对称 *-λ-半环

冯 锋[1],柳晓燕[1],张 辉[2]
FENG Feng[1],LIU Xiao-yan[1],ZHANG Hui[2]

1.西安邮电学院 应用数学与应用物理系,西安 710121
2.西安交通大学 理学院,西安 710049
1.Department of Applied Math. and Applied Physics,Xi'an Institute of Posts and Telecommunications,Xi'an 710121,China
2.School of Science,Xi'an Jiaotong University,Xi'an 710049,China
E-mail:fengf@xiyou.edu.cn

FENG Feng,LIU Xiao-yan,ZHANG Hui.On symmetric *-λ-semirings.Computer Engineering and Applications,2007,43(33):46-47.

Abstract: Kleene algebra is fundamental and ubiquitous in computer science.In computer engineering and applications,Kleene algebra and related *-semirings have been used successfully in various fields such as basic safety analysis,low-level program transformations and concurrency control.In this paper,the notion of symmetric *-λ-semirings is introduced and equivalent characterization of symmetric *-λ-semirings is given.Moreover,it is pointed out that symmetric *-λ-semirings extend the notion of Kleene algebras.

Key words: *-semiring;symmetric *-λ-semiring;inductive *-semiring;Kleene algebra

摘 要: Kleene 代数在计算机科学中具有基础而特殊的重要性。在计算机工程应用中,Kleene 代数及相关 *-半环已被成功应用于基础安全分析、底层程序变换以及并行控制等许多领域。论文给出了对称 *-λ-半环的定义及其等价刻画,并指出对称 *-λ-半环是 Kleene 代数概念的推广。

关键词:*-半环;对称 *-λ-半环;归纳 *-半环;Kleene 代数
文章编号:1002-8331(2007)33-0046-02 **文献标识码:**A **中图分类号:**TP301.2

1 引言及基本概念

半环[1,7]是由德国数学家 Richard Dedekind 在研究交换环的理想时提出的一种代数结构。半环理论的发展首先受到了来自数学内部的推动,但更多地受益于这一理论在信息科学,特别是在计算机科学中的广泛应用。由于 Kleene,Eilenberg,Salomma 及 Conway 等著名学者的研究推动,半环目前已经成为理论计算机科学中最重要的代数结构之一。

设 S 是半环。若在 S 上还定义了一个偏序关系,使得 S 上的加法和乘法运算均是单调的,则称 S 是序半环。*-半环 S 是指定义了一个一元运算 $*:S\to S$(通常称为 *-运算)的半环。如果在一个序半环上还定义了 *-运算,则称之为序 *-半环。需要注意,序 *-半环上的 *-运算并不要求是单调的。

序 *-半环 S 称为归纳 *-半环[2],若 S 满足不动点不等式:

$$aa^*+1\leqslant a^* \tag{1}$$

以及不动点归纳法则:

$$ax+b\leqslant x\Rightarrow a^*b\leqslant x \tag{2}$$

Ésik 和 Kuich 在文献[2]中证明了归纳 *-半环满足下列等式:

$$aa^*+1=a^* \tag{3}$$

$$a^*a+1=a^* \tag{4}$$

$$(ab)^*=1+a(ba)^*b \tag{5}$$

$$(ab)^*a=a(ba)^* \tag{6}$$

$$(a+b)^*=(a^*b)^*a^* \tag{7}$$

此外,他们指出归纳 *-半环上的 *-运算一定是单调的。

序 *-半环 S 称为弱归纳 *-半环,若 S 满足不动点等式(3)、和 *-等式(7)以及弱不动点归纳法则:

$$ax+b=x\Rightarrow a^*b\leqslant x \tag{8}$$

由定义易见,任意归纳 *-半环是弱归纳 *-半环。

设 S 是半环,$a,b\in S$。称形如 $f:S\to S$ $x\mapsto ax+b$ 的映射为半环 S 上的线性映射。根据定义,序半环上的加法和乘法运算均是单调的,易见序半环上的线性映射也是单调的。

设 P 是偏序集,f 是 P 上的映射。称 P 中的元素 a 是映射 f 的不动点,若有 $f(a)=a$ 成立。类似地,如果 $f(a)\leqslant a$,则称 a 是 f 的前不动点。若 f 的全体不动点之集有最小元,则称之为 f 的最小不动点,并记为 $\lambda x.f(x)$。类似地,可以定义 f 的最小前不动点 $\mu x.f(x)$。由定义知,f 至多有一个最小(前)不动点。

2 *-λ-半环

设 S 是序半环。若 S 上任意的线性映射均有最小不动点,则称 S 为 λ-半环[3]。类似地,若 S 上任意的线性映射均有最小前不动点,则 S 称为 μ-半环[3]。对于序 *-半环,有如下定义:

作者简介:冯锋(1981-),男,硕士,主要研究领域为半环理论,理论计算机科学;柳晓燕(1980-),女,硕士,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学;张辉(1981-),男,硕士,主要研究领域为生物数学与计算机仿真。

定义 1[3] 序 *-半环 S 称为 *-λ-半环，若对任意 $a,b\in S$，a^*b 是 S 上的线性映射 $f:S\to S\ \ x\mapsto ax+b$ 的最小不动点。

定义 2[3] 序 *-半环 S 称为 *-μ-半环，若对任意 $a,b\in S$，a^*b 是 S 上的线性映射 $f:S\to S\ \ x\mapsto ax+b$ 的最小前不动点。

Tarski 在文献[4]中指出任意单调映射 f 的最小前不动点一定是 f 的不动点，从而也是 f 的最小不动点。由此可以证明任意 μ-半环是 λ-半环，而任意 *-μ-半环一定是 *-λ-半环。文献[3]中证明了序 *-半环 S 是 *-μ-半环当且仅当 S 是归纳 *-半环。类似地，作为 *-λ-半环的一个等价刻画，有如下命题：

命题 1 设 S 是序 *-半环。则 S 是 *-λ-半环当且仅当 S 满足不动点等式（3）和弱不动点归纳法则（8）。

证明 设 S 是 *-λ-半环。则对任意 $a,b\in S$，a^*b 是 S 上的线性映射 $x\mapsto ax+b$ 的最小不动点。特别地，a^* 是线性映射 $x\mapsto ax+1$ 的最小不动点。故 S 满足不动点等式（3）。又对任意 $a,b,x\in S$，若 $ax+b=x$，则 x 是线性映射 $x\mapsto ax+b$ 的一个不动点。但 a^*b 是线性映射 $x\mapsto ax+b$ 的最小不动点，于是有 $a^*b\leqslant x$。即 S 满足弱不动点归纳法则（8）。

反之，设 S 是满足不动点等式（3）和弱不动点归纳法则（8）的序 *-半环。对 S 上任意的线性映射 $f:x\mapsto ax+b$，由不动点等式（3），可得 $f(a^*b)=a(a^*b)+b=(aa^*+1)b=a^*b$。故 a^*b 是 f 的不动点。再由弱不动点归纳法则（8）可知，a^*b 是 f 的最小不动点。故 S 是 *-λ-半环。

由命题 1 可知，任意弱归纳 *-半环是 *-λ-半环。

3　对称 *-λ-半环

设 S 是 *-半环。将 S 的乘法左右翻转并保持其余运算及常数不变，由此所得的半环称为 S 的对偶半环，记为 S^d。当 S 是序半环时，S^d 在相同偏序下亦成为序半环。由定义易见 $(S^d)^d=S^d$。

根据[2]，*-半环项 t 的对偶 t^d 可归纳定义如下：

（1）若 t 是变量或常数 0，1，则 $t^d=t$；

（2）若 $t=t_1+t_2$，则 $t^d=t_1^d+t_2^d$；

（3）若 $t=t_1t_2$，则 $t^d=t_2^dt_1^d$；

（4）若 $t=t_1^*$，则 $t^d=(t_1^d)^*$。

由定义可知，$(t^d)^d=t$。此外，令等式 $t_1=t_2$ 的对偶为 $t_1^d=t_2^d$。而等式蕴含 $(t_1=s_2)\wedge\cdots\wedge(t_n=s_n)\Rightarrow t=s$ 的对偶定义为：$(t_1^d=s_2^d)\wedge\cdots\wedge(t_n^d=s_n^d)\Rightarrow t^d=s^d$。

类似地，可以定义不等式以及不等式蕴含的对偶。由定义易见，对偶不动点等式（4）恰为不动点等式（3）的对偶。对半环 S 上的线性映射 $f:x\mapsto ax+b$，定义 f 的对偶为 $f^d:x\mapsto xa+b$。

注 1 Ésik 和 Kuich 在文献[2]中指出：一个（不）等式或蕴含在 *-半环 S 中成立当且仅当它自身在 S 的对偶半环 S^d 中成立。不妨称这一事实为对偶原理。

定义 3 序 *-半环 S 称为对称 *-λ-半环，若对任意 $a,b\in S$，a^*b，ba^* 分别是 S 上的线性映射 $f:S\to S\ \ x\mapsto ax+b$ 及其对偶 f^d 的最小不动点。

类似于命题 1，可以得到对称 *-λ-半环的如下刻画：

命题 2 设 S 是序 *-半环。则 S 是对称 *-λ-半环当且仅当 S 满足不动点等式（3）及其对偶（4），弱不动点归纳法则（8）及其对偶：

$$xa+b=x\Rightarrow ba^*\leqslant x \tag{9}$$

定义 4[6] 幂等 *-半环 S 称为 Kleene 代数，若 S 关于如下定义的自然偏序：

$\forall a,b\in S\quad a\leqslant b\Leftrightarrow a+b=b$

成为序 *-半环，且满足不动点不等式（1）及其对偶，不动点归纳法则（2）及其对偶：

$$xa+b\leqslant x\Rightarrow ba^*\leqslant x \tag{10}$$

注 2 Kleene 代数自提出以来已经受到研究者的广泛关注，并被应用于关系代数公理化、程序逻辑与语义、自动机理论以及算法分析设计等领域。根据命题 2 可知，对称 *-λ-半环是对 Kleene 代数概念的推广。此外，容易证明文[2]中定义的对称归纳 *-半环也是对称 *-λ-半环。

由定义可知，任意对称 *-λ-半环是 *-λ-半环。但根据 Kozen 在文献[5]中给出的一个例子，可以证明 *-λ-半环未必是对称 *-λ-半环。事实上，有如下定理。

定理 1 设 S 是 *-λ-半环。则下列条件等价：

（1）S 是对称 *-λ-半环。

（2）S^d 也是 *-λ-半环。

（3）S 满足对偶弱不动点归纳法则（9）。

证明 （1→2）设 S 是对称 *-λ-半环。由命题 2 知，S 满足不动点等式（3）及其对偶（4），弱不动点归纳法则（8）及其对偶（9）。根据命题 1，可知 S 是 *-λ-半环。再由对偶原理知，S^d 满足不动点等式（3）和弱不动点归纳法则（8）。故对偶半环 S^d 也是 *-λ-半环。

（2→3）设 S 与 S^d 均是 *-λ-半环。则 S^d 满足弱不动点归纳法则（8）。由对偶原理，可知 S 满足对偶弱不动点归纳法则（9）。因此，S 是满足对偶弱不动点归纳法则（9）的 *-λ-半环。

（3→1）设 S 是满足对偶弱不动点归纳法则（9）的 *-λ-半环。由命题 1 知，S 满足不动点等式（3）和弱不动点归纳法则（8）。则对任意的 $a\in S$，总有 $a(a^*a+1)+1=(aa^*+1)a+1=a^*a+1$。

于是由弱不动点归纳法则（8），可得 $a^*\leqslant a^*a+1$。另一方面，对任意的 $a,b\in S$，总有 $aba(ba)^*+a=a(ba(ba)^*+1)=a(ba)^*$。

再由弱不动点归纳法则（8）可知，$(ab)^*a\leqslant a(ba)^*$。特别地，当 $b=1$ 时有 $a^*a\leqslant aa^*$。再由 S 上加法的单调性，可得 $a^*a+1\leqslant aa^*+1=a^*$。故 S 满足对偶不动点等式（4）。那么，根据命题 2 可得 S 是对称 *-λ-半环。

4　结论

论文提出了对称 *-λ-半环的概念并给出了对称 *-λ-半环的一些等价刻画，这对进一步研究对称 *-λ-半环和相关 *-半环奠定了基础。对称 *-λ-半环推广了计算机科学中的 Kleene 代数以及对称归纳 *-半环等重要概念。对此类 *-半环的研究必将加深对 Kleene 代数等相关概念的认识，并进一步推动 *-半环理论在计算机工程技术领域中的应用。

（收稿日期：2007 年 5 月）

参考文献：

[1] Pastijn F，郭聿琦.环并半环[J].中国科学：A 辑，2002，32（7）：613-630.

[2] Ésik Z，Kuich W.Inductive*-semirings[J].Theoret Comput Sci，2004，324：3-33.

[3] Feng F，Zhao X Z，Jun Y B.*-μ-semirings and *-λ-semirings[J].Theoret Comput Sci，2005，347：423-431.

（下转 97 页）