第 15 卷 第 5 期　　高能物理与核物理　　Vol. 15, No. 5
1991 年 5 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　May, 1991

高维 Kerr 度规中 Boson 的束缚态

蔡荣根　　　陈志坚
(青海师范大学物理系,西宁 810008)　(青海教育学院物理系,西宁 810008)

摘　　要

本文利用分离变量方法得到了在高维 Kerr 度规中玻色子径向波函数方程，由此讨论了在高维 Kerr 黑洞周围玻色子的束缚态. 结果表明，高维 Kerr 黑洞与玻色子不能形成量子束缚态，这一结论与玻色子有无质量无关.

一、引　言

最近几年，由于超弦理论[1]和 Kaluza-Klein 超引力理论[2]的发展，高维时空的物理问题引起了人们极大的兴趣，这是因为超弦理论要求时空是 1+9 维的，超引力理论要求时空是 1+10 维的，如果认为极早期宇宙也是高维的话，那么它是如何紧致到现在的可观察四维时空. 这时空紧致化问题正是现在理论物理的重要研究领域，研究高维时空与四维时空相对应的物理现象正是这一种需要. 关于高维时空中理论的研究现状，Eml'yanov 等曾详细地进行过评论[3]. Myers 等求得了高维时空的 Schwarzchild 度规，Reissner-Nordström 度规和 Kerr 度规，并讨论了高维时空中的黑洞问题，发现高维黑洞有与四维黑洞不同的性质[4]. 沈有根详细地讨论过高维时空稳态球体的内解[5]. 许殿彦研究过高维球对称时空中粒子的 Hawking 辐射，发现与时空维数有关[6]. Kantoski 等研究过高维时空中标量粒子的 Casimir 能量[7].

量子引力束缚态与量子宇宙和真空理论的研究有着重要联系，所以在四维时空中有许多作者进行过研究[8-11]. 基于上述思想，文献 [12] 中作者研究了高维球对称时空中荷电玻色子的束缚态，发现当时空无裸奇点时，不存在荷电玻色子的束缚态，与四维时空中的结论相同. 本文我们进一步讨论高维轴对称时空中玻色子的束缚态问题，结果表明，在高维轴对称时空中不可能存在玻色子的束缚态，这一结论与玻色子有无质量无关，与四维时空中的结论有些区别[11].

二、玻色子径向波函数方程

在球坐标中，D 维 ($D \geqslant 4$) 轴对称的 Kerr 度规为[13]

$$ds^2 = \frac{1}{\rho^2}(\Delta - a^2\sin^2\theta_1)dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \frac{2a}{\rho^2}[(r^2 + a^2) - \Delta]\sin^2\theta_1 dt d\theta_2$$

本文 1990 年 9 月 24 日收到.

$$-\rho^2 d\theta_1^2 - \frac{1}{\rho^2}[(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2\sin^2\theta_1]\sin^2\theta_1 d\theta_2^2 - r^2\cos^2\theta_1 d\theta_3^2$$
$$- r^2\cos^2\theta_1\sin^2\theta_3 d\theta_4^2 - \cdots - r^2\cos^2\theta_1\sin^2\theta_3\sin^2\theta_4\cdots\sin^2\theta_n d\theta_{n+1}^2, \tag{1}$$

其中

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta_1,\quad \Delta = (r^2+a^2) - r_0^n/r^{n-2},$$
$$r_0^n = 2GM/nc^2,\quad n = D-3. \tag{2}$$

为后面讨论的方便，将(1)式写成“Boyer-Lindguist”形式

$$ds^2 = \rho^2\left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta_1^2\right) + \frac{\sin^2\theta_1}{\rho^2}[(r^2+a^2)d\theta_2 - a dt]^2$$
$$-\frac{\Delta}{\rho^2}[dt - a\sin^2\theta_1 d\theta_2]^2$$
$$+ r^2\cos^2\theta_1[d\theta_3^2 + \sin^2\theta_3 d\theta_4^2 + \cdots + \sin^2\theta_3\sin^2\theta_4\cdots\sin^2\theta_n d\theta_{n+1}^2]. \tag{3}$$

弯曲时空中玻色子的 Klein-Gordon 方程为

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{|g|}\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)\phi(x) - \mu^2\phi(x) = 0, \tag{4}$$

其中 $\alpha, \beta = 1, 2, \cdots D$, μ 为玻色子质量，利用(3)式可将(4)式展开成

$$\left[\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\Delta\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{\Delta}\left[(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right]^2\right.$$
$$\left.-\frac{a^2}{r^2}\hat{L}^2 - \mu^2 r^2\right]\phi(x) + \left[\frac{1}{\sin\theta_1\cos^{n-1}\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin\theta_1\cos^{n-1}\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2} + a\sin\theta_1\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \frac{\hat{L}^2}{\cos^2\theta_1} - \mu^2 a^2\cos^2\theta_1\right]\phi(x) = 0, \tag{5}$$

式中

$$\hat{L}^2 = -\left[\frac{1}{\sin^{n-2}\theta_3}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\sin^{n-2}\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_3\sin^{n-3}\theta_4}\frac{\partial}{\partial\theta_4}\left(\sin^{n-3}\theta_4\frac{\partial}{\partial\theta_4}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{1}{\sin^2\theta_3\sin^2\theta_4\cdots\sin^2\theta_n}\frac{\partial^2}{\partial\theta_{n+1}^2}\right]. \tag{6}$$

设玻色子的定态波函数为

$$\phi(x) = e^{i(m\theta_2 - Et)}\chi(\theta_1)R(r)Y_l(\theta_3, \theta_4, \cdots\theta_{n+1}), \tag{7}$$

将(7)式代入(5)式并分离变量得

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^{n-1}\Delta\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left\{\frac{1}{\Delta}[am - (r^2+a^2)E]^2\right.$$
$$\left.-\mu^2 r^2 - \frac{a^2 l(l+n-2)}{r^2} - K\right\}R(r) = 0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{\sin\theta_1\cos^{n-1}\theta_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta_1}\left(\sin\theta_1\cos^{n-1}\theta_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta_1}\right)$$
$$-\left[\left(\frac{m}{\sin\theta_1} - aE\sin\theta_1\right)^2 + \frac{l(l+n-2)}{\cos^2\theta_1}\right.$$
$$\left.+ a^2\mu^2\cos^2\theta_1 - K\right]\chi(\theta_1) = 0, \tag{9}$$

$$\hat{L}^2 Y_l(\theta_3, \theta_4, \cdots \theta_{n+1}) = l(l+n-2) Y_l(\theta_3, \theta_4, \cdots \theta_{n+1}). \tag{10}$$

这里 $l = 0, 1, 2, \cdots$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, E 为玻色子的能量，K 为分离变量时引入的常数．将 $\chi(\theta_1)$ 定义为广义扁球函数，则有 $K > 0$[11]． $Y_l(\theta_3, \theta_4, \cdots \theta_{n+1})$ 为 $(n-1)$ 维球谐函数．对于讨论玻色子束缚态，我们仅需要考虑径向方程(8)，(8)式又可以写成如下简单形式

$$R''(r) + P(r)R'(r) + Q(r)R(r) = 0, \tag{11}$$

其中

$$P(r) = \frac{1}{r^{n-1}\Delta}\frac{d}{dr}(r^{n-1}\Delta), \tag{12}$$

$$Q(r) = \frac{1}{\Delta^2}[am - (r^2 + a^2)E]^2 - \frac{1}{\Delta}\left[K + \mu^2 r^2 + \frac{a^2}{r^2} l(l+n-2)\right]. \tag{13}$$

当 $n = 1$ 时，(13)式等式右边最后一项应取为零．

三、渐近解与束缚态

我们在黑洞的外视界 r_+ 附近讨论玻色子的束缚态．高维 Kerr 黑洞的视界由 $g^{rr} = \frac{\Delta}{\rho^2} = 0$ 决定，即由

$$r^n + a^2 r^{n-2} - r_0^n = 0, \tag{14}$$

决定．当 $n \geqslant 5$ 时，由 Galois 定理知，(14)式一般没有解析解，但由于 $r \to 0$ 时 $g^{rr} \to -r_0^n / r^{n-2}\rho^2$； $r \to \infty$ 时，$g^{rr} \to 1$，所以高维 Kerr 黑洞至少存在一个视界 r_+，使得 $g^{rr}|_{r_+} = 0$． $n = 1$ 时，即为通常的 Kerr 黑洞，通常的 Kerr 黑洞周围的玻色子束缚态在文献[8,11]中已有讨论，为方便下面我们主要讨论 $n = 2, 3, 4$ 的情况．

当 $r \to \infty$ 时，径向方程(11)满足束缚态要求的渐近解为

$$R(r) = \exp(-\sqrt{\mu^2 - E^2}\, r), \tag{15}$$

由(15)式可知，$r \to \infty$ 时的渐近解与时空维数无关．

1. $n = 2$ 时，五维 Kerr 黑洞只有一个视界

$$r_+ = \sqrt{GM - a^2}, \tag{16}$$

上式中已令 $c = 1$，但仍保留引力常数 G．令 $x = r - r_+$，当 $x \to 0$，$E \neq am/(a^2 + r_+^2)$ 时，方程(11)的渐近形式为

$$R''(x) + \frac{1}{x}R'(x) + \frac{D_1}{x^2}R(x) = 0, \tag{17}$$

其中 $D_1 = [am - (a^2 + r_+^2)E]^2 / 4r_+^2$，上式的解为

$$R(x) = \exp(\pm i\sqrt{D_1}\ln x). \tag{18}$$

这是一个共振态解，故这时不存在束缚态．

当 $x \to 0$，$E = am/(a^2 + r_+^2)$ 时，方程(11)的渐近形式为

$$R''(x) + \frac{1}{x}R'(x) - \frac{D_2}{x}R(x) = 0, \tag{19}$$

式中 $D_2 = (K + \mu^2 r_+^2 + a^2 l^2 / r_+^2)/2r_+$，上式可以化成零阶虚宗量 Bessel 方程[14]，其满

足束缚态要求的解只能取[11]

$$R(x)=I_0(2\sqrt{D_2x}),\tag{20}$$

由于 $I_0(0)=1$，$I_0(2\sqrt{D_2x}>0)>1$，因此 $I_0(2\sqrt{D_2x})$在 $x=0$ 邻域是增函数，为使波函数与 $R(\infty)\to 0$ 相连接，必须在 $0<x<\infty$ 区间中至少存在一个 x_0，使得 $R(x_0)$ 具有极大值，即 $R'(x_0)=0$，$R''(x_0)<0$。但由(11)式知

$$R''(x_0)=\frac{1}{x_0(x_0+2r_+)}\left[x_0(x_0+2r_+)(\mu^2-E^2)+\mu^2r_+^2+\frac{a^2l^2}{(x_0+r_+)^2}\right]>0,$$

与 $R(x_0)$ 为极大值相矛盾，故这时也无束缚态。

为了与四维极端 Kerr 黑洞情况相比较，下面研究 $a^2=GM$ 的极端情况。这时 $r_+=0$，当 $x\to 0$，$E\neq m/a$ 时，(11)式的渐近形式为

$$R''(x)+\frac{3}{x}R'(x)+\frac{D_3}{x^4}R(x)=0,\tag{21}$$

式中 $D_3=(am-a^2E)^2-a^2l^2$。当 $x\to 0$，$E=m/a$ 时，(11)式的渐近形式为

$$R''(x)+\frac{3}{x}R'(x)-\frac{D_4}{x^4}R(x)=0,\tag{22}$$

其中 $D_4=-a^2l^2$。显然方程(21)，(22)在 $x=0$ 邻域内无正则解[14]，也即在 $a^2=GM$ 这种极端情况下也无束缚态存在。

上面我们讨论的都是 $\mu\neq 0$ 的情况，当 $\mu=0$ 时，由(15)式知，只有当 $E=0$ 时才可能有束缚态存在，仿照上面的讨论可知当 $r_+=\sqrt{GM-a^2}$ 时，在 $x=0$ 邻域为共振态解；当 $r_+=0$ 时，在 $x=0$ 邻域无正则有解。所以在玻色子质量为零时，在五维 Kerr 黑洞周围也不可能存在玻色子的束缚态。

2. $n=3$ 时，由方程(14)知，六维 Kerr 黑洞也只有一个视界

$$r_+=\left[\frac{GM}{3}+\frac{1}{3}\left(G^2M^2+\frac{a^3}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[\frac{GM}{3}-\frac{1}{3}\left(G^2M^2+\frac{a^3}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}.\tag{23}$$

这时黑洞的角动量不受到质量的限制(即不满足不等式 $J\leqslant GM^2$，J 为黑洞的角动量，M 为黑洞的质量.)。方程(14)的另二个根为

$$y_1=\omega_1\left[\frac{GM}{3}+\frac{1}{3}\left(G^2M^2+\frac{a^3}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}+\omega_2\left[\frac{GM}{3}-\frac{1}{3}\left(G^2M^2+\frac{a^3}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}},$$

$$y_2=\omega_2\left[\frac{GM}{3}+\frac{1}{3}\left(G^2M^2+\frac{a^3}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}+\omega_1\left[\frac{GM}{3}-\frac{1}{3}\left(G^2M^2+\frac{a^3}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}},\tag{24}$$

式中

$$\omega_1=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}),\quad \omega_2=\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}).\tag{25}$$

当 $x\to 0$，$E\neq am/(r_+^2+a^2)$ 时，(11)式的渐近形式为

$$R''(x)+\frac{1}{x}R'(x)+\frac{D_1'}{x^2}R(x)=0,\tag{26}$$

其中 $D_1'=r_+^2[am-(r_+^2+a^2)E]^2/(r_+-y_1)^2(r_+-y_2)^2$。(26)式的解与(18)式形式完全相同，为共振态解，故这时不存在束缚态。当 $x\to 0$，$E=am/(r_+^2+a^2)$ 时，(11)式的

渐近形式为

$$R''(x)+\frac{1}{x}R'(x)-\frac{D_2'}{x}R(x)=0, \tag{27}$$

其中 $D_2'=r_+[K+\mu^2r_+^2+a^2l(l+1)/r_+^2]/(r_+-y_1)(r_+-y_2)$. (27) 式满足束缚态要求的解也只能取(20)式的形式. 同样为了与 $R(\infty)\to 0$ 相连接, 必须至少存在一个 x_0, 使得 $R(x_0)$ 具有极大值,但从函数 $Q(r)$ 的分析可知,这样的点 x_0 不存在 (见附录), 所以这时也不存在束缚态.

3. $n=4$ 时,七维 Kerr 黑洞也只有一个视界

$$r_+=\left[\frac{1}{2}(-a^2+(a^4+2GM)^{\frac{1}{2}})\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{28}$$

方程(14)的另三个根为

$$z_1=-r_+,\quad z_{2,3}=\pm i\left[\frac{1}{2}(a^2+(a^4+2GM)^{\frac{1}{2}})\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{29}$$

令 $x=r^2-r_+^2$, 则当 $x\to 0$, $E\neq am/(a^2+r_+^2)$ 时,(11)式的渐近形式为

$$R''(x)+\frac{1}{x}R'(x)+\frac{D_1''}{x^2}R(x)=0, \tag{30}$$

式中 $D_1''=r_+^2[am-(r_+^2+a^2)E]^2/4(r_+^2-z_2^2)^2$. 显然(30)式的解的形式与(18)式也完全相同,故不存在束缚态. 当 $x\to 0$, $E=am/(r_+^2+a^2)$ 时,(11)式的渐近形式为

$$R''(x)+\frac{1}{x}R'(x)-\frac{D_2''}{x}R(x)=0, \tag{31}$$

其中 $D_2''=[K+\mu^2r_+^2+a^2l(l+2)/r_+^2]/4(r_+^2-z_2^2)$, 解的形式与(20)式相同, 与 $n=2, 3$; $E=am/(r_+^2+a^2)$ 时同样的分析可知(见附录),这时也不可能存在束缚态.

四、结论与讨论

本文根据束缚态波函数 $x\to 0$ 时有限正则; $x\to\infty$ 时趋于零的要求,通过求渐近解的办法,发现在五维、六维和七维 Kerr 度规中不可能存在玻色子的束缚态, 这一结论与玻色子有无质量无关. 根据合理的推测及文献[12]的结果表明, 高维黑洞周围不可能存在量子引力束缚态,与在四维 Kerr 黑洞周围可能存在玻色子的束缚态的结论[9,11]不同. 如果极早期宇宙也是高维的话, 则本文的结论可能会对极早期宇宙中的一些物理问题产生一定的影响.

由于黑洞在理解量子引力理论中一些非微扰效应起着至关重要的作用, 因此考察高维黑洞以及它的一些量子效应对理解高维时空的理论是很重要的[4]. 另外, 在经典弦理论中,弦的角动量满足不等式 $J\leqslant\alpha' M^2$, 中性旋转黑洞的角动量满足 $J\leqslant GM^2$, 但在高维黑洞中 $(D\geqslant 6)$ 不等式 $J\leqslant GM^2$ 不被满足. 因此高维黑洞的这一特有性质、本文的结论以及一些与四维时空相对应的物理问题的研究结果可能会给我们理解为什么现在可观察时空是 1+3 维的提供一些信息.

附录：关于 $n=3,4$ 时 $R''(x_0)>0$ 的证明

1. $n=3$ 时

$$R''(x_0)=\frac{(x_0+r_+)^2}{x_0^2(x_0+r_+-y_1)(x_0+r_+-y_2)^2}\left\{\frac{x_0(x_0+r_+-y_1)(x_0+r_+-y_2)}{(x_0+r_+)}\left[K+\mu^2r_+^2\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{a^2l(l+1)}{(x_0+r_+)^2}+\mu^2x_0(x_0+2r_+)\right]-x_0^2(x_0+2r_+)^2E^2\right\}, \tag{A1}$$

上式右边前三项均大于零，考虑第四、五项之差有

$$\frac{x_0^2(x_0+2r_+)[(\mu^2-E^2)(x_0^2+3r_++2r_+^2)+y_1y_2\mu^2]}{(x_0+r_+)},$$

由于 $E^2<\mu^2$ 及由(24)式知 $y_1y_2>0$，所以上式也大于零，这样也就证明了 $R''(x_0)>0$.

2. $n=4$ 时

$$R''(x_0)=\frac{(x_0+r_+^2)^2}{x_0^2(x_0+r_+^2-z_2^2)^2}\left\{\frac{x_0(x_0+r_+^2-z_2^2)}{(x_0+r_+^2)}\left[K+\mu^2r_+^2+\frac{a^2l(l+2)}{x_0+r_+^2}+\mu^2x_0\right]-x_0^2E^2\right\}, \tag{A2}$$

同样右边前三项均大于零，考虑第四、五项之差有

$$\frac{x_0^2}{(x_0+r_+^2)}[x_0(\mu^2-E^2)+(r_+^2-z_2^2)\mu^2-r_+^2E^2],$$

由于 $\mu^2>E^2$，$z_2^2<0$，所以上式必大于零．这样也就证明了 $R''(x_0)>0$.

参　考　文　献

[1] Scherk, J., *Rev. Mod. Phys.*, **47**(1975), 123.
Schwarz, J. H., *Phys. Rep.*, **89**(1982), 223.
[2] Duff, M.J., et al., *Phys. Rep.*, **130**(1986), 1.
[3] Emelyanov, V. M., et al., *Phys. Rep.*, **143**(1986), 1.
[4] Myers, R. C. and Perry, M. T., *Ann. Phys.* (*N. Y.*), **172**(1986), 304.
Myers, R.C., *Phys. Rev.*, **D35**(1987), 455.
[5] 沈有根，科学通报，**34**(1989)，914；**34**(1989)，1557；**35**(1990)，203；物理学报，39(1990)，337.
[6] 许殿彦，科学通报，**33**(1988)，1702；**34**(1989)，1058.
[7] Kantowski, R., et al., *Phys. Rev.*, **D35**(1987), 549.
[8] 须重明，谢光中，科学通报，**25**(1980)，1063.
[9] de Flic, F., *Phys. Rev.*, **D19**(1979), 451.
[10] Zhang Duan-ming and Li Yuan-jie, Commun. in Theor. Phys. (Beijing, China), **4**(1985), 853.
[11] 章世伟，苏汝铿，物理学报，**31**(1982)，311；
李元杰，张端明，高能物理与核物理，**10**(1986)，412.
[12] 蔡荣根，科学通报，"高维球对称时空中荷电玻色子的束缚态"(待发表).
[13] Xu Dianyan, *Class. Quantum Grav.*, **5**(1988), 871.
[14] 郭敦仁著，数学物理方程，人民教育出版社，1965.

The Boson Bound States in the Higher Dimensional Kerr Metric

CAI RONGGEN

(*Department of Physics, Qinghai Normal University, Xining* 810008)

CHEN ZHIJIAN

(*Department of Physics, Qinghai Educational College, Xining* 810008)

ABSTRACT

The radial wave function equation of bosons in higher dimensional Kerr metric is obtained with the separation of variables. The boson bound states around higher dimensional Kerr black hole are discussed. It is found the boson bound states do not exist in higher dimensional Kerr geometry. This conclusion is independent with the boson mass.