

# 混沌吸引子随机性的一种判别方法

冯明库<sup>1,2</sup>, 薛迎霄<sup>2</sup>

FENG Ming-ku<sup>1,2</sup>, XUE Ying-xiao<sup>2</sup>

1.华南理工大学 电子与信息学院, 广州 510640

2.广东技术师范学院 电子信息工程系, 广州 510665

1.College of Electronics & Information, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China

2.Department of Electronic Information Engineering, Guangdong Polytechnical Normal University, Guangzhou 510665, China

**FENG Ming-ku, XUE Ying-xiao. Method to identify random characteristic of chaotic attractors. Computer Engineering and Applications, 2007, 43(15): 56-58.**

**Abstract:** In chaos scientific domain, there has been no common criterion about the strength of random characteristic of chaotic attractors up to now. In this paper, a principle and an algorithm about that are proposed, and the method doesn't need phase space construction. Then the method is applied to simulate the periodic motion, the strong and weak chaos, two kinds of discrete map and white Gaussian noise. The result shows that the method is valid to identify the strength of random characteristic of different chaotic motions.

**Key words:** random characteristic; chaos; Logistic map; Henon map; white Gaussian noise

**摘要:** 在混沌科学领域, 截至目前混沌吸引子随机性强弱还没有一个统一的评判标准, 文章尝试提出了一种判别混沌随机性强弱的原理和算法, 且该方法不需要相空间重构。应用该方法对周期运动、强弱混沌、两种离散混沌映射及噪声进行数值仿真, 结果表明该方法能有效识别不同混沌运动的随机性强弱。

**关键词:** 随机性; 混沌; Logistic 映射; Henon 映射; 高斯白噪声

文章编号: 1002-8331(2007)15-0056-03 文献标识码: A 中图分类号: O213

## 1 引言

众所周知, 混沌是确定性系统中产生的类随机信号。由于其对系统参数和初始值敏感依赖和类随机性等特点, 现已被广泛应用于保密通信研究中, 因此混沌序列的随机性强弱就成为其能否被可靠地用于保密通信的重要依据。随机性, 一般定义为系统运动的结果是难以认知和不可预测的<sup>[1-4]</sup>。而自 20 世纪 60 年代科学界掀起混沌学的研究热潮以来, 有关对混沌类随机性判定的文献报道不多, 且还没有一个统一标准。也曾有学者和专家对混沌是确定性系统的类随机性进行了研究如文献[5-10], 但基本上是基于信息熵或相空间重构的思想来对混沌运动的随机性进行判别的, 理论计算烦琐。

最近 Gottwald 和 Melbourne 提出了一种测试方法<sup>[11]</sup>, 但 JingHu 随即指出这种方法的不足之处。JingHu 在文献[12]指出这种测试方法能把确定性的临界混沌或弱混沌误判为规则运动, 而把高斯白噪声判定为确定性的混沌运动。本文采用对一个连续映射, 一组相近连续的点会映射到另一组相近连续的点的事实, 根据混沌周期轨道理论, 提出了一种混沌类随机性强弱的一种判别方法。并应用此方法对 Logistic 强弱混沌映射、Henon 混沌映射、周期运动和白噪声进行了随机性判别。实验结果表明, 此方法能有效判别混沌运动的类随机性。

需要指出的是, 本文提到的随机性是从通信意义的角度而言, 不是实际物理系统产生的随机性信号的随机性。

## 2 混沌随机性判定原理及算法设计

假设给定一个时间序列  $\{s(n)\}=s(1), s(2), \dots, s(n), \dots$ , 此序列可能是映射迭代产生或实验得出的。根据文献[13, 14]中相空间连续的观点, 可以得出这样的事实: 一个连续映射, 一组相近连续的点会映射到另一组相近连续的点。本文根据混沌的周期轨道理论, 先由混沌序列计算得到一条混沌准闭轨, 确定两组映射序列。准周期轨道算法原理<sup>[15]</sup>: 首先设定一个误差上限  $\varepsilon$ , 考察相空间中的一个相点  $i$ , 由该点出发的相轨运动一段时间以后回到该点附近点  $l$ 。若二者的距离小于设定的误差上限, 则此两点之间的相轨可以近似地看作一个周期轨道。由点  $i$  和点  $l$  开始分别向前的连续点, 看作是具有映射关系的两个时间序列, 假定分别为  $\{x_j\}$  序列和  $\{y_j\}$  序列:

$$\{x(j)\}=x(1), x(2), \dots, x(j), \dots \quad (1)$$

$$\{y(j)\}=y(1), y(2), \dots, y(j), \dots \quad (2)$$

用  $\{y_j\}$  序列减去  $\{x_j\}$  序列得到一个新的差序列  $\{v_j\}$ , 其中  $v_j = y_j - x_j$ 。显然, 若  $\{s(n)\}$  是周期运动序列, 则  $\{v_j\}$  是一全零序列; 若  $\{s(n)\}$  是噪声序列, 则  $\{v_j\}$  仍然是一噪声序列。

为了使各待检序列统一标准, 先将差序列  $\{v_j\}$  进行归一化, 再计算平均值

$$\langle v \rangle = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k v_j \quad (3)$$

为了判别待检时间序列  $\{s(n)\}$  的随机性强弱, 定义如下

公式:

$$E = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \|v_j - \langle v \rangle\|^2 \quad (4)$$

$E$  就是时间序列  $\{s(n)\}$  的随机性强弱的表征, 在本文中称之为随机性强度。若  $E=0$ , 说明序列  $\{s(n)\}$  是周期的, 没有随机性; 若  $E=1$ , 说明序列  $\{s(n)\}$  是随机的, 随机性最强, 周期性最弱, 可视为无周期; 若  $0 < E < 1$ , 说明序列  $\{s(n)\}$  是类随机的, 越远离 0, 类随机性越强。

根据以上原理, 可给出如下计算时间序列  $\{s(n)\}$  的随机性强度的算法:

- (1) 由混沌运动方程或实验数据得到时间序列  $\{s(n)\}$ 。
- (2) 对时间序列  $\{s(n)\}$  进行归一化。
- (3) 设定一个误差上限  $\varepsilon$ , 寻找时间序列  $\{s(n)\}$  的准闭轨。
- (4) 计算  $\{x_j\}$  序列和  $\{y_j\}$  序列以及它们的差序列  $\{v_j\}$ 。
- (5) 给定一个  $k$ , 计算差序列  $\{v_j\}$  的平均值  $\langle v \rangle$ 。
- (6) 按公式(4)计算给定  $k$  对应的随机性强度  $E$ 。
- (7) 改变  $k$  的值, 重复步骤(5)和(6)计算随机性强度  $E$ 。
- (8) 以  $k$  为自变量, 画出随机性强度  $E$  随  $k$  的变化曲线。

### 3 数值仿真实验与分析

根据以上随机性强度计算原理和算法设计, 本文对周期运动和白噪声、Logistic 弱混沌、Logistic 强混沌、Henon 映射混沌进行了随机性判别, 并进行了定性分析。

#### 3.1 周期运动和白噪声

对于周期运动, 假设其运动方程为  $f(t) = A \cos(\omega t + \psi)$ , 在寻找其准闭轨时, 找到的其实是真正的周期轨道, 是完全闭合的轨道, 所以其两个映射序列  $\{x_j\}$  序列和  $\{y_j\}$  序列的对应点是同相点, 进而得到差序列  $\{v_j\}$  是全零序列, 通过公式(4)计算得到的随机性强度都是 0, 不管  $k$  为多大。也就是说, 周期运动是周期的, 不是随机的, 故其随机性强度为 0。

对于离散白噪声, 其平均值是 0, 自相关函数在  $\tau=0$  时为  $\sigma^2$ ,  $\tau \neq 0$  时为 0。假定这里以标准高斯白噪声为例, 即  $\sigma=1$ , 与算法步骤 2 中的归一化操作对应。由于白噪声的随机性, 其两个映射序列  $\{x_j\}$  序列和  $\{y_j\}$  序列的差序列  $\{v_j\}$  仍然是一噪声序列, 显然公式(3)计算得到差序列  $\{v_j\}$  的平均值是 0, 进而计算公式(4), 得到其随机性强度  $E=1$ 。也就是说, 高斯白噪声是随机的, 非周期的。图 1 是周期运动和高斯白噪声的随机性强度曲线。

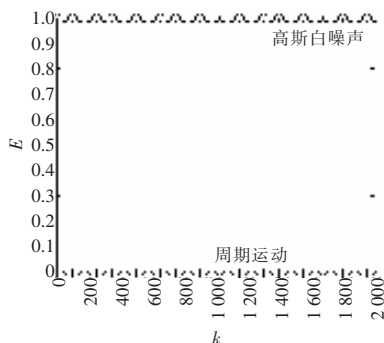


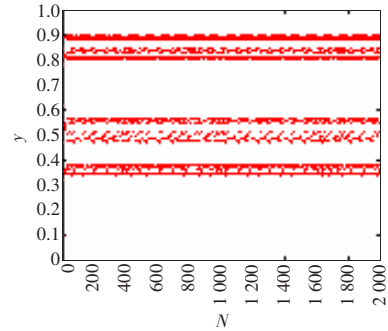
图 1 周期运动和白噪声的随机性强度曲线

#### 3.2 Logistic 映射弱混沌运动和强混沌运动

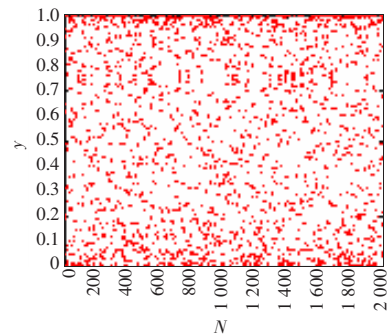
Logistic 映射的方程为:

$$x(n+1) = \mu x(n)(1-x(n)) \quad x \in [0, 1], \mu \in (0, 4] \quad (5)$$

当  $\mu_0=3.569\ 945\ 672$  时, 系统处于周期运动和混沌运动的临界状态; 当  $\mu=\mu_0+0.001$  时, 系统处于弱混沌状态<sup>[2]</sup>, 当  $\mu=4$  时, 系统处于强混沌状态。图 2(a)和(b)分别是这两种情况下的混沌序列迭代图, 横坐标为迭代次数, 纵坐标为其序列值, 由图可见, 在系统处于强混沌状态下, 序列迭代值几乎遍历整个有限空间, 随机性更强。



(a) Logistic 弱混沌



(b) Logistic 强混沌

图 2 Logistic 混沌迭代图

表 1 Logistic 映射和 Henon 的随机性强度

$k$	随机性强度 $E$		
	Henon 混沌	Logistic 强混沌	Logistic 弱混沌 ( $\times 10^{-4}$ )
1	0	0	0
50	0.129 5	0.144 9	3.345 8 $\times 10^{-7}$
100	0.111 7	0.190 6	1.363 0 $\times 10^{-5}$
150	0.120 3	0.218 4	9.936 7 $\times 10^{-4}$
200	0.121 4	0.218 3	3.855 0 $\times 10^{-2}$
250	0.127 7	0.221 8	4.800 4 $\times 10^{-2}$
300	0.132 8	0.226 5	9.405 4 $\times 10^{-2}$
350	0.135 8	0.230 1	1.186 1 $\times 10^{-1}$
400	0.136 4	0.236 0	1.474 3 $\times 10^{-1}$
450	0.138 2	0.237 4	1.310 5 $\times 10^{-1}$
500	0.136 4	0.241 2	1.179 5 $\times 10^{-1}$
550	0.139 4	0.248 1	1.072 3 $\times 10^{-1}$
600	0.143 7	0.256 6	9.842 0 $\times 10^{-2}$
650	0.146 6	0.250 2	9.859 3 $\times 10^{-2}$
700	0.148 2	0.248 4	1.146 3 $\times 10^{-1}$
750	0.150 1	0.249 7	1.185 8 $\times 10^{-1}$
800	0.151 7	0.244 8	1.149 3 $\times 10^{-1}$
850	0.152 7	0.248 3	1.380 3 $\times 10^{-1}$
900	0.152 6	0.248 8	1.652 9 $\times 10^{-1}$
950	0.153 6	0.249 3	1.746 2 $\times 10^{-1}$
1 000	0.152 6	0.247 7	1.807 4 $\times 10^{-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2 000	0.151 5	0.253 3	1.918 5 $\times 10^{-1}$

应用本文的随机性强度计算方法,对 Logistic 映射的强弱混沌运动求其随机性强度。取误差上限  $\varepsilon=0.0001$ ,迭代次数为 50 000<sup>[5]</sup>,得到图 3(a)、(b)所示的随机性强度曲线。图 3(a)、(b)画出了两对映射序列的随机性强度,每对映射序列对应着一条周期轨道。图 3(a)在  $k=400$  时,曲线上出现了尖峰(箭头所示放大图像),说明映射有分岔现象存在。从图 3 和表 1 可以看出,系统处于弱混沌状态时,其随机性强度仅为  $0.19 \times 10^{-4}$  左右,而当系统处于强混沌状态时,其随机性强度达到 0.24 左右,分岔现象出现在  $k=600$ 。

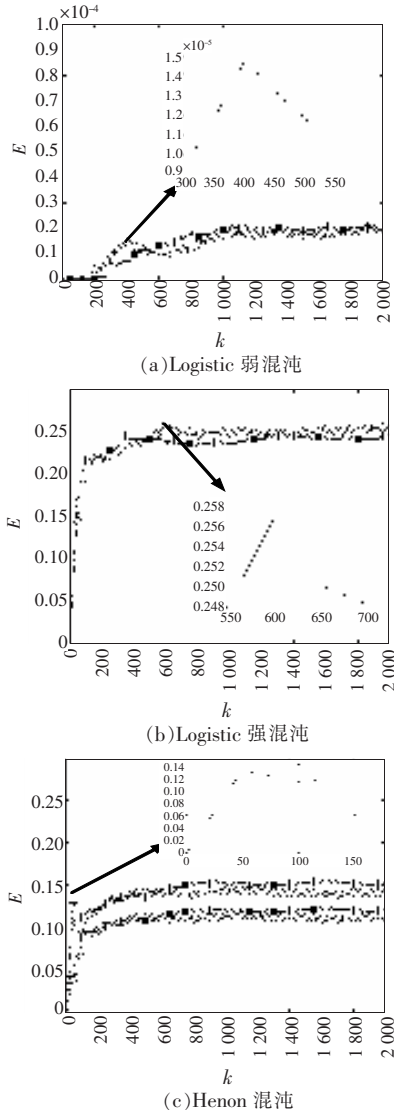


图 3 离散混沌映射的随机性强度曲线

### 3.3 Henon 混沌映射运动和 Logistic 混沌映射运动

$$\begin{cases} x(n+1)=1+y(n)-ax(n)^2 \\ y(n+1)=bx(n) \end{cases} \quad (6)$$

上述方程即是二维离散 Henon 映射,属于相体积耗散系统。当  $a=0.3, b \in [1.07, 1.4]$  时, Henon 映射处于混沌状态。本文数值仿真时  $b=1.4$ ,现在对公式(6)的 Henon 映射混沌运动的随机性强度进行数值仿真计算并与公式(5)的 Logistic 映射混沌运动做比较,同样取误差上限  $\varepsilon=0.0001$ ,迭代次数为 50 000,随机性强度曲线如图 3(c)所示。图中上方的两条曲线是变量  $y$  的随机性强度曲线,下方的两条曲线是变量  $x$  的随机性强度曲线。表 1 中只列出了变量  $y$  的随机性强度值。从图 3

(c)和表 1 得知,变量  $y$  的随机性强度达到 0.15 左右,分岔现象出现在  $k=50$ ; 变量  $x$  的随机性强度在 0.1 左右。此外, Logistic 混沌映射比 Henon 混沌映射的随机性强度大,随机性更强,这与从时间序列的平衡度、相关特性等密码学特性方面得到的结果是一致的,再次印证了众多研究者采用 Logistic 映射进行保密通信的原因。

通过以上数值仿真实验,可以得出如下结论:

周期运动的随机性强度为 0,即周期运动是周期性的,不是随机的;而标准高斯白噪声的随机性强度为 1,说明其没有周期性,是随机的。

混沌运动的随机性强度介于 0 和 1 之间,越接近于 0,其随机性越弱;越远离 0,其随机性越强。

Henon 混沌映射运动和 Logistic 混沌映射运动相比, Logistic 混沌映射运动的随机性更强。

Henon 混沌映射运动中变量  $y$  的随机性比变量  $x$  的随机性强。

## 4 结束语

本文提出了一种混沌类随机性的判定方法,其优点是不需要相空间重构,对确定性系统的时间序列或噪声序列都适用,数值仿真也证明了此方法能有效地识别不同运动时间序列的随机性强弱。(收稿日期:2007年3月)

## 参考文献:

- [1] Hammer, Preston C. Random is nonsense[J]. Simuletter, 5(1):11.
- [2] Richard E. A rejoinder to random is nonsense[J]. Simuletter, 5(1):13-15.
- [3] Casti J L. Rooting out randomness[J]. Complexity, 2001, 6(4):13-15.
- [4] Gennaro R. Randomness in cryptography[J]. Security & Privacy Magazine, IEEE, 2006(2):64-67.
- [5] Shannon C. A mathematical theory of communication[J]. Bell Systems Technology Journal, 1948, 27:379-423.
- [6] Grassberger P, Procaccia I. Characterization of strange attractors[J]. Phys Rev Lett, 1983, 50:346.
- [7] Kaplan D T, Glass L. Direct test for determinism in a time series[J]. Phys Rev Lett, 1992, 68:427.
- [8] Jeong J, Kim M S, Kim S Y. Test for low-dimensional determinism in electroencephalograms[J]. Phys Rev E, 1999, 60:831.
- [9] Salvino L W, Cawley R. Smoothness implies determinism: a method to detect it in time series[J]. Phys Rev Lett, 1994, 73:1091.
- [10] Gao J, Zheng Z. Direct dynamical test for deterministic chaos and optimal embedding of a chaotic time series[J]. Phys Rev E, 1994, 49:3807.
- [11] Gottwald G A, Melbourne I. A new test for chaos in deterministic systems. Proc R Soc. London, Ser. A 460, 2004, 603.
- [12] Hu Jing, Wen-wen T, Gao J, et al. Reliability of the 0-1 test for chaos[J]. Phys Rev E, 2005, 72.
- [13] Callegar S, Rovatti R, Setti G. First direct implementation of a true random source on programmable hardware[J]. Int J Circ Theor Appl, 2005, 33:1-16.
- [14] Wayland R, Bromley D, Pickett D, et al. Recognizing determinism in a time series[J]. Phys Rev Lett, 1993, 70:580.
- [15] Lathrop D P, Kotlich E J. Characterization of an experimental strange attractor by periodic orbits[J]. Phys Rev A, 1989, 40(7):4028-4031.