第 55 卷 第 5 期
2004 年 5 月

化 工 学 报
Journal of Chemical Industry and Engineering (China)

Vol. 55 №5
May 2004

研究简报

含相变颗粒流体的 Rayleigh-Bénard 对流热启动

戴传山 司士荣
(天津大学机械工程学院，天津 300072)

关键词 Rayleigh-Bénard 对流 相变物质 线性稳定性 数值分析
中图分类号 TK 124 **文献标识码** A **文章编号** 0438-1157 (2004) 05-0824-04

ONSET OF RAYLEIGH-BÉNARD CONVECTION IN FLUID LAYER DISPERSED WITH PHASE-CHANGE-MATERIAL PARTICLES

DAI Chuanshan and SI Shirong
(*College of Mechanical Engineering*, *Tianjin University*, *Tianjin* 300072, *China*)

Abstract The onset of Rayleigh-Bénard convection in a fluid layer dispersed with phase-change-material particles was studied numerically by using the linear stability theory. The dimensionless fluctuation of specific heat Q with dimensionless temperature T was given as a form of sine-function $Q=1+b\sin(\psi T)$. Two kinds of numerical methods were used separately in the calculation of critical Rayleigh number Ra_{cr} and wave number k_{cr}. One was the numerical integration method using Simpson 1/3 rule, and the other was the numerical difference method of Runge-Kutta with Newton-Raphson iteration. Both methods showed the same calculation results that the critical Rayleigh number Ra_{cr} decreased monotonically with increase in the amplitude b of the sine-function, however, the critical wave number k_{cr} did not show much difference with the amplitude b of the sine-function while $\psi=\pi/2$, but exponentially increased while $\psi=\pi$.

Keywords Rayleigh-Bénard convection, phase change material, linear stability theory, numerical analysis

引　言

含固液相变颗粒的乳胶液流体是一种混合物质的复杂流体，这种流体在化工、空调等工业领域有较好的应用潜力，近年来对它的研究比较活跃[1~3]．人们把在一定温度范围内的潜热变化归结为表观比热容或有效比热容．在相变温度范围内，由于热物性的剧烈变化，对流换热的机理研究也就显得十分必要．而 Rayleigh-Bénard 对流问题是一个经典的复杂物理现象，它是指上下分别有固体冷却和加热面的自然对流问题．在重力场内，对水平放置的流体层，这种传热方式没有自然对流存在的充分条件，只有超过一定的临界状态时自然对流才会发生．由于这一问题也涉及到许多自然现象及工业技术问题，比如大气层、海洋、浅层地幔内的热对流现象，太阳能利用、铸造、低温核供热、液晶制作等工艺过程，一个多世纪以来对其研究从未间断[4]．尽管目前对 Rayleigh-Bénard 热对流稳定性问题研究的文献较多，但在热物性的变化对热对流稳定性影响的研究中大部分针对的是黏度随温度的

2003-08-22 收到初稿，2003-11-12 收到修改稿．
联系人及第一作者：戴传山，男，40 岁，博士，副研究员．

Received date: 2003-08-22.
Corresponding author: Dr. DAI Chuanshan. **E-mail**: csdai@yahoo.com

变化，而对其他热物性随温度变化对稳定性影响的研究较少．因为在小温差下其他热物性随温度线性变化的假设是适宜的，前人也进行了研究．但热物性随温度线性变化的假设对含固液相变颗粒流体不合适，将对结果带来很大误差．本文对表观比热容是温度的强非线性函数流体的热对流稳定性问题进行研究．在本文中，提出了含固液相变颗粒流体比热容随温度变化的近似函数即正弦函数，并对正弦函数的波幅和相角对临界参数的影响进行了理论分析．在判断流体稳定性问题中，目前通常采用的数学方法有线性和弱非线性两种方法．后者所涉及的数学问题比较复杂，因此经常采用线性分析方法．

本文对其他热物性为常数、比热容或表观比热容随温度变化的流体进行线性稳定性分析．虽然对变物性流体的热对流启动问题已有许多学者进行了研究[4~8]，但针对比热容随温度变化有较大波动的流体的热对流启动问题还未见文献报道．Stengel[8]等对黏度是温度的强函数即指数函数的流体和 Palm-Jenssen 流体的热对流启动问题进行了较系统的理论分析．本文在 Stengel 的基础上对比热容是温度的强函数流体进行了数值分析研究．在通常条件下这种流体很少存在，但最近十几年来，随着功能性热流体的开发，含相变物质的乳胶液的表观比热容随温度的变化比较大．本文采用两种数值方法进行计算程序的考证，同时与 Stengel 等对黏度变化较大流体的结果进行了对比，计算结果一致．本文对这两种数学方法和一些计算结果进行简单描述．

1　数学模型的建立

考虑两个等温条件下的无限大水平平板间充满流体，下面加热温度为 T_{h}，上面冷却温度为 T_{c}．在采用 Boussinesq 流体假设的基础上，流体层内 N-S 方程的线性波动量可以表示成如下矢量方程形式[8]

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}=-\frac{\nabla p'}{\rho_0}-g\beta\theta+\upsilon\nabla^2\mathbf{V} \tag{1}$$

$$\frac{\partial(Q\theta)}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla(Q\widetilde{T})=a\nabla^2\theta \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{V}=0 \tag{3}$$

其中

$$Q=c_p/c_{p0}$$

对以上 3 个方程式进行标准量纲 1 化后，对式（1）进行两次求叉积，式（2）直接微分，舍去 x、y 方向量，并采用 Rayleigh 假设

$$\theta=\Theta\mathrm{e}^{-i(k_x x+k_y y)}，\ w=W\mathrm{e}^{-i(k_x x+k_y y)}$$

可得到如下两个关于 Θ 和 W 的常微分方程

$$Rak^2\Theta=(D^2-k^2)^2W \tag{4}$$

$$(D^2-k^2)\Theta+[Q-DQ(1-Z)]W=0 \tag{5}$$

$c_{p,0}$ 为参考比热容，本文取自流体层冷却板温度下的比热容．Q 假设为温度的正弦函数，即

$$Q=1+b\sin(\psi T)$$

式中　b 为常数，b 值的大小反映流体内相变物质的潜热与在此温度范围内显热的比值，b 值越大意味着相变物质的浓度越大或相变过程中的焓值变化越大．在初始导热状态下，温度是高度的线性函数，$T=1-Z$，因此 Q 也是高度 Z 的函数．ψ 为相角，在$\psi=\pi/2$时表示加热表面处有最大的比热容，而当$\psi=\pi$时加热表面和冷却表面有着相同的比热容，流体层中心处有最大比热容．k 为水平波频数

$$k^2=k_x^2+k_y^2$$

Ra 为 Rayleigh 数，定义式为

$$Ra=\frac{\beta g(T_{\mathrm{h}}-T_{\mathrm{c}})h^3}{\upsilon\alpha}$$

有关以上两式的具体推导可参见文献［4］.

2　数值求解方法

在有上、下两固体边界的条件下，波动量的边界值为 $\Theta=W=\mathrm{D}W=0$，即温度和速度的任何波动在固体边界处都将消失，而且速度波动的微分量也为零．对此类边值问题方程的求解常采用数值方法，如数值微分加打靶子方法、数值积分方法等．

2.1　数值积分解

本文的数值积分解法是采用标准的 Simpson 三分之一积分法则，输入一个 Ra 的猜测值．采用 Simpson 积分法则对低阶微分变量进行积分，由边界条件确定积分的初始值，得到一组关于最高阶变量的系数矩阵．如果所输入的 Ra 是方程的解，系数矩阵应为零，即矩阵为齐次．然后，采用求代数方程组全解的 QR 方法得到矩阵的最小正数特征值．通过所得到的特征值求所对应的特征向量，得到干扰量 Θ 和 W.

2.2　数值微分解

采用 Runge-Kutta 或其他微分方法求向前微分，得到另一个边界值．如果另一个边界值不满足条件，返回并采用 Newton-Raphson 方法重新赋初始值．满足条件后，计算 Θ 和 W.

积分解法比较直观，从计算过程来看，数值微

分解法比积分解法计算速度快，也精确得多．采用微分解法，网格数 N 为 80 时对上、下有自由边界的流体层计算的结果是：临界 Rayleigh 数 $Ra_{cr}=657.511404$，临界水平波频数 $k_{cr}=2.22144176$．与精确解 $Ra_{cr}=27\pi^4/4$、$k_{cr}=\pi/\sqrt{2}$ 相比，相对误差皆在 10^{-6} 之内．对上、下为固定边界的计算结果：$Ra_{cr}=1707.7621$，$k_{cr}=3.11633$．这一结果比以往报道的解精确[5,9,10]．在图 1 中，上、下水平虚线对应的是网格数 N 为 80 时的微分解法得到的 k_{cr} 和 Ra_{cr}（认为是精确解），空心圆是积分解法得到的 k_{cr}，实正方形是积分解法得到的 Ra_{cr}．可以看出，随着网格数 N 的增加，积分解法的 Ra_{cr} 接近于精确解，而 k_{cr} 略大于精确值．这主要是由于积分解法在边界条件的处理上带来的误差所致．

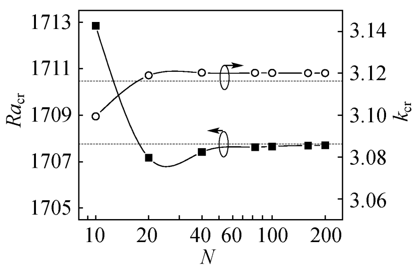


Fig. 1 Grid dependence test for Rayleigh-Bénard problem using standard integration method

3 计算结果及比较

本文主要是改变常数 b，在相角 $\psi=\pi/2$ 及 $\psi=\pi$ 的两种情况下，对上、下为固体边界的 Rayleigh-Bénard 热对流启动问题进行了计算．如图 2 所示，冷却表面温度始终为 $T=0$，所以 $Q=1$．而加热表面温度为 $T=1$，在 $\psi=\pi/2$ 时 $Q=1+b$，在 $\psi=\pi$ 时 $Q=1$．

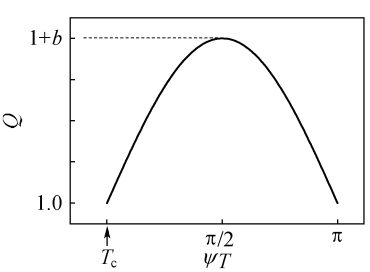


Fig. 2 Given relationship of normalized specific heat capacity with temperature

图 3、图 4 分别给出了在 $\psi=\pi/2$，π 两种情况下 Ra_{cr} 和 k 随波幅常数 b 的变化规律．由图 3 可以看出，这两种情况下的 Ra_{cr} 都随 b 的增加而指数关系减小．亦即，比热容随温度的增加使 Ra_{cr} 降低，在较低的 Ra 下热对流即可启动．同时，在 $\psi=\pi/2$ 时，Ra_{cr} 比在 $\psi=\pi$ 时的 Ra_{cr} 还要小．这一结论意味着，冷却表面温度不变，而加热表面温度从低相角向高相角方向升高时，自然对流更容易在中途 $\pi/2$ 相角处而不是 π 相角处产生热对流．相对应的 k 值在两种情况下却不同，$\psi=\pi/2$ 时 k 基本上保持不变，而 $\psi=\pi$ 时 k 呈指数函数形式增加．

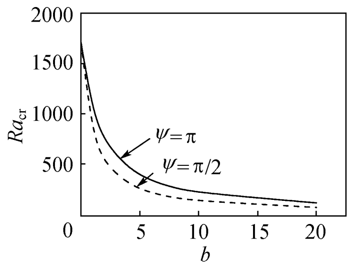


Fig. 3 Critical Rayleigh number *versus* b for slurry with variable specific heat

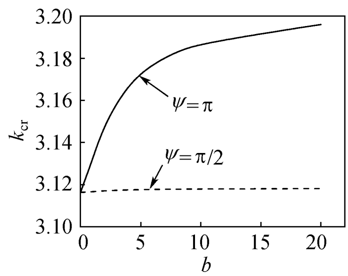
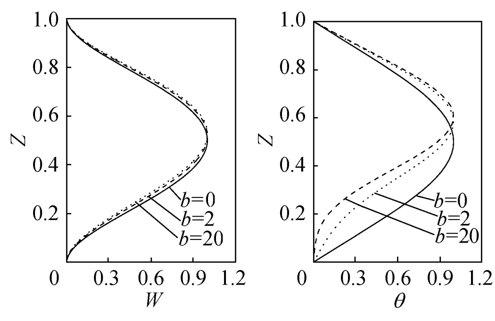


Fig. 4 Critical wave number *versus* b for slurry with variable specific heat

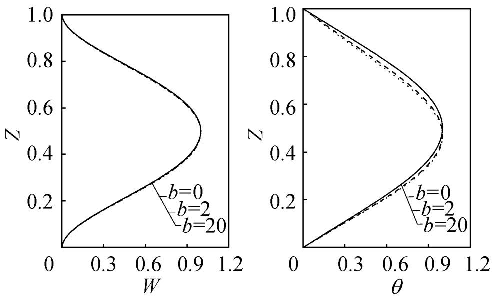
为了更详细地了解在热对流启动时流体层内的温度和速度的分布情况，本文给出了这两种临界状态情况下的速度和温度向量，如图 5 和图 6 所示．在相角为 $\psi=\pi/2$ 时，波幅 b 的变化对临界状态时的温度和速度分布影响不大．随着 b 的增加，最大温度扰动量略向加热表面方向下移．这也恰好说明



(a) vertical velocity (b) temperature eigenvectors

Fig. 5 Vertical velocity and temperature eigenvectors for $\psi=\pi$

水平波频数基本保持不变的结果．而在 $\psi=\pi$ 的情况下，速度的最大干扰量略向上移动，而最大温度干扰量也较大幅度地向上移动，加热表面附近的温度干扰量随 b 的增加而减小．说明尽管在流体层的平均温度时比热容 Q 最大（相变过程吸收或释放的潜热最多），但这一过程是在接近加热表面处发生，使得接近加热表面的温度干扰量接近于零.



（a）vertical velocity　（b）temperature eigenvectors

Fig. 6　Vertical velocity and temperature eigenvectors for $\psi=\pi/2$

4　结　论

对比热容随温度正弦关系变化的流体的 Rayleigh-Bénard 对流热启动问题进行了线性稳定性分析．分别采用了数值积分和数值微分两种计算方法进行计算，所得结果一致．结果表明：比热容随温度正弦关系变化的流体，临界 Rayleigh 数随正弦波幅的增加而单调减小．这一结论说明，含潜热相变物质的流体，如含相变颗粒的乳胶液流体，其临界 Rayleigh 数随着相变物质浓度的增加而减小.

在流体层内平均温度对应于比热容最大值的条件下，发生相变过程的位置接近于加热表面，而不是冷却表面．而加热表面温度对应比热容最大值时，流体波频数、温度和速度干扰量的分布基本上保持不变.

符　号　说　明

b——量纲 1 正弦比热函数的波幅

c_p——等压比热容，$\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$

D——垂直向微分算子

D——流体层厚度，m

g——重力加速度，$\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

k——水平波频数

k_x，k_y——分别为 x 向和 y 向水平波频数

p——量纲 1 压力

Q——量纲 1 比热容（$Q=c_p/c_{p0}$）

Ra——Rayleigh 数

T——温度，K

$\tilde{T}$——量纲 1 垂直向温度（$\tilde{T}=1-Z$）

t——时间，s

$\mathbf{V}$——速度矢量，$\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

W——垂直向最大速度干扰量

w——垂直向速度干扰量

Z——量纲 1 垂直坐标（向上为正）

α——热扩散系数、对流传热系数

β——体积热膨胀系数

Θ——最大温度干扰量

θ——温度干扰量

ν——运动黏度，$\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$

ρ——密度，$\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$

ψ——相角

下角标

c——冷壁面

cr——临界

h——热壁面

0——参考点

References

1　Birdi K S. Handbook of Surface and Colloid Chemistry. Florida：CRC Press，1997

2　Inaba H. New Challenge in Advanced Thermal Energy Transportation Using Functionally Thermal Fluids. *Int. Journal of Thermal Sciences*，2000，**39**：991—1003

3　Inaba H，Dai C，Horibe A. Natural Convection Heat Transfer of Microemulsion Phase-Change-Material Slurry in Rectangular Cavities Heated from Below and Cooled from Above. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*，2003，**46**（23）：4427—4438

4　Getling A V. Rayleigh-Bénard Convection：Structures and Dynamics. Advanced Series in Nonlinear Dynamics. Singapore：World Scientific Press，1998

5　Pellow A，　Southwell R V. On Maintained Convective Motion in a Heated from Below. *Proc. Roy. Soc. Lon. Ser. A*，1940，**176**：312—343

6　Jenssen O. Note on the Influence of Variable Viscosity on the Critical Rayleigh Number. *Acta Polytech. Scand.*，1963，**24**：1—12

7　Hoard C Q，Robertson C R，Acrivos A. Experiments on the Cellular Structure in Bénard Convection. *Int. J. Heat Mass Transfer*，1970，**14**：849—862

8　Stengel K C，Oliver D S，Booker J R. Onset of Convection in a Variable-viscosity Fluid. *J. Flow Mech.*，1982，**120**：411—431

9　Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford：Oxford University Press，1961

10　Lan C H，Ezekoye O A，Howell J R，Ball K S. Stability Analysis for Three-dimensional Rayleigh－Bénard Convection with Radiatively Participating Medium Using Spectral Methods. *Int. J. Heat Mass Transfer*，2003，**46**：1371—383