

# 随机参数链式机械系统动力特性分析

陈建军, 赵颖颖, 黄居锋, 拓耀飞

(西安电子科技大学 机电工程学院 陕西 西安 710071)

**摘要:** 对求解结构固有频率的传递矩阵进行扩阶, 推导了链式机械系统振动分析的扩阶传递矩阵算式. 利用扩阶的传递矩阵和系统的边界条件建立了求解系统固有频率的高次代数方程, 并应用数值方法求解. 建立了随机性结构参数的链式机械系统动力特性分析模型, 利用 Monte Carlo 数值模拟方法获得系统的特征值随机变量的数字特征. 两个算例验证了这种模型的合理性和求解方法的正确性, 计算出随机参数机械系统固有频率的均值和方差, 分析了结构参数的随机性对系统动力特性的影响.

**关键词:** 随机链式机械系统; 扩阶传递矩阵; 随机变量; 动力特性分析

**中图分类号:** O324; TH133    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1001-240X(2005)06-0829-04

## Dynamic characteristics of the analysis of stochastic chain mechanical system

CHEN Jian-jun, ZHAO Ying-ying, HUANG Ju-feng, TUO Yao-fei

(School of Mechano-electronic Engineering, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

**Abstract:** The extended transfer matrix of the structural vibration analysis is derived by using the expansion to the transfer matrix to solve structural dynamic characteristic analysis. The algebra equation for calculating the natural frequency is established by using the extended matrix and the structural boundary condition. The natural frequency can be calculated using the numerical value method for the equation and a facility method to solve the natural frequency of chain structures is obtained. Considering the randomness of the structural parameters, the model of the structural dynamic characteristic analysis is founded and the digit characteristics of the natural frequency is obtained using the Monte Carlo random simulation methods. The correctness and facility of the theory and method presented in this paper are checked by two examples. The mean value and the mean square value of the structural natural frequency are calculated, and the effect of the stochastic parameters on structural dynamic characteristic is analyzed.

**Key Words:** stochastic chain mechanical system; extended transfer matrix; random variables; dynamic characteristics analysis

对于链式结构的机械系统, 迄今为止的大多数动力分析建模均属于确定性模型, 即将结构的全部参数均视为确定性量. 此类模型无法反映出结构中的随机因素对系统动力特性的影响. 在许多情况下, 必须考虑结构本身的随机性, 这是因为在设计和生产阶段存在着很多不确定性因素, 导致结构材料的物理参数和构件的几何尺寸等具有了随机性.

目前, 关于随机参数结构动力特性分析的问题已有一些研究成果. 文[1]以桁架结构为对象, 研究了结构的物理参数和几何尺寸分别为随机变量时结构动力特性的概率分析与求解的方法. 文[2]考虑结构材料和几何参数具有随机性时, 对线弹性构件进行了分析. 文[3]对随机条件下的塑性结构分析进行了研究. 文[4]提出了一种随机结构特征值的概率分析方法. 文[5]对桁架结构参数具有随机性时进行了有限元建模和静力可靠性分析. 文[6]对桁架结构和智能桁架结构的材料质量密度、弹性模量同时具有随机性时的

动力特性进行了分析. 然而, 关于随机参数链式结构动力特性问题的研究迄今尚未有文献报道.

笔者以随机参数链式机械系统为对象, 利用扩阶的传递矩阵方法和 Monte Carlo 数值模拟方法, 研究系统的转动惯量和刚度模量为随机变量时, 系统结构动力特性的概率分析与求解的方法.

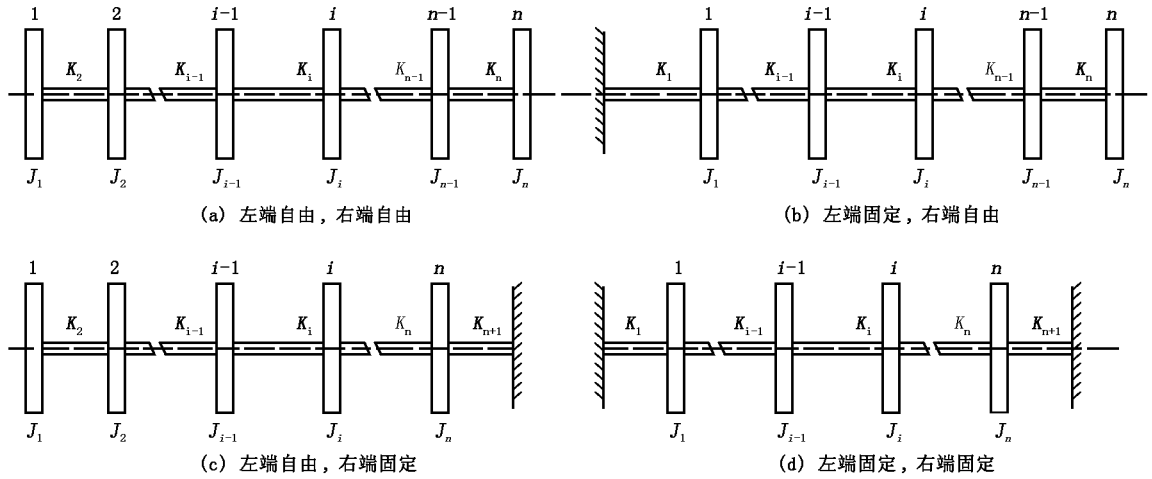


图 1 单链式轴盘扭转振动系统

## 1 链式机械系统的动力特性分析

工程中许多传动机械装置可简化为单链式轴盘扭转系统. 对于此类轴盘扭转振动系统, 其两端的边界条件一般只有自由和固定两种情况, 见图 1, 图中的  $J_i$  和  $K_i$  分别表示盘的转动惯量和轴的刚度模量. 对此系统动力分析最有效的计算方法是传递矩阵法. 现将系统中的第  $i$  个轴段及第  $i$  个盘从系统中隔离出来(见图 2), 设轴系以圆频率  $\omega$  作简谐扭转自由振动, 可得盘和轴段的点传递矩阵和场传递矩阵分别为<sup>[7]</sup>

$$\begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 J_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_i^L, \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} 1 & 1/K_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_{i-1}^R, \quad (2)$$

图 2 第  $i$  段单元示意图

则第  $i$  个盘右边的状态矢量与第  $i-1$  个盘右边的状态矢量之间的关系为

$$\begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 J_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/K_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_{i-1}^R. \quad (3)$$

现将式(3)展开, 即有

$$\theta_i^R = \theta_{i-1}^R + (1/K_i) M_{i-1}^R, \quad (4)$$

$$M_i^R = -\omega^2 J_i \theta_{i-1}^R + (1 - \omega^2 J_i/K_i) M_{i-1}^R, \quad (5)$$

将式(4)和(5)两边对  $\omega$  求偏导可得

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial \omega} \right)_i^R = \left( \frac{\partial \theta}{\partial \omega} \right)_{i-1}^R + \frac{1}{K_i} \left( \frac{\partial M}{\partial \omega} \right)_{i-1}^R, \quad (6)$$

$$\left( \frac{\partial M}{\partial \omega} \right)_i^R = -2\omega J_i \theta_{i-1}^R - \omega^2 J_i \left( \frac{\partial \theta}{\partial \omega} \right)_{i-1}^R - \frac{2\omega J_i}{K_i} M_{i-1}^R + \left( 1 - \frac{\omega^2 J_i}{K_i} \right) \left( \frac{\partial M}{\partial \omega} \right)_{i-1}^R. \quad (7)$$

利用关系式(4)~(7), 可将通常的两阶传递矩阵扩充为四阶传递矩阵后表示为

$$\begin{bmatrix} \theta \\ M \\ \partial \theta / \partial \omega \\ \partial M / \partial \omega \end{bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega^2 J & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2\omega J & 0 & -\omega^2 J & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} 1 & 1/K & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/K \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \theta \\ M \\ \partial \theta / \partial \omega \\ \partial M / \partial \omega \end{bmatrix}_{i-1}^R. \quad (8)$$

当轴盘扭转系统有  $n$  个圆盘时,记系统中各轴段的刚量模量为  $K_i (i = 1 \sim n + 1)$ ;各转盘的转动惯量为  $J_i (i = 1 \sim n)$ . 利用上述扩阶的传递矩阵法计算整个轴系扭振频率的过程是:先假设一系列的圆频率  $\omega$  的值,根据最左边的边界条件,由传递矩阵逐级算到最右端的状态向量值.对于某一假定的圆频率  $\omega$  值,若算出最右端状态向量的元素值恰好满足边界条件,则此值就是系统的某阶固有圆频率的值.当轴盘扭转系统的左端为自由端,可假设系统最左端的初始状态矢量为  $[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ;当系统的左端为固定端,可假设系统最左端的初始状态矢量为  $[0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ . 根据式(8)可得整个系统两端之间的传递关系为

$$\begin{bmatrix} \theta \\ M \\ \partial\theta/\partial\omega \\ \partial M/\partial\omega \end{bmatrix}^R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ M \\ \partial\theta/\partial\omega \\ \partial M/\partial\omega \end{bmatrix}^L \quad (9)$$

式(9)即为关于  $\omega$  的高次代数方程,其中传递矩阵中的各元素  $a_{ij}$  均为结构参数  $K_i$ 、 $J_i$  和固有频率  $\omega$  的代数表达式.文中对此方程的求解利用了 Newton 迭代方法.若轴盘扭转系统的右端为自由端,则系统最右端的边界条件为  $M^R = 0$ ;右端为固定端,则系统最右端的边界条件为  $\theta^R = 0$ .在迭代过程中首先给出初始圆频率值  $\omega_0$ ,对自由端边界,利用迭代公式  $\omega = \omega_0 - a_{21}/a_{41}$  算出  $\omega$ ;对固定端边界,利用迭代公式  $\omega = \omega_0 - a_{11}/a_{31}$  算出  $\omega$ .当  $|\omega - \omega_0|$  不满足给定的误差时,令  $\omega_0 = \omega$  重新计算,直到  $|\omega - \omega_0|$  满足给定的误差为止,此时所得到的  $\omega$  值就是系统的某一阶固有圆频率.因此,可根据上述方法给定不同的初始值算出系统的各阶固有频率.

## 2 基于概率的链式结构系统动力特性分析

由于链式结构系统在生产和装配过程中不可避免地受到多种随机因素的影响,导致材料物理参数和结构的几何尺寸的取值呈现出一定的分散性即随机性,而结构物理参数和几何尺寸的随机性又必将导致圆盘的转动惯量  $J_i (i = 1 \sim n)$  和轴的刚量模量  $K_i (i = 1 \sim n + 1)$  的随机性.从而使式(9)传递矩阵中的各元素成为随机变量,即式(9)成为随机传递矩阵,相应地所求得系统的各阶固有频率亦成为随机变量.

笔者将 Monte Carlo 模拟法与上述求解系统的各阶固有频率的数值方法相结合,即对每一随机变量按其分布概型进行随机抽样,获得式(9)中随机传递矩阵中诸值的抽样值,与此对应的传递矩阵成为确定性的传递矩阵,再利用数值方法解出系统的各阶固有频率.如此处理,经  $N$  次抽样后便可利用点估计获得系统的各阶固有频率的统计均值和方差.

利用 Monte Carlo 法求随机变量的函数  $Z = g(X) = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  矩的具体过程<sup>[8]</sup>如下:

(1) 若  $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$  相互独立,则  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的联合分布函数为

$$F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i) \quad (10)$$

按各随机变量  $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的分布概型产生  $n$  维随机数  $r_{ij} (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, N)$ ,将随机数  $r_{ij}$  代入到变量  $X_i$  分布函数的反函数中,可得  $X_i$  的随机抽样值  $x_{ij}$ ,即

$$x_{ij} = F_{X_i}^{-1}(r_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

(2) 若  $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$  彼此相关,则  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的联合分布函数可以条件分布函数的乘积表示为

$$F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2|X_1}(x_2|x_1) \dots F_{X_n|X_1 X_2 \dots X_{n-1}}(x_n|x_1 x_2 \dots x_{n-1}) \quad (12)$$

式中右边每项因子(条件分布函数)都是一维概率分布函数,可仿照独立情况的处理.设第  $j$  组随机数  $(r_{1j}, r_{2j}, \dots, r_{nj})$  已产生,则利用各变量的条件分布函数,可逐次确定  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的第  $j$  组抽样值  $(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})$ ,即  $x_{1j} = F_{X_1}^{-1}(r_{1j}), x_{2j} = F_{X_2|X_1}^{-1}(r_{2j}|x_{1j}), \dots, x_{nj} = F_{X_n|X_1 X_2 \dots X_{n-1}}^{-1}(r_{nj}|x_{1j} x_{2j} \dots x_{n-1j})$ . (13)

对于笔者讨论的问题,随机变量的函数  $Z$  即为系统的各阶固有圆频率  $\omega_k = f_k(K_i, J_i)$ ,  $k$  表示系统固有圆频率的阶数.计算中利用式(11)或(13)获得  $(K_i, J_i)$  的抽样值代入随机变量函数  $\omega_k = f_k(K_i, J_i)$  中,可得函数  $\omega_k$  对应的  $N$  组抽样值  $\omega_{kj} (j = 1, 2, \dots, N)$ ,再由点估计公式可得随机变量  $\omega_k$  的均值  $\mu_{\omega_k}$  和均方差  $\sigma_{\omega_k}$  为

$$\mu_{\omega k} = \frac{1}{N} \sum_j \omega_{kj} \quad , \quad \sigma_{\omega k} = \left\{ \frac{1}{N-1} \sum_j (\omega_{kj} - \bar{\omega}_k)^2 \right\}^{1/2} \quad , \quad k = 1 \ 2 \ \dots \ n \quad . \quad (14)$$

### 3 算 例

依据上述导出的计算公式和提出的求解方法,作者编制了基于概率的随机链式结构动力特性分析程序,以下提供两个算例.为了进行比较,计算分别采用了确定性和随机性两种模型.在确定性模型中将所有随机变量的方差均取为零,并以其均值作为确定性参数.在随机性模型中,各转动惯量随机变量之间取为完全相关,各刚度模量随机变量之间取为完全相关,而转动惯量与刚度模量之间则取为完全独立.为了考查各随机变量取值的分散性对计算结果的影响,对各随机性变量的均方差分别取了几组值进行了计算.对参数的各组取值分别进行了  $N = 50\ 000$  次数值模拟.

算例 1 为某柴油机动力装置经简化成的两端自由的十三圆盘扭振系统<sup>[7]</sup>,随机变量  $J_i (i = 1 \sim 13)$  和  $K_i (i = 2 \sim 13)$  均服从正态分布,它们的均值分别为:圆盘的转动惯量为  $\mu_{J_1} = 35.52 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $\mu_{J_2} = \mu_{J_3} = \dots = \mu_{J_9} = 18.92 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $\mu_{J_{10}} = 6.35 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $\mu_{J_{11}} = 312.87 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $\mu_{J_{12}} = 10.77 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $\mu_{J_{13}} = 157.05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;轴段的刚度模量为  $\mu_{K_2} = 10^9/7.46 \text{ Pa}$ ,  $\mu_{K_2} = \mu_{K_3} = \dots = \mu_{K_9} = 10^9/9.16 \text{ Pa}$ ,  $\mu_{K_{10}} = 10^9/6.88 \text{ Pa}$ ,  $\mu_{K_{11}} = 10^9/7.04 \text{ Pa}$ ,  $\mu_{K_{12}} = 10^9/25.51 \text{ Pa}$ ,  $\mu_{K_{13}} = 10^9/926.56 \text{ Pa}$ ,系统结构固有频率的计算结果列于表 1,表中只列出前四阶固有频率及其均方差,表中  $\nu = \sigma/\mu$  为各参数的变异系数.为与其他文献的结果对比,表中固有频率的计算结果都化为  $H_z$ .

表 1 算例 1 扭振系统固有频率的计算结果

固有频率	$\omega_1/\text{Hz}$	$\omega_2/\text{Hz}$	$\omega_3/\text{Hz}$	$\omega_4/\text{Hz}$
文 [7] 结果	14.8269	67.0926	171.899	283.525
作者提出的确定性模型	14.8269	67.0926	171.899	283.525
随机性模型 I ( $\nu_{k_2} = \nu_{k_3} = \dots = \nu_{k_{13}} = 0.05$ )	$\mu_{\omega_1} = 14.8260$	$\mu_{\omega_2} = 67.0885$	$\mu_{\omega_3} = 171.888$	$\mu_{\omega_4} = 283.508$
随机性模型 II ( $\nu_{J_1} = \nu_{J_2} = \dots = \nu_{J_{13}} = 0.05$ )	$\sigma_{\omega_1} = 0.5286$	$\sigma_{\omega_2} = 2.3920$	$\sigma_{\omega_3} = 6.1285$	$\sigma_{\omega_4} = 10.1082$
随机性模型 III ( $\nu_{k_2} = \nu_{k_3} = \dots = \nu_{k_{13}} = 0.075$ )	$\mu_{\omega_1} = 14.8330$	$\mu_{\omega_2} = 67.1202$	$\mu_{\omega_3} = 171.970$	$\mu_{\omega_4} = 283.642$
随机性模型 IV ( $\nu_{J_1} = \nu_{J_2} = \dots = \nu_{J_{13}} = 0.075$ )	$\sigma_{\omega_1} = 0.7968$	$\sigma_{\omega_2} = 3.6057$	$\sigma_{\omega_3} = 9.2382$	$\sigma_{\omega_4} = 15.2372$
随机性模型 V ( $\nu_{k_2} = \nu_{k_3} = \dots = \nu_{k_{13}} = 0.1$ )	$\mu_{\omega_1} = 14.8453$	$\mu_{\omega_2} = 67.1757$	$\mu_{\omega_3} = 172.112$	$\mu_{\omega_4} = 283.876$
随机性模型 VI ( $\nu_{J_1} = \nu_{J_2} = \dots = \nu_{J_{13}} = 0.1$ )	$\sigma_{\omega_1} = 1.0703$	$\sigma_{\omega_2} = 4.8431$	$\sigma_{\omega_3} = 12.4085$	$\sigma_{\omega_4} = 20.4662$

算例 2 为两端固定的三圆盘扭振系统<sup>[7]</sup>,随机变量  $J_i (i = 1 \sim 3)$  和  $K_i (i = 1 \sim 4)$  均为正态分布,它们的均值分别为  $\mu_{J_1} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $\mu_{J_2} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $\mu_{J_3} = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $\mu_{K_1} = 1 \times 10^4 \text{ Pa}$ ,  $\mu_{K_2} = 1 \times 10^4 \text{ Pa}$ ,  $\mu_{K_3} = 1 \times 10^4 \text{ Pa}$ ,  $\mu_{K_4} = 2 \times 10^4 \text{ Pa}$ .系统结构固有频率及其均方差的计算结果列于表 2.

表 2 算例 2 扭振系统固有频率的计算结果

固有频率	$\omega_1/\text{Hz}$	$\omega_2/\text{Hz}$	$\omega_3/\text{Hz}$
文 [7] 结果	12.9234	20.6233	28.3009
作者提出的确定性模型	12.9233	20.6225	28.2996
随机性模型 I ( $\sigma_{J_1} = \sigma_{J_2} = 0.2$ , $\sigma_{J_3} = 0.4$ ) ( $\sigma_{K_1} = \sigma_{K_2} = \sigma_{K_3} = 2000$ , $\sigma_{K_4} = 4000$ )	$\mu_{\omega_1} = 12.3285$ $\sigma_{\omega_1} = 2.0770$	$\mu_{\omega_2} = 19.6734$ $\sigma_{\omega_2} = 3.3145$	$\mu_{\omega_3} = 26.9972$ $\sigma_{\omega_3} = 4.5483$
随机性模型 II ( $\sigma_{J_1} = \sigma_{J_2} = 0.1$ , $\sigma_{J_3} = 0.2$ ) ( $\sigma_{K_1} = \sigma_{K_2} = \sigma_{K_3} = 1000$ , $\sigma_{K_4} = 2000$ )	$\mu_{\omega_1} = 12.9554$ $\sigma_{\omega_1} = 0.9305$	$\mu_{\omega_2} = 20.6737$ $\sigma_{\omega_2} = 1.4849$	$\mu_{\omega_3} = 28.3700$ $\sigma_{\omega_3} = 2.0377$
随机性模型 III ( $\sigma_{J_1} = \sigma_{J_3} = 0.2$ , $\sigma_{J_2} = 0.1$ ) ( $\sigma_{K_1} = \sigma_{K_2} = \sigma_{K_3} = 1000$ , $\sigma_{K_4} = 2000$ )	$\mu_{\omega_1} = 12.9768$ $\sigma_{\omega_1} = 1.0581$	$\mu_{\omega_2} = 20.7402$ $\sigma_{\omega_2} = 1.8056$	$\mu_{\omega_3} = 28.5584$ $\sigma_{\omega_3} = 2.6374$
随机性模型 IV ( $\sigma_{J_1} = \sigma_{J_3} = 0.1$ , $\sigma_{J_2} = 0.3$ ) ( $\sigma_{K_1} = \sigma_{K_2} = \sigma_{K_3} = 1000$ , $\sigma_{K_4} = 2000$ )	$\mu_{\omega_1} = 12.9699$ $\sigma_{\omega_1} = 1.0110$	$\mu_{\omega_2} = 20.7362$ $\sigma_{\omega_2} = 1.7526$	$\mu_{\omega_3} = 28.3878$ $\sigma_{\omega_3} = 2.0975$

