于  $\forall \varepsilon > 0$ ，

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} P\{G_t \cap N_\varepsilon(X_{\delta(w)}^*) \neq \emptyset \text{ 对于所有的 } t \geq s\} = 1$$

则称趋同过程产生序列  $\{G_t\}$  强收敛于局部 Pareto 最优态集  $X_{\delta(w)}^*$ 。

**引理 1**  $\varepsilon$  局部 Pareto 最优态集  $N_\varepsilon(X_{\delta(w)}^*)$  是有界闭集<sup>[5]</sup>。

由趋同过程的描述可得：

**引理 2**  $\forall x_t \in G_t, \exists x_{t+1} \in G_{t+1}$  满足  $x_{t+1} \succeq x_t$  对于所有  $t \geq 0$  均成立。

**定理 1** 将给出序列  $\{G_t\}$  强收敛到局部 Pareto 最优态集  $X_{\delta(w)}^*$  的充分条件。此定理类似于文献[9]中的结果。

**定理 1** 对于趋同过程产生序列  $\{G_t\}$ ，如果存在序列  $\{\beta_t\}$  满足：

$$(1) 0 \leq \beta_t \leq 1;$$

(2)  $P\{G_{t+1} \cap N_\varepsilon(X_{\delta(w)}^*) \neq \emptyset / G_t \cap N_\varepsilon(X_{\delta(w)}^*) = \emptyset\} \geq \beta_t$  对于任意  $t$  均成立；

$$(3) \sum_{t=0}^{\infty} \prod_{s=0}^t (1 - \beta_s) < +\infty;$$

则  $\{G_t\}$  强收敛于局部 Pareto 最优态集  $X_{\delta(w)}^*$ 。

下面讨论序列  $\{G_t\}$  是否满足定理 1 中的条件。

**引理 3** 设  $x \in X$  满足  $U(x,w) \cap N_\varepsilon(X_{\delta(w)}^*) \neq \emptyset$ ，则有  $P\{x+Z \in N_\varepsilon(X_{\delta(w)}^*)\} \geq c > 0$ ，其中  $c \in (0,1)$  为某一正数， $Z$

为 3.1 节所提及的随机变量。

证明：由于  $U(x,w) \cap N_\varepsilon(X_{\delta(w)}^*) \neq \emptyset$ ，故

$$P\{x+Z \in N_\varepsilon(X_{\delta(w)}^*)\} = \int_{U(x,w) \cap N_\varepsilon(X_{\delta(w)}^*)} \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz$$

记  $P\{x+Z \in N_\varepsilon(X_{\delta(w)}^*)\} = P_1(x)$ ，有  $0 < P_1(x) < 1$ 。

令  $A = \{x \in X : U(x,w) \cap N_\varepsilon(X_{\delta(w)}^*) \neq \emptyset\}$ ，据引理 1 知  $A$  为有界闭集。

由于  $P_1(x)$  为有界闭集  $A$  上的连续函数，故存在  $x_0 \in A$  使得

$$P_1(x_0) = \min_{x \in A} P_1(x)$$

且

$$0 < P_1(x_0) < 1$$

令  $c = P_1(x_0)$ ，则有  $P\{x+Z \in N_\varepsilon(X_{\delta(w)}^*)\} \geq c > 0$ 。

对于  $A \subseteq X$ ，设  $P^{(t)}\{x+Z \in A\}$  表示从  $x$  出发经过  $t$  步到达集合  $A$  的概率。

**引理 4** 可以找到正常数  $r$ ，使得对于  $x \in X$  满足  $U(x,w) \cap N_\varepsilon(X_{\delta(w)}^*) = \emptyset$ ，有  $P^{(r)}\{x+Z \in N_\varepsilon(X_{\delta(w)}^*)\} > 0$  成立。

证明：由已知条件  $U(x,w) \cap N_\varepsilon(X_{\delta(w)}^*) = \emptyset$  及引理 2 可得： $P^{(2)}\{x+Z \in U(x,w)\} > 0$ 。即从  $x$  出发经过 2 次迭代就有可能跳出以  $x$  为中心的局部散布区域  $U(x,w)$ 。

$X$  为有界闭集，令  $l = \max\{\|x_1 - x_2\| : x_1, x_2 \in X\}$ ； $l' = \max\{\|x_1 - x_2\| : x_1, x_2 \in U(x,w)\}$ 。则经过  $r = \lceil \frac{2l}{l'} \rceil + 1$  次趋同迭代，对于  $x \in X$  满足  $U(x,w) \cap N_\varepsilon(X_{\delta(w)}^*) = \emptyset$ ，有  $P^{(r)}\{x+Z \in N_\varepsilon(X_{\delta(w)}^*)\} > 0$  成立。故结论成立。

此时据引理 3 与引理 4 可以得到：

**定理 2** 对于趋同过程产生序列  $\{G_t\}$ ，如果  $G_t$  的尺寸无限大，则序列  $\{G_t\}$  强收敛于局部 Pareto 最优态集  $X_{\delta(w)}^*$ 。

## 4 数值实验

在实验中，Pareto-MEC 使用了 4 个不同类型的问题  $P_1, P_2, P_3, P_4$  进行测试。这 4 个测试函数对应于文献[3]中的  $t_1, t_2, t_3$  和  $t_6$  并且实验的条件与文献[3]中的相同。

算法的相关参数如下：群体尺寸  $S : 100$ ，子群体个数  $N : 5$ ，外部集尺寸 : 80。与本实验进行比较的算法 SPEA, NSGA, VEGA 和 Rand 的数据是在迭代了 250 次后得到的。

图 1~图 4 展示了 SPEA, NSGA, VEGA, Rand 以及 Pareto-MEC 这些方法所获得的 nondominated 的集合。各图中的实线表示 Pareto 最优前沿。这些图是数据在目标空间上的一种直观图。

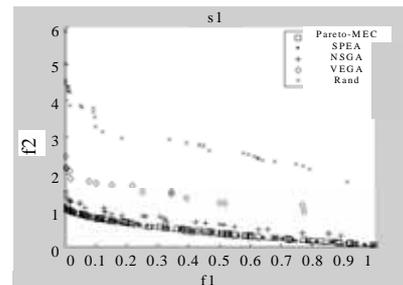


图 1 测试函数  $P_1$

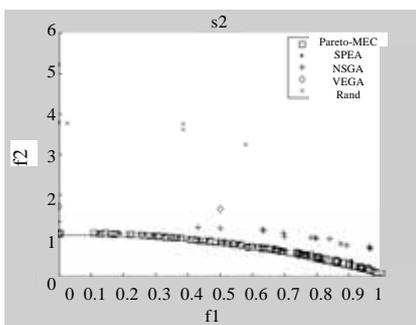


图2 测试函数P<sub>2</sub>

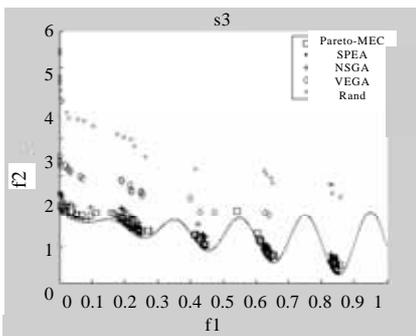


图3 测试函数P<sub>3</sub>

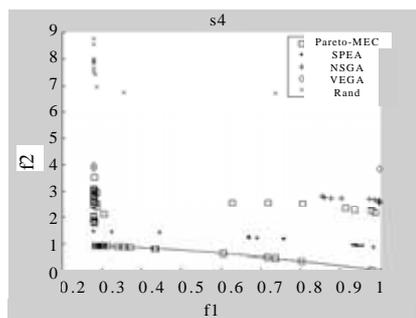


图4 测试函数P<sub>4</sub>

实验结果表明：Pareto-MEC所得到的性能在使用的测试函数P<sub>1</sub>、P<sub>2</sub>、P<sub>3</sub>和P<sub>4</sub>上都明显好于NSGA、VEGA和Rand。与当前性能较好且测试范围较广的SPEA相比，它在P<sub>1</sub>、P<sub>2</sub>和P<sub>3</sub>上与SPEA难分高下；在P<sub>4</sub>上，Pareto-MEC的各项性能（接近前沿的程度，扩展性和均匀性）都超越了SPEA。

## 5 结论

本文提出了一种新的多目标进化算法——Pareto-MEC。

(上接第 189 页)

如果把域值增大，“有用数据”的比率会进一步减小，同时绘制速度会进一步加快，但会影响绘制质量，实际中可以根据体数据的特性进行域值的设定。本文中域值为 0 时对应于实际图像的完全无贡献部分，所以不会影响绘制质量，图 9(a)~图 9(c)分别为体数据稀疏矩阵优化前、二元矩阵策略优化以及行压缩策略优化的对基准体数据的绘制图像，从 3 幅图比较，根据本文所提出的方法进行体数据的优化对图像质量的影响很小。

主要原理是将基本 MEC 和 Pareto 思想结合起来处理多目标问题。由于 MEC 是一种全局和局部搜索相结合的高效搜索算法，使得 Pareto-MEC 在处理多目标问题上能够较快地找到前沿而且获得的这个前沿具有很好的扩展性和均匀性。数值试验验证了 Pareto-MEC 算法的有效性，并从理论上讨论了在一定条件下趋同过程产生序列的收敛性。

在 Pareto-MEC 中的异化操作没有完全实现基本 MEC 中异化操作所起的作用；另外，单纯的 Pareto-MEC 算法不能解决目标数目很多的优化问题，会因为维数过高而得不到满意解。因此，完全实现基本 MEC 的基本思想，对算法进行改进值得我们进一步研究。

## 参考文献

- 1 Schaffer J D. Multiple Objective Optimization with Vector Evaluated Genetic Algorithms[D]. Vanderbilt University, 1984.
- 2 Fonseca C M, Fleming P J. An Overview of Evolutionary Algorithms in Multiobjective Optimization[J]. Evolutionary Computation, 1995, 3(1): 1-16.
- 3 Zitzler E. Evolutionary Algorithm for Multiobjective Optimization: Methods and Applications[M]. Aachen, Germany: Shaker Verlag, 1999.
- 4 Rodolph G, Agapie A. Convergence Properties of Some Multi-objective Evolutionary Algorithms[C]//Proceeding of the 2000 Congress on Evolutionary Computation, San Diego, CA. 2000: 1010-1016.
- 5 Hanne T. On the Convergence of Multi-objective Evolutionary Algorithms[J]. European Journal of Operational Research, 1999, 117 (3): 553-564.
- 6 Zitzler E, Thiele L, Laumanns M. Performance Assessment of Multiobjective Optimizers: An Analysis and Review[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2003, 7(2): 117-132.
- 7 Sun Chengyi, Sun Yan. Mind-evolution-based Machine Learning: Framework and the Implementation of Optimization[C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems, Vienna, Austria. 1998: 355-359.
- 8 孙承意, 周秀玲, 王皖贞. 思维进化计算的描述与研究成果综述[J]. 通讯与计算机, 2004, 1(1): 13-21.
- 9 周育人, 闵华清, 许孝元, 等. 多目标演化算法的收敛性研究[J]. 计算机学报, 2004, 27(10): 1415-1421.

## 参考文献

- 1 唐泽圣. 三维数据场可视化[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999: 1-8.
- 2 Mueller K, Shareef N. High-quality Splatting on Rectilinear Grids with Efficient Culling of Occluded Voxels[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer, 1999, 5(2): 116-134.
- 3 Subramanian K R, Fussell D S. Applying Space Subdivision Techniques to Volume Rendering[C]//Proc. of Visualization'90, San Francisco, California. 1990: 150-159.