

宽频带信号频率估计方法

王洪洋, 廖桂生, 周争光, 吴云韬

(西安电子科技大学 雷达信号处理重点实验室 陕西 西安 710071)

摘要: 研究了宽频带信号频率的估计问题. 对宽频带信号进行 Nyquist 采样, 其硬件复杂度相当大, 欠采样技术是解决此类问题的首选技术. 但欠采样会引起信号频率的混叠, 必须解模糊. 通过增加一个延迟通道提供的信息和一定的解模糊算法来解频率模糊, 硬件代价较小. 为进一步降低运算复杂度, 给出了简易算法, 增强了算法的实用性.

关键词: 宽频带; 欠采样; 频率模糊; 运算复杂度

中图分类号: TN911.6 文献标识码: A 文章编号: 1001-2400(2005)04-0566-04

Study of the estimation of frequencies from the wide band

WANG Hong-yang, LIAO Gui-sheng, ZHOU Zheng-guang, WU Yun-tao

(Key Lab. of Radar Signal Processing, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

Abstract: An algorithm for estimating frequencies from the wide band is proposed. Along with the information provided by the auxiliary channel and the aliased frequencies estimated, we can solve the frequency ambiguity due to sub-Nyquist sampling which is usually adopted to estimate frequencies from the wide band. The method for the estimation of frequencies with sub-Nyquist sampling can reduce the complexity of the overall hardware. In order to reduce the computational burden of the proposed algorithm, a more simplified algorithm is deduced. Finally, simulation results verify the efficiency of this method.

Key Words: wide-band; sub-Nyquist sampling; frequency ambiguity; computational burden

限于当前的硬件加工水平和后端数字信号处理压力, 对宽频带信号进行 Nyquist 采样处理十分困难, 而欠采样技术为解决这一问题提供了新途径. 不同于常规的频率估计技术^[1-4], 欠采样使得信号频谱发生混叠, 必须通过一定的解模糊算法才能得到信号真实频率的估计. 利用多个延迟通道和前后向稀疏线性预测(FBSLP)方法, 文[5]提出了一种求解欠采样信号频率的无模糊估计方法, 但这种方法需要的硬件量很大. 将信号适当延迟并结合 MUSIC 方法, 文[6]也提出了一种欠采样频率解模糊方法, 但要求延迟通道数大于信号数, 并且需要搜索运算, 很难实时处理. 文[7]文中称为 Pro-ESPRIT 算法, 仅增加一个延迟通道并结合文[8]方法提出了欠采样条件下估计宽频带信号频率的有效方法, 硬件代价和算法复杂度比文[5, 6]优, 运算量主要集中在两次相关矩阵估计和特征分解上. 笔者通过延迟通道提供的信息和欠采样后信号频率的估计来联合解模糊, 分析和数值仿真结果验证了该方法的有效性. 为降低运算量, 还提供了简易算法, 该算法不需要估计信号相关矩阵, 并且仅需要一次低维数矩阵特征分解就可实现频率估计, 大大增强了方法的实用性.

1 信号模型

设传感器感应的 K 个复指数信号被分成两路, 一路直接被模数转换器(ADC)以速率 F_s 采样, F_s 小于信号 Nyquist 采样速率, 为时间欠采样. 另外一路延迟 τ 后被同步采样, τ 小于信号 Nyquist 采样间隔. 分别以 $\{F_1, F_2, \dots, F_K\}$ 表示各信号频率, 以 $x(n)$, $y(n)$ 表示对无延迟、有延迟信号的第 n 次快拍, 有

收稿日期: 2004-08-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60172028); 高等学校博士学科点专项基金资助项目(20010701008)

作者简介: 王洪洋(1976-), 男, 西安电子科技大学博士研究生.

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{k=1}^K s_k(n) + w_x(n) = \sum_{k=1}^K b_k \exp(j2\pi f_k n) + w_x(n) \quad , \\ y(n) &= \sum_{k=1}^K \exp(-j2\pi F_k \tau) s_k(n) + w_y(n) = \sum_{k=1}^K b_k \exp(j2\pi(f_k n - F_k \tau)) + w_y(n) \quad , \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $s_k(n)$ 表示对第 k ($1 \leq k \leq K$) 个信号的第 n 次快拍 (这里不考虑欠采样后各信号相干的情况) b_k f_k 分别表示其复幅度和数字频率 $\exp(-j2\pi F_k \tau)$ 表示第 k ($1 \leq k \leq K$) 个信号的延迟相位差 $w_x(n)$ $w_y(n)$ 为相应输出的零均值加性高斯白噪声。

将有延迟、无延迟信号的连续 ($Q > K$) 次快拍排成两列矢量为

$$\begin{aligned} X(n) &= [x(n), x(n+1), \dots, x(n+Q-1)]^T = A(f) S(n) + W_x(n) \quad , \\ Y(n) &= [y(n), y(n+1), \dots, y(n+Q-1)]^T = A(f) \Phi S(n) + W_y(n) \quad , \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $A(f) = [a(f_1), \dots, a(f_K)]$ $a(f_k) = [1, \exp(j2\pi f_k), \dots, \exp(j2\pi(Q-1)f_k)]^T$ $\Phi = \text{diag}(\exp(-j2\pi F_1 \tau), \dots, \exp(-j2\pi F_K \tau))$ $S(n) = [s_1(n), \dots, s_K(n)]^T$ 。

而 $W_x(n)$ $W_y(n)$ 分别表示相应输出的白噪声向量并称 $a(f_k)$ 为时间导向矢量。这里是由 ADC 对无延迟、有延迟通道的采样来获得各个信号频率的无模糊且低方差估计。

2 文中算法

合并无延迟、有延迟采样输出有

$$Z(n) = [X^T(n) \ Y^T(n)]^T = \begin{bmatrix} A \\ A \Phi \end{bmatrix} S(n) + \begin{bmatrix} W_x(n) \\ W_y(n) \end{bmatrix} = B S(n) + W(n) \quad . \quad (3)$$

欠采样时间导向矢量和各信号延迟相位差都包含在 B 中。基于式 (3) 和 ESPRIT 方法可实现时间导向矢量和各延迟相位差的估计。首先计算 $Z(n)$ 的相关矩阵 $R_{zz} = E[Z(n)Z^H(n)] = B R_{ss} B^H + \delta^2 I_{2Q}$ 其中 $E[\cdot]$ 表示求数学期望 R_{ss} 为 K 个信号的相关矩阵 δ^2 为噪声功率 I_{2Q} 为 $2Q$ 阶单位阵。对上相关矩阵特征分解有

$$R_{zz} = \sum_{i=1}^{2Q} \lambda_i u_i u_i^H = E_s \Lambda_s E_s^H + \delta^2 E_w E_w^H \quad , \quad (4)$$

其中 $\Lambda_s = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_K)$ 为 K 个大特征值形成的对角阵 E_s E_w 分别为 K 个大特征值、 $2Q - K$ 个小特征值 (等于噪声功率) 对应特征向量形成的矩阵, 分别张成信号子空间和噪声子空间。由文 [9] 知, 存在一非奇异

矩阵 T , 使得下式成立 $E_s = \begin{bmatrix} E_{s1} \\ E_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A \Phi \end{bmatrix} T = B T \quad , \quad (5)$

其中 E_{s1} E_{s2} 分别为 E_s 的前、后 Q 行元素组成的维数为 $Q \times K$ 的矩阵, 并且有

$$\begin{aligned} E_{s1} &= A T \quad , \quad E_{s2} = A \Phi T \quad , \\ E_{s2} &= E_{s2} (E_{s1}^H E_{s1})^{-1} E_{s1}^H E_{s1} \Rightarrow A \Phi T = E_{s2} E_{s1}^{\#} A T \Rightarrow E_{s2} E_{s1}^{\#} A = A \Phi \quad , \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $E_{s1}^{\#} = (E_{s1}^H E_{s1})^{-1} E_{s1}^H$ 表示伪逆运算。式 (6) 表明对 $E_{s2} E_{s1}^{\#}$ 特征分解 K 个大特征值 $\lambda'_1, \dots, \lambda'_K$ 为 Φ 对角线元素 $\exp(-j2\pi F_1 \tau), \dots, \exp(-j2\pi F_K \tau)$ 的估计, 对应特征向量 u'_1, \dots, u'_K 为 A 各列向量 $a(f_1), \dots, a(f_K)$ 的估计, 且由特征值与特征向量的一一对应关系实现了同一信号延迟相位差和欠采样时间导向矢量的自动配对。由延迟相位差和信号数字频率的估计并结合文 [8] 提出的信号解模糊算法, 则信号频率的估计为

$$F_k = \begin{cases} F_{\max} - \hat{f}_k F_s & , \quad -L\mu < \angle \lambda'_k < -(L-1/4)\mu \\ F_s \lfloor \hat{f}_k - \text{round}[(\angle \lambda'_k + \mu/4)/\mu] \rfloor & , \quad -(L-1/4)\mu < \angle \lambda'_k < L\mu \end{cases} \quad , \quad (7)$$

其中 $L = F_{\max}/F_s$ $\mu = 2\pi F_s \tau$ 符号 $\text{round}(\cdot)$ 表示取最接近括号内的整数 F_{\max} 为系统可估计的信号最大频率。实际上, 只能用 N ($N > Q$) 次快拍数据来估计信号相关矩阵

$$\hat{R}_{zz} = \frac{1}{N-Q+1} \sum_{n=1}^{N-Q+1} Z(n) Z^H(n) \quad .$$

以上频率估计算法的运算量 (复乘法次数) 主要集中在估计相关矩阵、求伪逆和两次特征分解上, 整个算法运算量约为 $C_1 = 4(N-Q+1)Q^2 + KQ(Q+2K) + O(9Q^3) + O(K^3)$ 。而文 [7] 算法的运算量约为 $C_2 =$

$2QK(2K + Q) + 2Q^2(N - Q + 1) + O(K^3) + O(Q^3)$. 当 N, Q 较大时, 该算法运算量很大. 下面给出上频率估计方法的简易算法.

分别以 $(\cdot)_{m,n}$ 表示矩阵第 m 行到第 n 行元素构成的矩阵, 则存在一矩阵 $V^{[10,11]}$ 使得下式成立

$$V^H B_{1:K} = B_{K+1:2Q} \quad (8)$$

不考虑噪声影响, 记数据矩阵 $Z = [Z(1) Z(2) \dots Z(N)]$, 有

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{1:K} \\ Z_{K+1:2Q} \end{bmatrix} = B [S(1) S(2) \dots S(N)] = \begin{bmatrix} B_{1:K} \\ B_{K+1:2Q} \end{bmatrix} S \quad (9)$$

其中 $S = [S(1) S(2) \dots S(N)]$ 对 $Z_{1:K}$ 左乘 V^H , 有

$$V^H Z_{1:K} = V^H B_{1:K} S = B_{K+1:2Q} S = Z_{K+1:2Q} \quad (10)$$

考虑噪声时, 式(10)近似成立, 可通过

$$J(V) = \arg \min \|Z_{K+1:2Q} - V^H Z_{1:K}\|^2 \quad (11)$$

估计 V . 式(11)中 $\|\cdot\|$ 表示 Frobenius 范数, 解式(11)有 $V = (Z_{1:K} Z_{1:K}^H)^{-1} Z_{1:K} Z_{K+1:2Q}^H$.

依照文[12]将 $V^H B_{K+1:2Q}$ 按行 $\{Q-K, K, Q-K\}$ 分块并结合式(8), 有

$$V_{1:Q-K}^H B_{1:K} = B_{K+1:Q} \quad , \quad V_{Q+1:2Q-K}^H B_{1:K} = B_{K+1:Q} \Phi \quad .$$

由于 $B_{1:K}$ 为一满秩方阵, 因此有 $V_{Q+1:2Q-K}^H (V_{1:Q-K}^H)^{\#} B_{K+1:Q} = B_{K+1:Q} \Phi$.

上式同式(6)类似, 只不过是用 $V_{Q+1:2Q-K}^H$ 代替 E_{s1} , 用 $V_{1:Q-K}^H$ 代替 E_{s2} . 对 $V_{Q+1:2Q-K}^H (V_{1:Q-K}^H)$ 特征分解, 由 K 个大特征值实现延迟相位差的估计, 由对应特征向量相邻元素的相位差估计欠采样后信号的数字频率, 并且延迟相位差和数字频率估计自动配对.

简易算法的运算量主要集中在求解 V 、伪逆和特征分解上, 约为

$$C_2 = K(N + 1)(2Q + K) + K(Q(K - Q) + O(Q^3)) + 2O(K^3) \quad .$$

较上面提出的算法和 Pro-ESPRIT 算法运算复杂度明显降低, 降低程度视各参数的设计情况.

3 计算机仿真

设待估计的宽带信号频率范围为 $0 \sim 500$ MHz, 取延迟 $\tau = 1$ ns, 采样率 $F_s = 200$ MHz. 仿真实验中提出的算法及其简易算法分别为方法 1, 方法 2.

实验 1 在采样数 N 确定的前提下分析参数 Q 的选取对频率估计性能的影响. 假定两个等功率待估计信号频率分别为 200 MHz 和 330 MHz, 信噪比取 30 dB, 分析当分别 $N = 64$ 和 $N = 256$ 时取不同的 Q 值对应第一个信号频率的估计均方根误差. 由图 1, 图 2 的计算机仿真结果可见, 当 $N = 64$ 时, Q 取值大于 20 时估计性能较优, 而当 $N = 256$ 时, Q 取值大于 60 时估计性能较好. 由算法的运算复杂度分析可知, 过大的 Q 值将使算法的运算复杂度激增, 因此必须在算法复杂度和估计精度之间进行合理的折中.

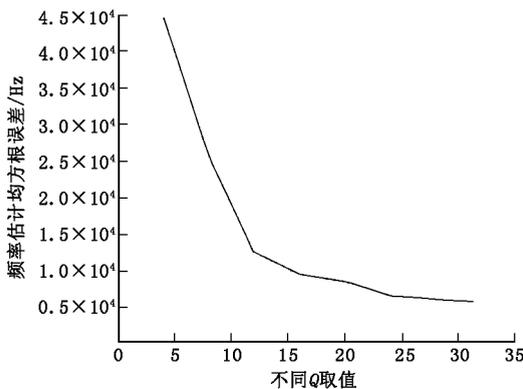


图 1 $N = 64$ 时频率估计性能

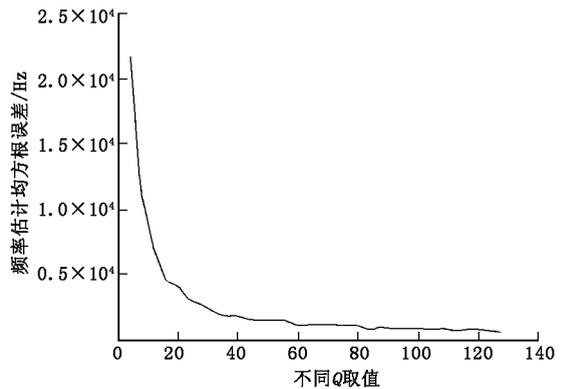


图 2 $N = 256$ 时频率估计性能

实验 2 比较 Pro-ESPRIT 算法和文中算法 1、2 的频率估计性能. 两个等功率的待估计信号频率分别为 200 MHz 和 330 MHz, 采样数 $N = 256$, 取 $Q = 40$, SNR 从 0 dB 到 30 dB 变化, 每个 SNR 取值做 200 次 Monte-

Carlo 实验进行统计. 依照上述实验参数设置, 方法 2 运算量是方法 1 的 5%, 是 Pro-ESPRIT 运算量的 11%. 图 3 给出方法 1 2 及 Pro-ESPRIT 算法对第一个信号频率估计的均值随信噪比变化曲线. 图 4 给出方法 1 2 及 Pro-ESPRIT 算法对第一个信号频率估计的均方根误差随信噪比变化曲线. 由图可见, 在低信噪比时方法 2 的估计性能比方法 1 稍差, 当信噪比大于 5 dB 时, 两种方法估计性能相当, 接近 CRLB. 同时, 由仿真可见在不同信噪比下, 文中方法频率估计性能优于 Pro-ESPRIT 算法.

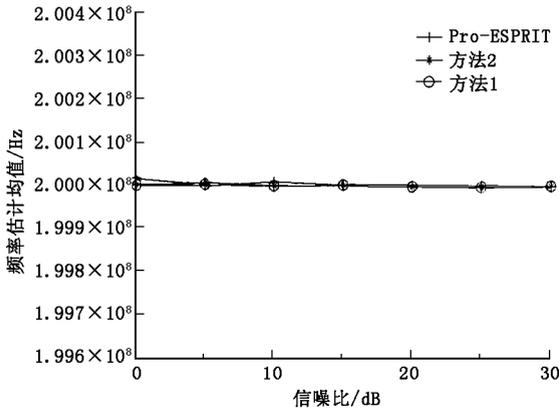


图 3 频率估计均值随信噪比变化曲线

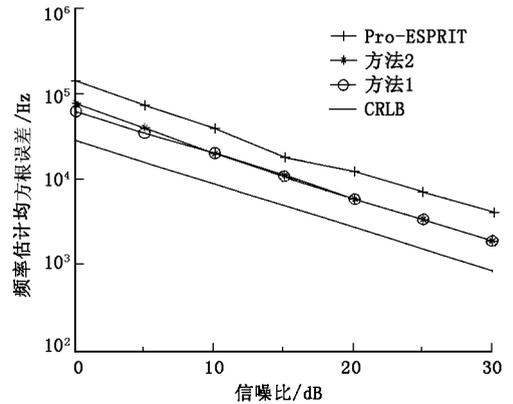


图 4 频率估计 RMSE 随信噪比变化曲线

4 结 论

基于 ESPRIT 思想, 文中给出了一种欠采样情况下信号频率的估计方法和其简化算法. 该方法无需对整个频段搜索, 可直接给出待估计参数的闭式解. 为进一步降低欠采样频率估计复杂度, 还给出了一简易算法. 最后的计算机仿真表明文中所提出的算法是可行的, 并且算法分辨力和估计精度很高, 有望得到实际应用.

参考文献:

- [1] Wahlberg W B. ARMA Spectral Estimation of Narrow Band Processes Via Model Reduction[J]. IEEE Trans on ASSP , 1990 , 38(7) : 1144-1154.
- [2] Ji Hongbing , Xie Weixin , He Wei. An Effective Implementation of FFT Based on DSIF[J]. Journal of Xidian University , 1998 , 25(4) : 445-449.
- [3] Chan Y T , Langford R P. Spectral Estimation Via the High Order Yule-Walker Equations[J]. IEEE Trans on APSS , 1982 , 30(5) : 689-698.
- [4] Lang S W , McClellan J H. Frequency Estimation with Maximum Entropy Spectral Estimators[J]. IEEE Trans on ASSP , 1980 , 28(6) : 716-723.
- [5] Tufts D W , Ge H Y. Digital Estimation of Frequencies of Sinusoid from Wide Band Under Sampled Data[EB/OL]. <http://www.ieeexplore.ieee.org> , 2004-01-10.
- [6] 唐 斌, 肖先赐. 欠采样环境下信号多频率估计[J]. 电子科学学刊, 1997, 19(10): 619-624.
- [7] 黄佑勇, 王激扬. 基于欠采样的宽频段信号频率估计技术[J]. 电波科学学报, 2001, 16(2): 275-279.
- [8] Zoltowski M D , Mathews C P. Real-time Frequency and 2-D Angle Estimation with Sub-Nyquist Spatio-temporal Sampling[J]. IEEE Trans on SP , 1994 , 42(10) : 2781-2794.
- [9] Roy R , Paulraj A. ESPRIT—a Subspace Rotation Approach to Estimation of Parameters of Sinusoids in Noise[J]. IEEE Trans on ASSP , 1986 , 34(5) : 1340-1342.
- [10] Marcos S , Marsal A. The Propagator Method for Source Bearing Estimation[J]. Signal Processing , 1995 , 42(3) : 121-138.
- [11] Munier J , Delistle G Y. Spatial Analysis Using New Properties of the Cross-spectral Matrix[J]. IEEE Trans on Signal Processing , 1991 , 39(3) : 746-749.
- [12] Wu Yuntao , Liao Guisheng. A Fast Algorithm for 2D Direction-of-arrival Estimation[J]. Signal Processing , 2003 , 83(1) : 1827-1831.

