第 20 卷 第 3 期
1996 年 3 月

高 能 物 理 与 核 物 理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.20, No.3
Mar., 1996

二维情况下内部有质量费米子单圈图对 Casimir 力的贡献 *

郑 泰 玉

(东北师范大学物理系 理论物理研究所 长春 130024)

李 长 松

(延边工业学校 延吉 133000)

1995-01-16 收稿

摘 要

采用 Feynman 的路径积分量子化方法，计算出两个平行的、理想的金属线之间，在绝对零度下量子电磁场在有质量费米子单圈图近似下的 Casimir 效应.

关键词 Casimir 效应，Casimir 力，路径积分.

由于 Casimir 效应[1,2] 不仅应用于粒子物理的研究领域中，而且现在已应用于量子测量以及微电子元件的研究中，所以近年来对 Casimir 效应的研究引起了更大的关注[3-11]. 本文将采用 Feynman 的路径积分量子化方法计算出，置于真空中相距为 a 的、两个平行的、理想的金属线(两个金属线长为 L，且 $L \gg a$)之间，绝对零度下的量子电磁场对 Casimir 力的前二级贡献，即自由电磁场与有质量的费米子单圈图的贡献.

在欧氏空间中，真空的零点能为

$$E_0 = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln Z, \tag{1}$$

其中，T 是延拓到虚轴的时间间隔，$T\to\infty$；Z 为真空到真空的跃迁振幅，在 $U(1)$ 情况下，根据文献 [7] 中的处理，Z 可取为

$$Z = \prod_k k^2 \mathrm{e}^{\mathrm{tr}\ln(\not p + m)} \prod_k \left\{ \frac{1}{g} (k^2)^3 \left[1 - \frac{e'^2}{2\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}z z(1-z) \ln\left(\frac{z(1-z)k^2}{c^4 m^2} + 1 \right) \right]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

其中 e' 是无量纲的数；g 是固定规范项，把(2)式代入(1)式，并仿照文献[9] 中(5)式的计算，得

* 国家自然科学基金赞助.

$$E_0=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}\sum_k \ln k^2-\frac{2\alpha}{\pi}\sum_k\int_0^1 \mathrm{d}z z(1-z)\ln\left(\frac{z(1-z)k^2}{m^2c^4}+1\right)\right], \tag{3}$$

其中引入 $\alpha=\dfrac{e'^2}{4\pi}$ ，α 是精细结构常数，对 k 求和并抛掉与 a 无关项，则得

$$E_0=\sum_{n=1}\left(\frac{L}{2\pi\hbar c}\right)\int \mathrm{d}k\left[\sqrt{\left(\frac{\pi\hbar cn}{a}\right)^2+k^2}-\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 \mathrm{d}z z(1-z)\sqrt{\left(\frac{\pi\hbar cn}{a}\right)^2+k^2+\frac{m^2c^4}{z(1-z)}}\right]. \tag{4}$$

令(4)式中

$$E_{01}=\sum_{n=1}\left(\frac{L}{2\pi\hbar c}\right)\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\sqrt{\left(\frac{\pi\hbar cn}{a}\right)^2+k^2}, \tag{5}$$

$$E_{02}=\sum_{n=1}\left(\frac{L}{2\pi\hbar c}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\left(-\frac{2\alpha}{\pi}\right)\int_0^1 \mathrm{d}z z(1-z)\sqrt{\left(\frac{\pi\hbar cn}{a}\right)^2+k^2+\frac{m^2c^4}{z(1-z)}}\ , \tag{6}$$

则(4)式变为

$$E_0=E_{01}+E_{02}. \tag{7}$$

利用

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}x x^{\beta}(x^2+M^2)^{-\alpha}=\frac{1}{2}B\left(\frac{\beta+1}{2}, \alpha-\frac{\beta+1}{2}\right)(M^2)^{-\alpha+\frac{\beta+1}{2}} \tag{8}$$

和

$$\Gamma\left(-\frac{d}{2}\right)\pi^{d/2}\zeta(1-d)=\Gamma\left(\frac{1+d}{2}\right)\pi^{-\frac{1+d}{2}}\zeta(1+d), \tag{9}$$

可以计算出(5)式，其结果为

$$E_{01}=-\frac{L\hbar c}{8\pi a^2}\zeta(3). \tag{10}$$

利用

$$\Gamma(z)\lambda^{-z}=\int_0^{\infty}t^{z-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t$$

和

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-a^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\ ,$$

可把(6)式变为

$$E_{02}=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 \mathrm{d}z z(1-z)\sum_{n=1}\left(\frac{L}{4\pi\hbar c}\right)\int_0^{t} t^{-2}\mathrm{e}^{-\left[\left(\frac{\pi\hbar cn}{a}\right)^2+\frac{m^2c^4}{z(1-z)}\right]t}. \tag{11}$$

再利用 Jacobi theta 函数

$$\theta(z;\ x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi n^2 x}\mathrm{e}^{2\pi nz}$$

以及 Jacobi theta 函数的变换式

$$\theta(z;\ x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ \mathrm{e}^{\frac{\pi z^2}{x}}\ \theta\left(\frac{z}{\mathrm{i}x}\ ;\ \frac{1}{x}\right),$$

可把(11)式变为

$$E_{02}=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1\mathrm{d}zz(1-z)\frac{La}{8\pi^{3/2}\hbar^2c^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\int_0^{\infty}t^{-\frac{5}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{n^2a^2}{\hbar^2c^2t}}\ \mathrm{e}^{-\frac{m^2c^4}{z(1-z)}t}\mathrm{d}t. \tag{12}$$

令 $t=\frac{n^2a^2}{\hbar^2c^2}\ \frac{1}{x}$ ，以及利用

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x-\frac{z^2}{4x}}x^p\mathrm{d}x=2\left(\frac{z}{2}\right)^{1-p}k_{p-1}(z)$$

和

$$k_{\pm\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\ \mathrm{e}^{-z},$$

则(12) 式变为

$$E_{02}=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1\mathrm{d}zz(1-z)\frac{L\hbar c}{8\pi a^2}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\ \mathrm{e}^{-\frac{2mcna}{\sqrt{z(1-z)}\hbar}}\ . \tag{13}$$

当(13)式中 $m=0$ 时，则得

$$E_{02}=\frac{\alpha}{3\pi}\ \cdot\ \frac{L\hbar c}{8\pi a^2}\ \zeta(3). \tag{14}$$

把(10)式和(14)式代入(7)式，则获得在无质量费米子单圈近似下的 Casimir 能量

$$E_{0m=0}=-\frac{L\hbar c}{8\pi a^2}\ \zeta(3)+\frac{\alpha}{3\pi}\ \cdot\ \frac{L\hbar c}{8\pi a^2}\ \zeta(3). \tag{15}$$

相应的每单位长度金属线上所受的 Casimir 力为

$$F_{m=0}=-\frac{\partial E_{0m=0}}{L\partial a}=-\frac{\hbar c}{4\pi a^3}\ \zeta(3)+\frac{\alpha}{3\pi}\ \cdot\ \frac{\hbar c}{4\pi a^3}\ \zeta(3). \tag{16}$$

因(13)式，当 $m\neq 0$ 时，不能严格求解，所以下面分 $mac\ll\hbar$ 与 $mac\gg\hbar$ 两种情况讨论. 当 $mac\ll\hbar$ 时，从(13)式可计算出

$$E_{02}=\frac{\alpha}{3\pi}\ \cdot\ \frac{L\hbar c}{8\pi a^2}\sum_{n=1}\frac{1}{n^3}\left[1+1.6\left(\frac{macn}{\hbar}\right)+1.37\left(\frac{macn}{\hbar}\right)^2+\cdots\cdots\right]\mathrm{e}^{-\frac{6macn}{\hbar}}. \tag{17}$$

当(17)中 $m=0$ 时，可获得(14)式，把(10)式和(17)式代入(7)式，则获得在低质量费米子单圈近似下的 Casimir 能量

$$E_{0mac\ll\hbar}\doteq-\frac{L\hbar c}{8\pi a^2}\ \zeta(3)+\frac{\alpha}{3\pi}\ \frac{L\hbar c}{8\pi a^2}\left[1+1.6\left(\frac{mac}{\hbar}\right)\right]\mathrm{e}^{-\frac{6mac}{\hbar}}, \tag{18}$$

其中只取了 $n=1$ 项. 那么相应的每单位长度金属线上所受的 Casimir 力为

$$F_{mac\ll\hbar} \doteq -\frac{\hbar c}{4\pi a^3}\zeta(3)+\frac{\alpha}{3\pi}\frac{\hbar c}{4\pi a^3}\left[1+3.8\left(\frac{mac}{\hbar}\right)\right]e^{-\frac{6mac}{\hbar}}. \tag{19}$$

当 $mac\ll\hbar$ 时, 从(13)式可计算出

$$E_{02} \doteq \frac{\alpha}{3\pi}\frac{L\hbar c}{8\pi a^2}\left[1.33\left(\frac{2mac}{\hbar}\right)^{-\frac{1}{2}}-0.66\left(\frac{2mac}{\hbar}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]e^{-\frac{4mac}{\hbar}}, \tag{20}$$

其中只取了 $n=1$ 项. 把(10)式和(20)式代入(7)式, 则获得在高质量费米子单圈近似下 Casimir 能量

$$E_{0mac\gg\hbar} = -\frac{L\hbar c}{8\pi a^2}\zeta(3)+\frac{\alpha}{3\pi}\cdot\frac{L\hbar c}{8\pi a^2}\left[1.33\left(\frac{2mac}{\hbar}\right)^{-\frac{1}{2}}-0.66\left(\frac{2mac}{\hbar}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]e^{-\frac{4mac}{\hbar}}, \tag{21}$$

相应的每单位长度金属线上所受的 Casimir 力为

$$F_{mac\gg\hbar} = -\frac{\hbar c}{4\pi a^3}\zeta(3)+\frac{\alpha}{3\pi}\cdot\frac{\hbar c}{4\pi a^3}\left[2.66\left(\frac{2mac}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}+1.98\left(\frac{2mac}{\hbar}\right)^{-\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left.-9.31\left(\frac{2mac}{\hbar}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]\cdot e^{-\frac{4mac}{\hbar}}. \tag{22}$$

在(16)式, (19)式和(22)式中, 它们的第一项均是绝对零度下自由电磁场对 Casimir 力的贡献, 与文献[5]给出的结果一致; 它们的余项均为本文给出的新结果, 即绝对零度下费米子单圈图的贡献. 从(16)式, (19)式和(22)式我们可以看出, 它们的余项与它们的第一项相比均很小. 这说明余项对第一项作了小小的修正. 我们可以采取类似的计算方法计算费米子高圈图的贡献, 其计算将更为复杂, 贡献也会更小; 并且也可以计算其它量子场对 Casimmir 力的贡献. 我们正在开展这方面以及有关 Casimir 效应的其它方面的工作.

参 考 文 献

[1] H. B. G. Casimir, *Proc. K. Nedk. Ned. Akad. Wet.*, **51** (1948) 793.
[2] J. Mehera, *Physica*, **37** (1967) 145.
[3] T. H. Boyer, *Phys. Rev.*, **174** (1968) 1764.
[4] J. Ambφrn, S. Wolfram, *Ann. Phys.*, **147** (1983) 1.
[5] M. van BERG., *Phys. Lett.*, **A81** (1981) 219.
[6] G. Plunien, B. Müller, W. Greiner., *Phys. Rep.*, **134** (1986) 8.
[7] 郑泰玉, 高能物理与核物理, **9** (1990) 798.
[8] V. B. Braginsky, F. Yhalili, *Phys. Lett.*, **161** (1991) 197.
[9] 郑泰玉、薛社生, 科学通报, **13** (1992) 1170.
[10] E. D. Hoker, P. Sikiver, *Phys. Rev. Lett.*, **71** (1993) 1136.
[11] S. S. Bayin, M. Özcan, *Phys. Rev.*, **D48** (1993) 2806.

Internal Massive Fermion Loop Contribution to Casimir Force in Two – Dimensions

Zheng Taiyu

(*Department of Physics, Northeast Normal University, Changchun* 130024)

Li Changsong

(*Yanbian Industrial Secondary Education, Yanji* 13300)

Received 16 January 1995

Abstract

In this note, using Feynman path integral method we calculate the Casimir effect of QCD with massive fermion loop contribution between two parallel perfectly conducting wires at zero temperature.

Key words Casimir effect, Casimir force, path integral.