

可靠性增长试验中分组数据 AMSAA 模型的 Bayes 分析方法

肖小英 (江西理工大学南昌校区, 江西南昌 330013)

摘要 针对在产品的可靠性增长试验中, 由于试验者的疏忽或者其他原因所导致的小子样变总体的分组数据的 AMSAA 模型这类情况, 提出了 Bayes 可靠性增长分析方法, 得到了模型参数以及系统能达到的 MTBF 的 Bayes 点估计, 和 Bayes 区间估计, 并结合实际例子进行了运算。

关键词 可靠性增长; AMSAA 模型; Bayes 估计

中图分类号 S11⁺9 **文献标识码** A **文章编号** 0517-6611(2008)35-15281-02

Bayes Analysis Method of AMSAA Models of Grouped Data in Reliability Growth Test

XIAO Xiao-ying (Nanchang Campus, Jiangxi University of Science and Technology, Nanchang, Jiangxi 330013)

Abstract During the course of reliability growth test, due to the carelessness of tester or other causations, Bayes reliability growth analysis method was put forward according to the AMSAA model of grouped data. The parameters of model, the estimation of Bayes point and interval were obtained. Calculation was conducted combining with the practical example.

Key words Reliability growth; AMSAA model; Bayes estimation

在新产品研制初期, 其可靠性与性能参数都不能立刻达到所规定的指标, 必须经过反复试验 - 改进 - 再试验的过程, 才能使其可靠性不断提高, 这就是产品的可靠性增长过程。可靠性增长技术在增强产品的竞争力、降低产品安全寿命周期费用等方面起到了至关重要的作用^[1]。

1972 年, 美国陆军装备系统中心 (Army Material Systems Analysis Activity) 的 L. H. Crow 在 Duane 模型的基础上提出了可靠性增长的 AMSAA 模型, 并给出了模型参数的极大似然估计和无偏估计、产品的 MTBF 区间估计、模型拟合的优度检验法、分组数据的分析法及丢失数据的处理方法, 系统地解决了 AMSAA 模型的统计推断问题。AMSAA 模型在可靠性增长试验中得到了广泛应用。在可靠性增长试验中, 由于试验者的疏忽或其他原因, 可能发生这样的情况: 产品发生了失效, 但不知道事件发生的准确时间。这就出现了关于分组数据的 AMSAA 模型, 先前关于此模型的研究主要基于极大似然估计和最小二乘估计, 然而对于小子样来说, Bayes 方法是研究该类总体的一个较好的方法。基于此, 笔者提出了 Bayes 可靠性增长分析方法, 充分利用多种来源的验前信息和现场少量的试验数据, 分析了产品的可靠性增长规律。

1 分组数据的可靠性增长模型——AMSAA 模型的数据结构

1.1 AMSAA 模型假设 假设: ①可修产品在开发期 $(0, t]$ 内的失效次数 $N(t)$ 是具有均值函数 $EN(t) \triangleq v(t) = at^b$ 及瞬时强度 $\lambda(t) = \frac{dEN(t)}{dt} = abT^{b-1}$ 的非奇次 Poisson 过程, 即 $P\{N(t) = n\} = \frac{[v(t)]^n}{n!} e^{-v(t)}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)。其中, 强度为 $\lambda(t) = abT^{b-1}$ 的非奇次 Poisson 过程 $\{N(t): t \geq 0\}$ 也称为幂律过程; ②若可修产品从开发到 T 时刻之后不再进行设计改进或纠正, 可以合理的认为, 产品定型后, 其失效分布服从指数分布, 即 $\lambda(t) = abT^{b-1}$, 定型时的 MTBF 称为产品能达到的 MTBF, 即 $\theta(t) = \frac{1}{\lambda(t)} = \frac{1}{abT^{b-1}}$ 。

1.2 分组数据 AMSAA 模型的数据结构 如果在 $(0, t]$ 内

未观察到全部或部分产品的失效时间, 但知道时间间隔 $(t_{j-1}, t_j]$ (t_j 是预先确定的) 内的失效次数 n_j ($j = 1, 2, \dots, m$), 当 $n_j = 0$ (对某一个 j) 时, 可以通过合并 t_{j-1} 与 t_j 使得每个区间 $(t_{j-1}, t_j]$ 中的失效次数 n_j ($j = 1, 2, \dots, m$) 均不小于 5, 经过这样的处理后, 总失效次数可记为: $n = \sum_{j=1}^m n_j$ ($n_j \geq 1$), $data = (0 \triangleq t_0 < t_1 < \dots < t_m \triangleq t)$, 其中, n_j 为 $(t_{j-1}, t_j]$ ($j = 1, 2, \dots, m$) 内的失效次数, 根据非奇次 Poisson 过程的性质, 得到产品在 $(t_{j-1}, t_j]$ 内服从均值为 $a(t_j^b - t_{j-1}^b)$ 的 Poisson 分布:

$$P\{N(t_{j-1}, t_j) = n_j\} = \frac{[a(t_j^b - t_{j-1}^b)]^{n_j}}{n_j!} \exp[-a(t_j^b - t_{j-1}^b)]$$

因此, 失效数据 data 的似然函数为:

$$L(data | a, b) = \prod_{j=1}^m P\{N(t_j, t_{j-1}) = n_j\} = \prod_{j=1}^m \frac{[a(t_j^b - t_{j-1}^b)]^{n_j}}{n_j!} \exp[-a(t_j^b - t_{j-1}^b)] = a^n \cdot \exp[-at^b] \cdot \prod_{j=1}^m \frac{(t_j^b - t_{j-1}^b)^{n_j}}{n_j!}$$

笔者将模型分为两种情况: b 已知, a 取共轭先验密度 Gamma(c, d) 和 b 未知, 但根据工程经验可以确定 b 的范围 $[b_1, b_2]$, 选择 $[b_1, b_2]$ 内的均匀分布作为 b 的验前分布, a 仍取共轭先验密度 Gamma(c, d), 并且认为 a, b 是相互独立的, 这样可以确定 a, b 的联合验前密度函数为: $\pi(a, b) = \frac{d^c}{\Gamma(d)} a^{c-1} e^{-da} \cdot \frac{1}{b_2 - b_1}$ 。根据该函数来讨论分组数据的 AMSAA 模型, 可得到参数 a, b 和系统能达到的 MTBF 的 Bayes 点估计, 以及 b 和 MTBF 的 Bayes 置信下限。

1.3 b 已知 a 未知的情况下, a 和 MTBF 的 Bayes 估计 在 b 已知 a 未知的情况下, 笔者对 a 取共轭先验密度 Gamma(c, d), 即

$$\pi(a) = \frac{d^c}{\Gamma(d)} a^{c-1} e^{-da}$$

进行分析, 那么可以得到 a 的后验概率密度函数为:

$$\pi(a | data) = \frac{L(data | a)\pi(a)}{\int_0^\infty L(data | a)\pi(a)da} = \frac{(t^b + d)^{n+c}}{\Gamma(n+c)} a^{n+c-1} e^{-a(t^b+d)}$$

从而得到在平方损失的情况下, a 的 Bayes 估计为: $\bar{a} =$

作者简介 肖小英(1964-), 女, 江西赣州人, 副教授, 从事应用数学教学与科研工作。

收稿日期 2008-10-06

$$E(a | data) = \frac{n+c}{t^b+d}$$

$$\text{MTBF 的 Bayes 置信下限: } \tilde{\theta}(T) = \frac{1}{abT^{b-1}} = \frac{t^b+d}{(n+c)bT^{b-1}}$$

由于 $\frac{da}{d\theta} = \frac{-1}{\theta^2} \cdot \frac{1}{bT^{b-1}}$, 可以得到 MTBF θ 的后验概率密度函数为:

$$\begin{aligned} \pi(\theta | data) &= \frac{(t^b+d)^{n+c}}{\Gamma(n+c)} \left(\frac{1}{\theta b T^{b-1}}\right)^{n+c-1} e^{-\frac{t^b+d}{\theta}} \cdot \\ &= \frac{1}{\theta^2 b T^{b-1}} \frac{(t^b+d)^{n+c}}{\Gamma(n+c)} \left(\frac{1}{b T^{b-1}}\right)^{n+c} e^{-\frac{t^b+d}{\theta}} \cdot \\ &= \left(\frac{1}{\theta}\right)^{n+c+1} \end{aligned}$$

在工程实际中,人们较关心的是 MTBF 的置信下限 θ_{LB} 。根据定义 $\int_0^{\theta_{LB}} \pi(\theta | data) d\theta \leq \gamma$ ($1-\gamma$ 为置信水平), 选定 $1-\gamma$ 后, 通过数值积分便可得到 θ_{LB} 。

1.4 a、b 均未知的情况下, a、b 和 MTBF 的 Bayes 估计 b 未知, 但根据工程经验可确定 b 的范围 $[b_1, b_2]$, 选择 $[b_1, b_2]$ 内的均匀分布作为 b 的验前分布, a 仍取共轭先验密度 Gamma(c, d), 并且认为 a、b 是相互独立的, 这样可以确定 a、b 的联合验前密度函数为: $\pi(a, b) = \frac{d^c}{\Gamma(d)} a^{c-1} e^{-da} \cdot \frac{1}{b_2 - b_1}$

可以得到 (a, b) 的联合后验概率密度函数为:

$$\pi(a, b | data) = D^{-1} \cdot a^{n+c-1} \cdot \exp[-a(t^b+d)] \cdot \prod_{j=1}^m (t_j^b - t_{j-1}^b)^{n_j}$$

$$\text{其中, } D = \int_{b_1}^{b_2} \left[\int_0^\infty a^{n+c-1} e^{-a(t^b+d)} da \right] \prod_{j=1}^m (t_j^b - t_{j-1}^b)^{n_j} db = \int_{b_1}^{b_2} \frac{\Gamma(n+c)}{(t^b+d)^{n+c}} \prod_{j=1}^m (t_j^b - t_{j-1}^b)^{n_j} db$$

a 的边缘后验密度函数为:

$$\begin{aligned} \pi(a | data) &= \int_{b_1}^{b_2} \pi(a, b | data) db \\ &= D^{-1} \int_{b_1}^{b_2} a^{n+c-1} e^{-a(t^b+d)} \prod_{j=1}^m (t_j^b - t_{j-1}^b)^{n_j} da \end{aligned}$$

b 的边缘后验密度函数为:

$$\begin{aligned} \pi(b | data) &= \int_0^\infty \pi(a, b | data) da \\ &= D^{-1} \int_0^\infty a^{n+c-1} e^{-a(t^b+d)} \prod_{j=1}^m (t_j^b - t_{j-1}^b)^{n_j} da \end{aligned}$$

在平方损失的情况下, 得到 a、b 的 Bayes 估计为:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= E(a | data) = D^{-1} \int_0^\infty a \pi(a | data) da \\ &= D^{-1} \int_0^\infty \left[\int_{b_1}^{b_2} a^{n+c} e^{-a(t^b+d)} \prod_{j=1}^m (t_j^b - t_{j-1}^b)^{n_j} db \right] da \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{b} &= E(b | data) = D^{-1} \int_{b_1}^{b_2} b \pi(a | data) db \\ &= D^{-1} \int_{b_1}^{b_2} b \left[\int_0^\infty a^{n+c-1} e^{-a(t^b+d)} \prod_{j=1}^m (t_j^b - t_{j-1}^b)^{n_j} da \right] db \\ &= D^{-1} \int_{b_1}^{b_2} b \prod_{j=1}^m (t_j^b - t_{j-1}^b)^{n_j} \frac{\Gamma(n+c)}{(t^b+d)^{n+c}} db \end{aligned}$$

由于 a 的区间估计无实际意义, 因此不予考虑; b 的置信度为 γ 的 Bayes 置信上限, b_u 满足:

$$\gamma = \int_0^{b_u} \pi(b | data) db = D^{-1} \Gamma(n+c) \int_0^{b_u} \prod_{j=1}^m (t_j^b - t_{j-1}^b)^{n_j} \frac{1}{(t^b+d)^{n+c}} db$$

设备的 MTBF 的 Bayes 估计为:

$$\bar{\theta}(T) = E\left[\frac{1}{abT^{b-1}}\right] = \iint_{\substack{a>0 \\ b_1 < b < b_2}} \frac{1}{abT^{b-1}} \pi(a, b | data) dadb$$

$$\text{作变换: } \begin{cases} \theta = \frac{1}{abT^{b-1}} \\ b = b \end{cases}, \text{ 则雅可比行列式为: } \frac{\partial(a, b)}{\partial(\theta, b)} =$$

$$-\frac{1}{\theta^2 b T^{b-1}}$$

从而得到: MTBF 的验后密度为:

$$\begin{aligned} \pi(\theta | data) &= \int_{b_1}^{b_2} \pi\left(\frac{1}{\theta b T^{b-1}}, b | data\right) \frac{1}{\theta^2 b T^{b-1}} db \\ &= D^{-1} \int_{b_1}^{b_2} \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{(\theta b T^{b-1})^{n+c}} e^{-\frac{t^b+d}{\theta b T^{b-1}}} \prod_{j=1}^m (t_j^b - t_{j-1}^b)^{n_j} db \end{aligned}$$

在工程实际中,人们较关心 MTBF 的置信下限 θ_{LB} , 根据定义 $\int_0^{\theta_{LB}} \pi(\theta | data) d\theta \leq \gamma$ (其中 $1-\gamma$ 为置信水平), 选定 $1-\gamma$ 后, 通过数值积分可得到 θ_{LB} 。

2 分组数据时增长模型的拟合优度检验

按照下述步骤进行拟合优度检验:

(1) 计算第 j 个区间 $(t_{j-1}, t_j]$ 内期望的失效次数 e_j 。

$$e_j = \bar{a}(t_j^b - t_{j-1}^b) \quad (j = 1, 2, \dots, d)$$

要求每个 e_j 均不小于 5, 否则将相邻区间合并;

$$(2) \text{ 计算 } \chi^2 \text{ 检验统计量: } \chi^2 = \sum_{j=1}^d \frac{(n_j - e_j)^2}{e_j};$$

(3) 在显著性水平 α 下, 查表得到双侧临界值: $\chi_{1-\alpha}^2(d-2)$;

(4) 将 χ^2 检验统计量与双侧临界值进行比较:

在显著性水平 α 下, 若 $\chi^2 > \chi_{1-\alpha}^2(d-2)$, 则拒绝 AMSAA 模型; 若 $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(d-2)$, 则产品失效数据可用 AMSAA 模型进行拟合。

3 实例分析

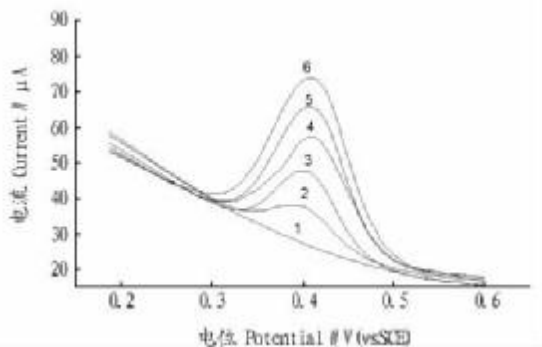
以某台产品的可靠性增长试验为例^[5], 该试验发生了 52 次失效, 失效的分组数据见表 1。

试验于 T = 1 000 h 时截尾, 使用分组数据时的 AMSAA 模型的 Bayes 分析方法对失效数据进行分析, 求出试验结束时的 MTBF。

表 1 时间截尾时试验失效分组数据

分组号 j	Grouping code j	1	2	3	4	5
累积试验时间 t_j / h						
Accumulated test time		200	400	600	800	1 000
分组失效次数 N_j // 次						
Grouping failure times		20	13	5	8	6

浓度增大而增大,在 $8.0 \times 10^{-7} \sim 5.0 \times 10^{-5}$ mol/L 芦丁浓度与其峰电流呈良好的线性关系,线性回归方程为 $I_p(\mu\text{A}) = 1.16 + 18.8 \times C(10^{-5} \text{ mol/L})$, 相关系数 $r = 0.999\ 63$, 检出限为 3.0×10^{-7} mol/L。



注:1~6 的浓度分别为 0.5×10^{-5} 、 1.0×10^{-5} 、 2.0×10^{-5} 、 3.0×10^{-5} 、 3.5×10^{-5} mol/L。

Note:1-6 are 0.5×10^{-5} 、 1.0×10^{-5} 、 2.0×10^{-5} 、 3.0×10^{-5} and 3.5×10^{-5} mol/L.

图3 不同浓度芦丁标准溶液的微分脉冲伏安曲线

Fig.3 Differential pulse voltammograms in different concentrations of rutin standard solution

2.2.4 电极的再生和测定的精密性。由于芦丁在电位扫描过程中可固定在玻碳电极表面^[11],这将对测定的结果产生很大影响,故在每次扫描测定后将电极再生。方法是将电极置于 pH 值为 4.5 的磷酸盐缓冲溶液中在 $-0.5 \sim 2.0$ V 扫描至氧化还原峰消失,再用于下次测定。按该方法处理电极,对含有芦丁 2.0×10^{-5} mol/L, pH 值为 4.5 的磷酸盐缓冲溶液连续用微分脉冲法测定 5 次,平均峰电流为 $27.5 \mu\text{A}$,相对标准偏差为 3.1%。

2.2.5 试样中黄酮含量的测定。由于试样成分较复杂,可能含有少量影响峰电流的物质,对试样测定时采用标准加入法进行,每次测定分别取 5 份 1.0 ml 试液,从 1 号试液起依次加入标准溶液 0、0.1、0.2、0.3、0.4 ml,按前述步骤测定,测

得黄酮含量分别为 17.3、18.1、18.3、17.4、18.6 mg/g,平均值为 17.9 mg/g , RSD 值为 3.2%。按“1.4.2”光度法测定结果为 26.0 mg/g ,比以上测定结果大。这主要可能是由于黄酮类物质中参与显色反应的物质更多。

3 结论

将玻碳电极活化处理后,可在 pH 值为 4.5 的磷酸盐缓冲溶液用微分脉冲法测定植物叶子中的黄酮。微分脉冲伏安曲线在 0.43 V (vs SCE) 的峰电流与黄酮浓度呈良好的线性关系。该方法操作简单,电极无须特别修饰处理,所用样品量少,灵敏度较高,重现性好等特点。

参考文献

- [1] 哈成勇.天然产物化学与应用[M].北京:化学工业出版社,2003:338-341.
- [2] 蔡健,华景清,王薇,等.黄酮提取工艺研究进展[J].淮阴工学院学报,2003,12(5):82-85.
- [3] 高红宁,金万勤,郭立伟. Ab-8 树脂对苦参总黄酮的吸附性能研究[J].中草药,2001,32(10):887.
- [4] 张德权,台建祥,付勤,等.生物类黄酮的研究及应用概况[J].食品与发酵工业,1999(6):52-56.
- [5] 王常青.黄刺玫叶片中黄酮物质的提取和分析[J].食品工业科技,1999(5):4-15.
- [6] 王忠凤,韩洪莉,刘瑛华,等.高效液相色谱测定黄酮类物质研究进展[J].西部粮油科技,2003(5):53-55.
- [7] KUNTI V, PEJI C N, IVKOVI C B, et al. RP-HPLC method for rutin determination in solid oral dosage forms[J]. Journal of Pharmaceutical and Biomedical Analysis, 2007, 43:718-721.
- [8] 陈从瑾,黄克瀛,李姣娟,等.电化学分析方法在黄酮含量测定中的应用[J].分析仪器,2007(3):55-58.
- [9] 孙仕萍,张文德,马志东,等.单扫描波极谱法测定保健食品中总黄酮的研究[J].中国食品卫生杂志,2002,12(6):15-16.
- [10] 赵藻藩,周性尧,张悟铭,等.仪器分析[M].北京:高等教育出版社,2001:337.
- [11] 陶海升,阙显文,邓湘辉,等.芦丁修饰电极的电化学特性及其催化性能[J].分析实验室,2005,24(7):21-24.
- [12] ZHOU J Y, LIAO H, LI L P, et al. Determination of emodin and chrysohanol contents in callus of *Cassia tora* L. leaf[J]. Agricultural Science & Technology, 2008, 9(2):60-62.
- [13] 徐雅琴,于泽源,任华锋.红树莓叶片中黄酮类物质提取及抗氧化性的研究[J].中国油脂,2003,28(5):69-71.
- [14] 高健.盐地碱蓬中黄酮类物质的提取及抗氧化性研究[J].盐城工学院学报:自然科学版,2005,18(2):55-57.

(上接第 15282 页)

假定尺度参数 a 的验前超参数分别取 $c = 1, d = 5$, 形状参数 b 服从 $0.4 \sim 0.6$ 的均匀分布,那么参数 a 和 b 的极大似然估计分别为: $\hat{a} = 0.961\ 5, \hat{b} = 0.577\ 7$, 试验结束时, MTBF 的估计为: $\hat{\theta}(1\ 000) = 33.3$ h. 利用该文所采用的 Bayes 估计方法,相应的有: $\bar{a} = 0.950\ 9, \bar{b} = 0.570\ 3, \bar{\theta}(1\ 000) = 37.16$ h, 所得结果与极大似然估计法所得结果非常接近,这说明 Bayes 估计法的可行性较好.同样,根据参数的后验密度函数,通过计算可以很方便地得到参数的区间估计及置信限,计算过程较极大似然估计法简单^[6]。

参考文献

- [1] CROW L H. Confidence interval procedures of the weibull process with applications to reliability growth[J]. Technometrics, 1982, 24:67-72.
- [2] MIL-STD-781D. Reliability Testing for Engineering Development[M]. Qualification and Production, 1986.
- [3] 田国梁. AMSAA 模型分组数据的分析方法[J]. 强度与环境, 1990(3):1-8.
- [4] GUIDA M, CALABRIA R, PULCINI G. Bayes inference for a NHPP with power intensity law[J]. IEEE Trans on Reliability, 1989, 38:603-609.
- [5] 梅文华. 可靠性增长试验[M]. 北京:国防工业出版社,2003.
- [6] 蔡洪,张士峰,张金槐. Bayes 试验分析与评估[M]. 长沙:国防科技大学出版社,2004.