

NURBS 扫描体的逼近算法研究

何朝阳^{1,2}, 李际军²

(1. 浙江工业大学之江学院, 杭州 310024; 2. 浙江大学计算机学院, 杭州 310027)

摘要: 提供了一种 NURBS 扫描体的逼近方法。该方法主要步骤: (1)通过系列平面切割, 把 NURBS 曲面(实体)进行降维处理, 变成平面曲线; (2)为曲线设置局部标架; (3)在局部标架下求出每一曲线在每一时刻的极值点后将之转换成原曲线的奇异点; (4)使用 marching cubes 算法剔除扫描体内部点, 保留扫描体边界上的奇异点; (5)由所有保留点拟合合成奇异曲面。本算法能较好地逼近 NURBS 扫描体, 其逼近精度可通过控制切割精度和扫描过程中时间间隔的选取而得到有效控制。

关键词: NURBS 曲面(实体); 扫描体; marching cubes 算法

Research on an Approximating Algorithm of NURBS Swept Volumes

HE Chaoyang^{1,2}, LI Jijun²

(1. Zhijiang College, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310024;

2. College of Computer Science, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

【Abstract】 This paper presents a method of approximating swept volume of NURBS surfaces or solids. The method consists of (1)slicing the NURBS surfaces or solids by a series of plane and forming the sliced curves; (2)setting up the local moving coordinate system; (3)determining the singular points by obtaining local maxima and minima points at discrete frames during motion with respect to the local coordinate system; (4)using fast marching cubes method trimming the inside points of the swept volumes; (5)fitting each NURBS singular surface (envelope) by approximating or interpolating method. The errors of this method would be controlled by the number of slicing plane and the interval of the motion times in sweeping.

【Key words】 NURBS surfaces or solids; Swept volume; Marching cubes algorithm

1 概述

扫描体(Swept Volume)是指一个物体在指定时间内沿空间一条任意路径移动而生成的实体所占据的几何空间总和^[1]。该物体可以是曲线、曲面或实体,我们称其为发生体;称发生体沿指定路径移动的过程为扫描。扫描体在数控验证、制造设计、机器人工作空间分析、实体造型设计、空间物体的碰撞检测以及功效设计等方面具有广泛应用。

在多年的研究过程中,人们提出了多种扫描体计算理论和方法,如雅可比降秩法或奇异点理论^[2]、扫描微分方程^[3]、包络理论^[4]、隐式造型^[5]等。这些理论都能精确计算出扫描体,但计算过程十分复杂,实现困难。近年来,人们开始寻求一些扫描体的逼近理论和算法。如在三维空间中,利用离散表示和等值面重构以及多边形网格逼近扫描体^[6]。另外,近年来,人们主要对参数曲线、曲面等的扫描体进行了重点研究,对NURBS曲线扫描的研究也有所涉及,这些扫描大多局限于生成的扫描体为一NURBS曲面。最近,文献[1]提出了一种NURBS实体扫描算法,该算法通过切割实体降维成曲线,求出在各曲线在扫描过程中各个时刻的奇异点,将这些奇异点拟合合成曲面即为扫描体的候选边界曲面,再对这些边界曲面进行裁剪,去掉在扫描体内部的曲面,得到真正的扫描体边界。

NURBS 实体扫描的研究有着非常重要的意义,特别是在NURBS 实体造型中,利用 NURBS 扫描体,可以构造出各种复杂的形状,以满足各种设计的需要。本文提出一种逼近NURBS 实体扫描的新算法。

2 NURBS 实体扫描的定义

NURBS 扫描体的计算比较复杂,以前的研究涉及较少,前期的研究中 NURBS 对曲线、曲面的扫描有所涉及,扫描生成体基本局限于一个曲面,如文献[7]提出了一种利用 NURBS 逼近 SWEEP 曲面的算法;文献[8]提供了一种用 NURBS 表示的规则曲面扫描的逼近方式,其生成的扫描体为一 NURBS 曲面。而在实际使用过程如实体造型中,需要大量涉及到 NURBS 实体扫描,因此,本文研究的 NURBS 实体扫描逼近具有重要意义。

设给定一 NURBS 曲面(实体) $S(u,v)$, $0 \leq u, v \leq 1$, 该 NURBS 曲面(实体)沿路径 $\Psi(t)$ 扫描,在扫描的同时沿旋转轴 Γ 旋转,旋转矩阵(3×3)为 $R(t)$, 则相应的扫描体可表示为

$${}^A\xi(u,v,t) = R(t)S(u,v) + \Psi(t) \quad (1)$$

注意,式(1)的左边实际上就是一个扫描体,但直接从该公式中求出扫描体是不现实的,因此,我们寻求一种 NURBS 扫描体的逼近算法,即通过求解扫描过程中的奇异点,拟合生成扫描体的包络面,从而实现对 NURBS 扫描体的逼近。

由于平面 NURBS 曲线的扫描体的求解简单、稳定,因此,在实现对 NURBS 曲面或实体的扫描中,可以通过使用一组离散的平行平面对其进行切割,其交线就是一条平面

基金项目: 浙江省科技计划重点基金资助项目(2004C21G2010027); 浙江省教育厅基金资助项目(20051440)

作者简介: 何朝阳(1970—),男,讲师、硕士生,主研方向:计算机图形学,数据库;李际军,博士、副教授

收稿日期: 2005-08-16 **E-mail:** hcy@zjc.zjut.edu.cn

NURBS 曲线。实际上，这一切割过程就是一个降维的过程，即把实体扫描简化为对系列平行曲线的扫描，然后通过拟合构成扫描体的边界曲面。具体算法如下：

- (1)用一组平行平面切割 NURBS 曲面(实体)并把交线重构为 NURBS 曲线；
- (2)在扫描过程中为每一平面曲线建立相应的活动标架并嵌入到该曲线中；
- (3)在活动标架下求出每一平面曲线在各时间间隔的极值点(极大值和极小值点)并转换成全局坐标系下的奇异点；
- (4)利用 marching cubes 算法删去扫描体内部点，保留扫描体真正边界上的奇异点；
- (5)根据上述保留的奇异点构建奇异曲面，生成 NURBS 扫描体。

3 算法的详细描述

3.1 切割发生体

用平面切割发生体的方向极其重要，它不仅影响每一切割曲线奇异点的求取，同时也影响奇异曲面拟合过程中的稳定性。一般来说，选择切割平面 γ 的原则应为： $n \cdot V_{Q_i'} \neq 0$ ，其中 n 为切割平面 γ 的法向量， $V_{Q_i'}$ 为切割形成的曲线的几何中心的绝对速度。

设切割平面 γ 和 $S(u, v)$ 相交而成的曲线为 ${}^A C^i(\lambda^i, t_i)$ ，其中 $\lambda^i (i=1, 2, \dots, \mathcal{X})$ 是第 i 条切割曲线的参数。过程如图 1。

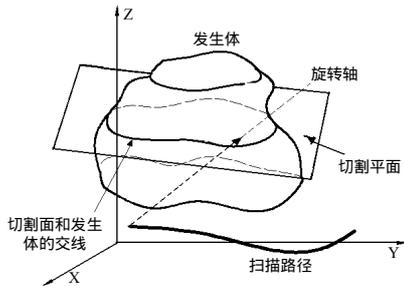


图 1 NURBS 发生体的切割和生成平面曲线

3.2 曲线 ${}^A C^i(\lambda^i, t_i)$ 生成

曲线 ${}^A C^i(\lambda^i, t_i)$ 的生成可借助于文献[9]提出的细分算法，通过获得一系列交点 $g_1^i, g_2^i, \dots, g_i^i$ ，根据这些交点，我们反算出该 NURBS 曲线的 k 个控制顶点 H_α^i 。再利用 NURBS 拟合算法，可得到节点向量 U ，基函数 $N_{\alpha,p}(\lambda^i)$ (其中 p 为曲线的次数， λ^i 为曲线的参数) 和对应节点的权值 ω_α 。这样，在 $t=t_1=0$ 时刻，第 i 条切割曲线为

$${}^A C^i(\lambda^i, 0) = \frac{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda^i) \omega_\alpha H_\alpha^i}{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda^i) \omega_\alpha} \quad (2)$$

而在 $t=t_j, j=1, \dots, \beta$ 时刻的曲线 ${}^A C^i(\lambda^i, t_j)$ 可定义为

$${}^A C^i(\lambda^i, t_j) = R(t_j) {}^A C^i(\lambda^i, 0) + \Psi(t_j) \quad (3)$$

将式 2 代入式 3，得

$${}^A C^i(\lambda^i, t_j) = R(t_j) \frac{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda^i) \omega_\alpha H_\alpha^i}{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda^i) \omega_\alpha} + \Psi(t_j) \quad (4)$$

这样，在给定的每一时间间隔，都可以求出曲线表达式。

如果能求出每一曲线的奇异点，就能通过拟合(插值)方法，得到相应扫描体的候选边界曲面。因此，接下来要求出曲线在扫描过程中的奇异点。

3.3 局部坐标的构造

为方便求出奇异点，将活动标架引入到所求曲线中是必要的。活动标架是扫描曲面中采用的一种局部坐标系。活动标架的取法多种多样，只要在该曲线所在的平面上取两个互相垂直的单位向量，再加上其法向量就可以作为一个活动标架。而在本算法中，活动标架可按如下方式进行构建：

(1)计算该平面曲线的单位法向量

在平面曲线上顺时针方向取 3 个点： $F_{1j}^i = {}^A C^i(\lambda_1^i, t_j)$ ， $F_{2j}^i = {}^A C^i(\lambda_2^i, t_j)$ 和 $F_{3j}^i = {}^A C^i(\lambda_3^i, t_j)$ ，其中 $\lambda_1^i < \lambda_2^i < \lambda_3^i$ 。根据这 3 个点，可以计算出 2 个互相不平行的向量：

$$F_{3j}^i - F_{2j}^i = R(t_j) \left(\frac{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_3^i) \omega_\alpha H_\alpha^i}{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_3^i) \omega_\alpha} - \frac{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_2^i) \omega_\alpha H_\alpha^i}{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_2^i) \omega_\alpha} \right) \quad (5)$$

$$F_{1j}^i - F_{2j}^i = R(t_j) \left(\frac{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_1^i) \omega_\alpha H_\alpha^i}{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_1^i) \omega_\alpha} - \frac{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_2^i) \omega_\alpha H_\alpha^i}{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_2^i) \omega_\alpha} \right) \quad (6)$$

这样其单位法向量(记为 e_{2j}^i)可通过以下公式求出：

$$e_{2j}^i = \frac{(F_{1j}^i - F_{2j}^i) \times (F_{3j}^i - F_{2j}^i)}{\|(F_{1j}^i - F_{2j}^i) \times (F_{3j}^i - F_{2j}^i)\|}$$

将式(5)和式(6)分别代入，得

$$e_{2j}^i = \frac{R(t_j) \left(\frac{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_1^i) \omega_\alpha H_\alpha^i}{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_1^i) \omega_\alpha} - \frac{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_2^i) \omega_\alpha H_\alpha^i}{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_2^i) \omega_\alpha} \right) \times R(t_j) \left(\frac{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_3^i) \omega_\alpha H_\alpha^i}{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_3^i) \omega_\alpha} - \frac{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_2^i) \omega_\alpha H_\alpha^i}{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_2^i) \omega_\alpha} \right)}{\left\| R(t_j) \left(\frac{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_1^i) \omega_\alpha H_\alpha^i}{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_1^i) \omega_\alpha} - \frac{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_2^i) \omega_\alpha H_\alpha^i}{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_2^i) \omega_\alpha} \right) \times R(t_j) \left(\frac{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_3^i) \omega_\alpha H_\alpha^i}{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_3^i) \omega_\alpha} - \frac{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_2^i) \omega_\alpha H_\alpha^i}{\sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda_2^i) \omega_\alpha} \right) \right\|}$$

在求出单位法向量后，局部坐标系还有 2 个单位向量 e_{1j}^i 和 e_{3j}^i 需要求出。

(2)求 e_{1j}^i 和 e_{3j}^i

e_{3j}^i 可以通过下式求得：

$$e_{3j}^i = \frac{V_{Q_j^i} \times e_{2j}^i}{\|V_{Q_j^i} \times e_{2j}^i\|}$$

由于式中 e_{2j}^i 已求出，因此求得 e_{3j}^i 的关键是求出 $V_{Q_j^i}$ ，即该平面曲线的几何中心 Q_j^i 的绝对速度。而 $V_{Q_j^i} = V_{P_j} + V_{j'}^i$ ，式中 V_{P_j} 是指即时中心 P_j 的速度，即 t_j 时刻旋转轴 Γ 和扫描轨迹 $\Psi(t)$ 的交点，因此 $V_{P_j} = \Psi'(t_j)$ 。而 $V_{j'}^i$ 是几何中心 Q_j^i 相对于即时中心 P_j 的相对速度，设 P_j 到 Q_j^i 的向量为 r_j^i ，绕 Γ 旋转的角速度为 ω ，则有 $V_{j'}^i = \omega \times r_j^i$ ，而 $r_j^i = Q_j^i - P_j = Q_j^i - \Psi(t_j)$ ， $Q_j^i = R(t_j) Q_1^i + \Psi(t_j)$ ，其中 Q_1^i 为 $t=t_1=0$ 时刻第 i 条切割曲线的几何中心。这样， Q_j^i 的绝对速度可简化为

$$V_{Q_j^i} = \Psi'(t_j) + \omega \times (R(t_j) Q_1^i) = \Psi'(t_j) + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times (R(t_j) Q_1^i) \quad (8)$$

根据所求得的 $V_{Q_j^i}$ 和 e_{2j}^i ，

$$e_{1j}^i = \frac{V_{Q_j^i} \times e_{2j}^i}{\|V_{Q_j^i} \times e_{2j}^i\|} = \frac{(\Psi'(t_j) + \omega \times (R(t_j) Q_1^i)) \times e_{2j}^i}{\|(\Psi'(t_j) + \omega \times (R(t_j) Q_1^i)) \times e_{2j}^i\|} \quad (9)$$

由于 $e_{1j}^i = e_{2j}^i \times e_{3j}^i$, 即

$$e_{1j}^i = e_{2j}^i \times \frac{(\Psi'(t_j) + \omega \times (R(t_j)Q_j^i)) \times e_{2j}^i}{\|(\Psi'(t_j) + \omega \times (R(t_j)Q_j^i)) \times e_{2j}^i\|} \quad (10)$$

到此, 完成了一个局部坐标系 $\{B\} = \{e_{1j}^i, e_{2j}^i, e_{3j}^i\}$ 的构造。

3.4 求奇异点

为方便求得平面曲线的奇异点, 需要把全局坐标系转换成局部坐标系, 然后通过解相应的微分方程求得。

坐标系的转换矩阵可定义为如下形式:

$${}^A T_B(t_j) = [e_{1j}^i \quad e_{2j}^i \quad e_{3j}^i] \quad (11)$$

这样, 原来全局坐标系下的曲线 ${}^A C^i(\lambda^i, t_j)$ 可通过如下

形式转换成局部坐标系下的曲线:

$${}^B C^i(\lambda^i, t_j) = ({}^A T_B(t_j))^T {}^A C^i(\lambda^i, t_j)$$

代入可得

$${}^B C^i(\lambda^i, t_j) = \begin{bmatrix} e_{2j}^i \times \frac{(\Psi'(t_j) + \omega \times (R(t_j)Q_j^i)) \times e_{2j}^i}{\|(\Psi'(t_j) + \omega \times (R(t_j)Q_j^i)) \times e_{2j}^i\|} & e_{2j}^i & \frac{(\Psi'(t_j) + \omega \times (R(t_j)Q_j^i)) \times e_{2j}^i}{\|(\Psi'(t_j) + \omega \times (R(t_j)Q_j^i)) \times e_{2j}^i\|} \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda^i) \omega_{\alpha} H_{\alpha}^i \\ R(t_j) \\ \sum_{\alpha=1}^k N_{\alpha,p}(\lambda^i) \omega_{\alpha} \end{pmatrix} + \Psi(t_j) \quad (12)$$

显然, 曲线 ${}^B C^i(\lambda^i, t_j)$ 刚好在平面 $e_{1j}^i Q_j^i e_{3j}^i$ 内, 而点 Q_j^i 的绝对速度 $V_{Q_j^i}$ 应该在平面 $e_{1j}^i Q_j^i e_{2j}^i$ 内。为了求得在 t_j 时刻曲线的奇异点, 有必要求出在局部坐标系 $\{B\} = \{e_{1j}^i, e_{2j}^i, e_{3j}^i\}$ 下的所有极值点。

在平面 $e_{1j}^i Q_j^i e_{3j}^i$ 中, 可得到如下微分方程:

$$\frac{d^B C^i(\lambda^i, t_j)_3}{d\lambda^i} = \frac{d\lambda^i}{d^B C^i(\lambda^i, t_j)_1} = 0 \quad (13)$$

式(13)的求解方法已有较多的研究, 我们可使用这些方法得到平面曲线的极值点 $\lambda^i = \tau \lambda^i, i=1, \dots, \kappa$, 其中 τ 可取值 1 或 2, 其含义分别是: $\tau=1$ 指极大值点, $\tau=2$ 指极小值点。把 $\tau \lambda^i, i=1, \dots, \kappa$ 代入曲线 ${}^A C^i(\lambda^i, t_j)$ 就可计算出在全局坐标系下相应的奇异点。这样, 随着 i 和 j 的变化, 可以求出所有切割曲线在所有时刻的奇异点。

3.5 利用 marching cubes 算法去除扫描体内部点

上述所求的奇异点包含两部分, 一部分在扫描体内部, 另一部分在扫描体的边界上。我们需要去除属于扫描体内部的点。以平面曲线扫描为例, 如图 2、图 3 所示。

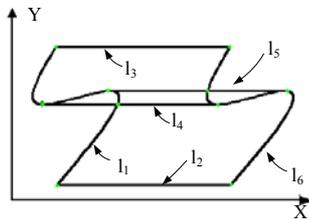


图 2 曲线扫描内部点的裁减示意图

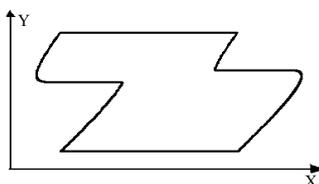


图 3 裁剪后的扫描体

图 2 中原始曲线 l_1 沿 X 轴扫描到 l_6 , 根据扫描理论, 应求出曲线中所有极值点的扫描线 l_2, l_3, l_4, l_5 , 如图 2 所示, 这些扫描线和 l_1 、 l_6 相交, 使得扫描线和曲线的部分存在于扫描体内部, 需要将这些在扫描体内部的线段删去, 删除内部线段后的扫描体如图 3 所示, 只保留了扫描体的真正边界。

扫描体内部点的去除可以有多种方法, 本文借助于 marching cubes 算法, 其主要原理如下: 给定一阈值 δ , 计算出点与点之间的距离, 同时将所有点的初始状态标注为 unknown 和 inside, 然后可以选定一个属于边界上的点开始一个循环:

(1) 初始化一栈, 将上述选定的点入栈;

(2) 如果栈非空, 把点出栈, 记为 p, 同时把 p 标记为 visited 和 outside, 转(3), 若栈为空则结束;

(3) 找出所有 p 的未被访问的邻界点记为 q, 若 pq 间的距离大于给定阈值 δ , 则将 q 入栈;

(4) 跳到(2)继续执行。

经过上述循环不断推进, 就可以得到所有标注为 visited 和 outside 的点, 这些点就可以近似为扫描体的边界点。

3.6 构建奇异曲面

由于已经求得了切割曲线在扫描过程任意时刻的奇异点, 同时通过 marching cubes 算法将属于扫描体内部的点删除, 因此, 奇异曲面 $\Phi(u, v), 0 \leq u, v \leq 1$ 可通过对奇异点的拟合(插值)生成, 这类奇异曲面称为扫描体中的第 1 类奇异曲面, 记为 Λ^1 ; 第 2 类奇异曲面(记为 Λ^2)是指扫描体 3 个参数 u, v, t 中任意一个设为极值(即上限和下限)时形成的曲面, 这样, 最后的扫描体边界可表示为: $\Lambda = \Lambda^1 \cup \Lambda^2$ 。

对于由已知点集重构 NURBS 曲面的方法, 在以前的研究中已有大量的成果可以利用, 这些方法主要有两类: 插值法和拟合法。插值法是指所生成的曲面精确经过所有的插值点, 显然, 这样的曲面具有较高的精度, 而拟合法是指在一定的精度要求下, 使生成的曲面逼近已知点集。在我们的研究中, 这两种方法均可使用。

4 误差分析

根据对上述算法的分析, 本算法的误差主要来自于两部分, (1)来自于切割过程中的切割精度即切割的平面数;(2)来自于扫描过程中对时间间隔的选取。

切割过程中的切割精度的控制在于切割平面的密集程度, 显然, 密集程度越高, 其形成的平面曲线越多, 对扫描母体(发生体)的逼近程度也就越高, 得到的扫描过程中的奇异点也就越多, 因此逼近扫描体的精度也就越高。当然, 其付出的代价是计算量的大量增加。因此, 在实际操作中, 应选择一种中间值, 既能有效保证逼近精度, 又要计算工作量适当。同时, 在时间间隔的选取上也是如此。本方法的误差分析可以在应用中根据实际需要选择适当的切割精度和时间间隔。

5 结论

本文对 NURBS 曲面(实体)在空间沿任意路径扫描而生成的扫描体的逼近方法进行了研究。利用切割, 对原 NURBS 曲面(实体)降维成一系列平面 NURBS 曲线, 利用包络原理, 求取这些曲线在各扫描时刻的奇异点, 把这些奇异点拟合成奇异曲面, 再对这些曲面进行裁剪, 即可求得扫描体外边界的逼近表示。实验表明, 该方法简单有效, 其逼近误差可通过控制切割精度以及控制扫描过程中的时间间隔来实现。

(下转第 63 页)